

---

# Campos escalares y vectoriales

---

## 1.1 Introducción

En los cursos de Cálculo I y II se ha trabajado con funciones reales de una variable real. En este curso de Cálculo III se han introducido y trabajado las funciones de varias variables. Estas funciones reciben, en el contexto de la unidad que se inicia, el nombre de *campos escalares*, como contrapunto a las nuevas funciones que aparecen, las cuales reciben el nombre de *campos vectoriales*. Así entonces:

## 1.2 Campos escalares

Un *campo escalar*<sup>\*</sup> es una función de  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  o  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$ , es decir se llama *campo escalar* a una función real de varias variables reales. Luego, asociado a un campo escalar están todos los conceptos ya estudiados: derivadas parciales, derivadas direccionales, gradientes, planos tangentes, etc.

## 1.3 Campos vectoriales

Se denomina *campo vectorial*<sup>†</sup> en  $\mathbb{R}^n$  a una función de  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  (con  $n \geq 2$ ). En este curso se trabajará de preferencia los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ .

---

<sup>\*</sup> Anotaremos campo escalar por CE    <sup>†</sup> Anotaremos campo vectorial por CV

**Ejemplo 1.1. Ejemplos de CV.**

- $F(x, y) = (x, -y) = x\hat{i} - y\hat{j}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ .
- $G(x, y) = (x + y, x - y) = (x + y)\hat{i} + (x - y)\hat{j}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ .
- $H(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z) = (-x + y + z)\hat{i} + (x - y + z)\hat{j} + (x + y - z)\hat{k}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejercicio 1.1.** Determinar cual(es) de las siguientes aplicaciones constituye(n) un campo escalar o un campo vectorial:

- 1) La aplicación que asocia, en un determinado momento, a cada punto de la tierra la velocidad del viento en dicho punto.
- 2) La aplicación que asocia, en un determinado momento, a cada punto de la tierra la temperatura a 10 metros de altura sobre dicho punto.
- 3) La aplicación que asocia a cada punto de la tierra su altura sobre el nivel del mar.

**Nota 1.1.** En general un campo vectorial en  $D \subset \mathbb{R}^3$ , viene dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

o equivalentemente, por

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son campos escalares, en este caso, funciones de  $D \subset \mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$ , que reciben el nombre de *funciones componentes* de  $\vec{F}$ .

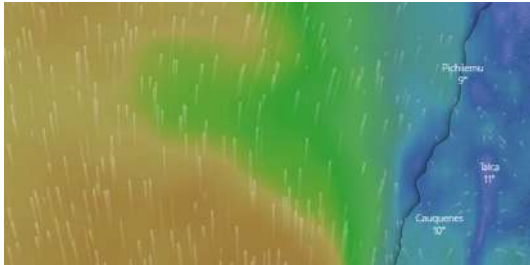
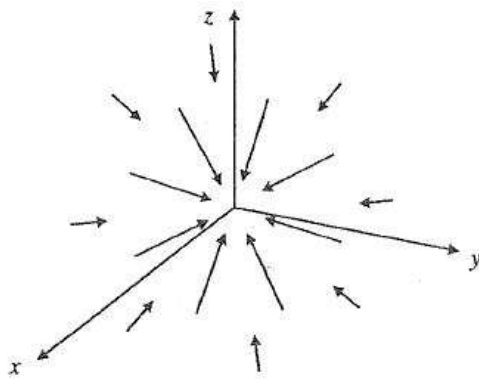
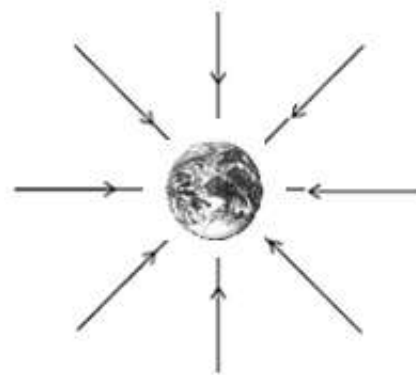
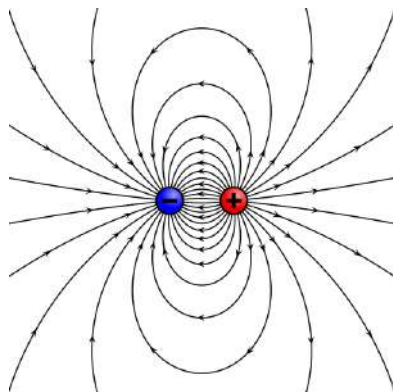
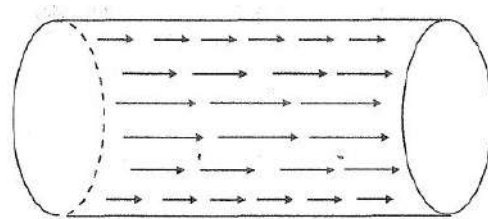
**Ejercicio 1.2.** ¿Que forma tiene, en general, un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ ?

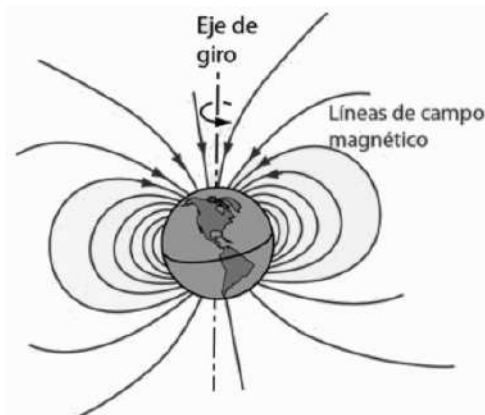
**Ejemplo 1.2.** Un campo vectorial en el plano lo constituye en **gradiente** de un campo escalar en el plano. En efecto, sea  $z = f(x, y)$  un campo escalar, entonces su vector gradiente

$$\nabla f(x, y) = \frac{\delta f}{\delta x}(x, y)\hat{i} + \frac{\delta f}{\delta y}(x, y)\hat{j}$$

es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ . Recordar que algunas propiedades del gradiente son:

- 1)  $\nabla F$  es perpendicular a las *curvas de nivel*.
- 2)  $\nabla F$  en un punto, tiene como dirección hacia el mayor crecimiento de la función  $f$ .

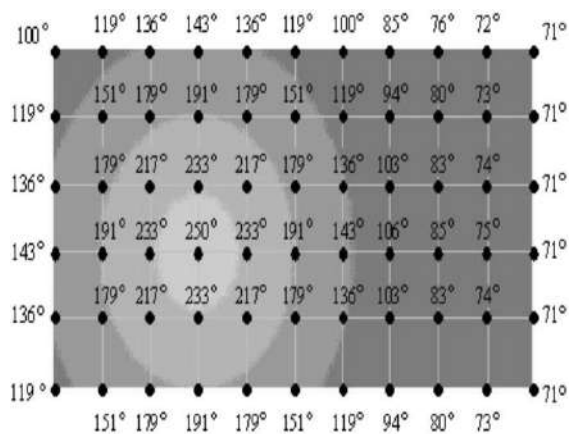
**Ejemplo 1.3. Ejemplos de campos escalares y vectoriales.***Campo de velocidades del viento (vectorial)**Temperatura a nivel del suelo (escalar)**Campo gravitacional vectorial  
generado por la Tierra**Líneas de campo\* gravitatorio  
de la tierra (vectorial)**Líneas de campo\* eléctrico (vectorial)**Campo de velocidades de un líquido  
que fluye por un tubo (vectorial)*



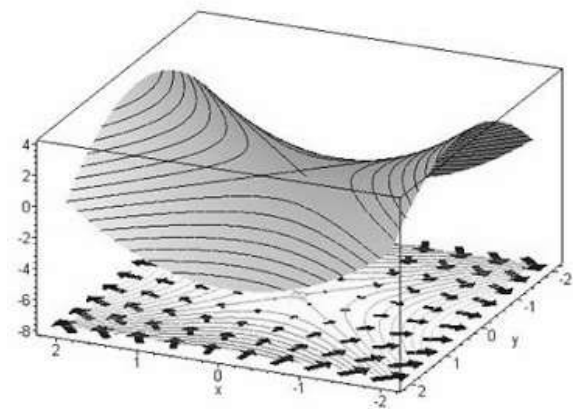
*Líneas de campo magnético  
de la tierra (vectorial)*



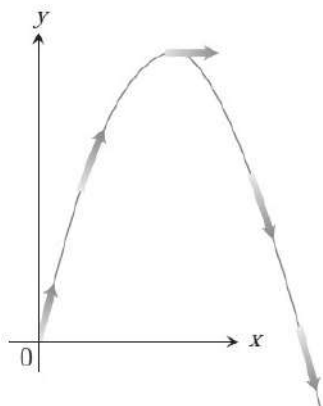
*Flujo de calor (vectorial)*



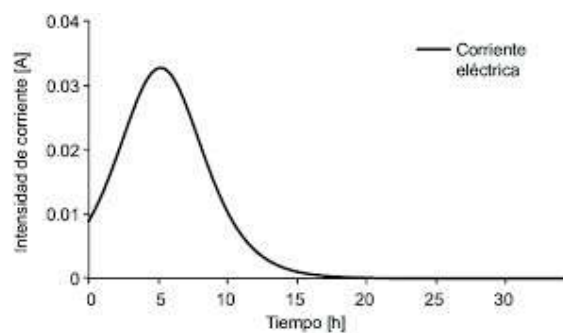
*Distribución temperatura placa (escalar)*



*Gradiente de un campo escalar (vectorial)*



*Vectores velocidad (campo vectorial  
sobre la trayectoria)*

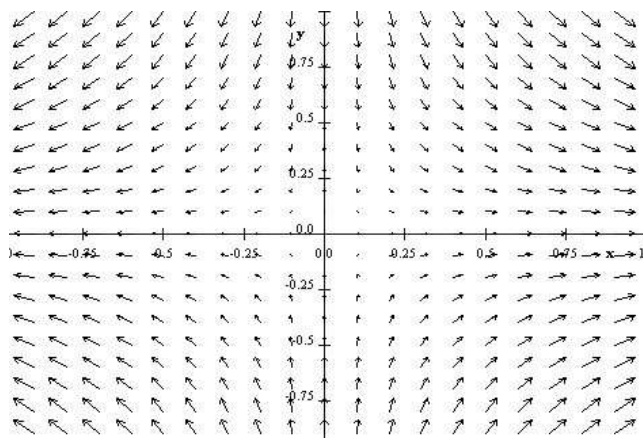


*Intensidad de corriente eléctrica (escalar)*

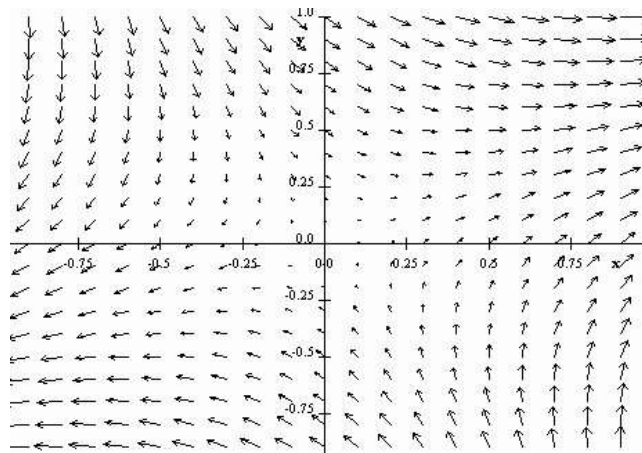
## 1.4 Representación gráfica de un campo vectorial

Como una manera de visualizar de mejor manera un campo vectorial  $\vec{F}$ , digamos en  $D \subset \mathbb{R}^2$ , se acostumbra a dibujar en el plano, el vector  $\vec{F}(x, y)$  a partir del punto  $(x, y)$ . De manera análoga se procede con campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ . El conjunto de vectores así graficados recibe el nombre de *campo de direcciones* o *flujo*.

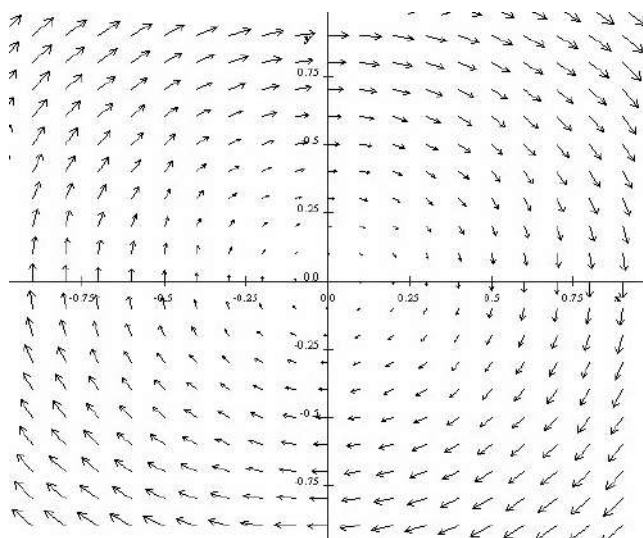
### 1.4.1 Ejemplos de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$



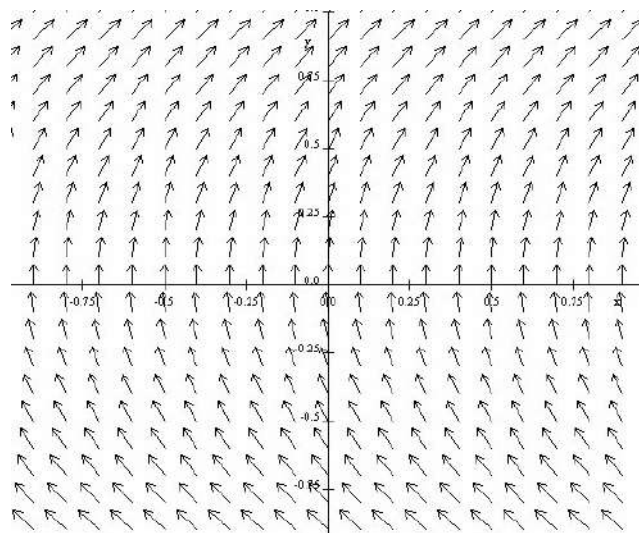
Flujo de  $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$



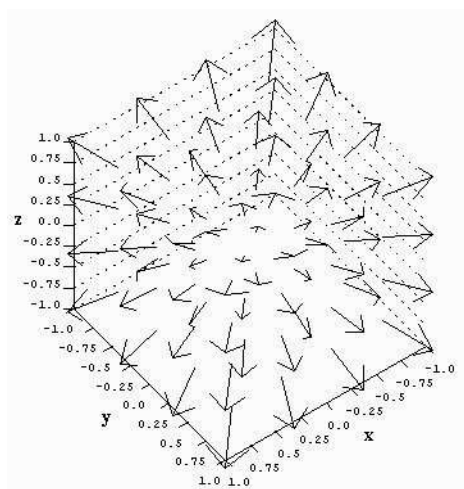
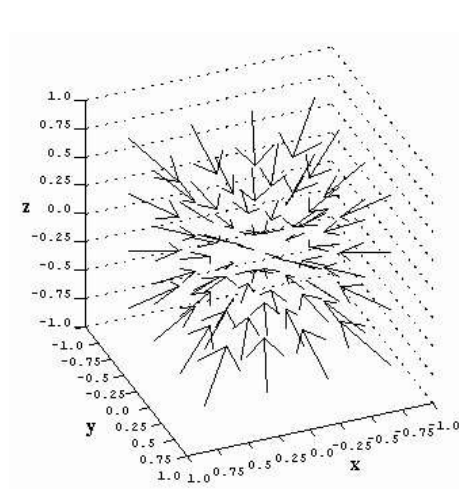
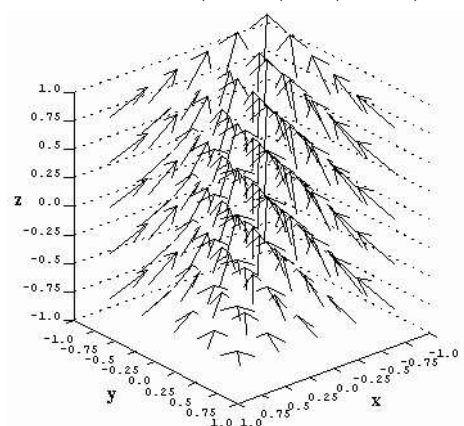
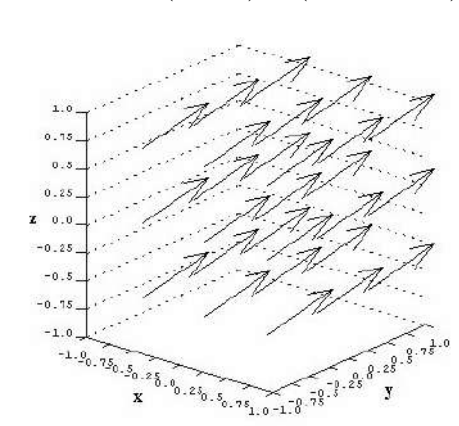
Flujo de  $\vec{G}(x, y) = (x + y, x - y)$



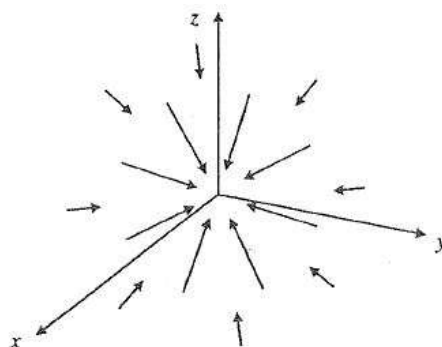
Flujo de  $\vec{H}(x, y) = (y, -x)$



Flujo de  $\vec{J}(x, y) = (y, 1)$

1.4.2 Ejemplos de campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ Flujo de  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ Flujo de  $\vec{G}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ Flujo de  $\vec{H}(x, y, z) = (y, x, 1)$ Flujo de  $\vec{J}(x, y, z) = (1, 1, 1)$ 

## 1.5 Campo gravitatorio



Campo gravitacional vectorial generado por la Tierra

La ley gravitación de Newton\*, establece que: *Toda partícula material atrae a cualquier otra partícula material con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa*, es decir,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Siendo  $m_1$  y  $m_2$  sus masas;  $r$  la distancia entre ellas y  $G$  una constante universal que recibe el nombre de *constante de gravitación*, cuyo valor es  $G = 8,870 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ .

Se puede verificar que la expresión vectorial de la fuerza gravitacional, viene dada por

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Siendo  $\vec{u}_r$  un vector unitario cuya dirección es la recta que une los centros de las dos partículas que se atraen y cuyo sentido va dirigido desde la partícula que origina la fuerza hacia fuera. Este sentido dado al vector unitario es el que explica la aparición del signo negativo en la expresión vectorial ya que el sentido de la fuerza gravitatoria será contrario al vector unitario que le corresponda.

Ahora bien, consideremos un cuerpo de masa  $M$  en espacio (la tierra, por ejemplo) y ubicado en el origen del sistema de coordenadas. Este cuerpo genera en el espacio un campo vectorial gravitatorio, cuyo valor en un punto del espacio ubicado en  $\vec{r} = (x, y, z)$ , viene definido por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \hat{u} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

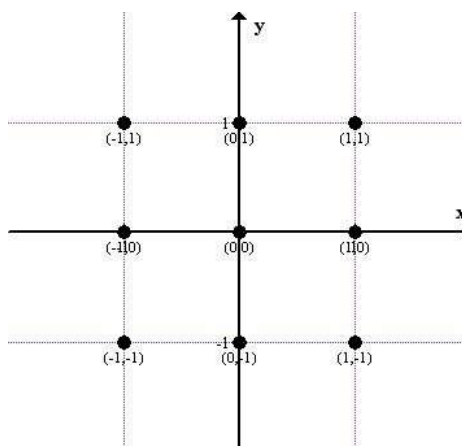
**Nota:** Para un análisis similar para el campo vectorial eléctrico, revisar la actividad 6 (al final de esta sección).

---

\* **Referencia:** [Gravitación universal](#). José Luis Márquez

## 1.6 Actividades Sección 1

- 1) Analizar si la afirmación *El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial*, es verdadera o falsa. Justificar su respuesta.
- 2) Clasificar cuales de los siguiente campos son escalares o vectoriales:
  - a) Desplazamiento de un avión en el espacio
  - b) La fuerza aplicada para mover una mesa
  - c) Intensidad de la luz solar en una piscina
  - d) El momento de un auto que se mueve de una ciudad  $A$  a una ciudad  $B$
  - e) Distribución de la temperatura en una sala de clases
  - f) La aceleración de una pelota en movimiento
  - g) La presión atmosférica, en cierto momento, en la ciudad de Talca
  - h) El trabajo realizado al mover una mesa
  - i) La humedad en cada punto de un terreno
  - j) El peso de una pelota de hierro ubicada en distintos puntos del espacio
- 3) a) Dibujar el campo de direcciones de  $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$  en los puntos indicados.



- b) ¿Qué relación geométrica se observa entre un vector  $(x, y)$  y su imagen  $\vec{F}(x, y)$ ? Verificar esta relación.
  - c) ¿Cómo son las líneas de campo de este campo vectorial?
- 4) Realizar un esbozo de los campos de direcciones de  $\vec{F}(x, y) = (x + 1, y - 1)$  y  $\vec{G}(x, y, z) = \hat{i} + \hat{j} + z\hat{k}$ . Chequear sus respuesta con el software MVT (Mathematical Visualization Toolkit).
  - 5) Hacer corresponder los campos vectoriales gradientes de los siguientes campos escalares en  $\mathbb{R}^2$

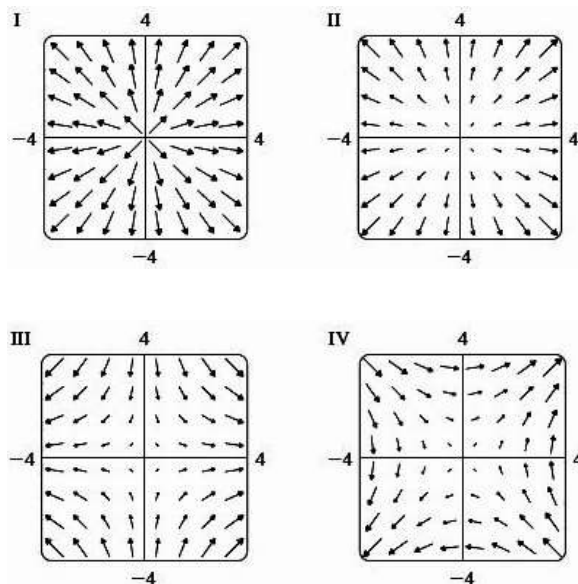
$$F_1(x, y) = xy$$

$$F_2(x, y) = x^2 - y^2$$

$$F_3(x, y) = x^2 + y^2$$

$$F_4(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con uno de los siguientes gráficos:

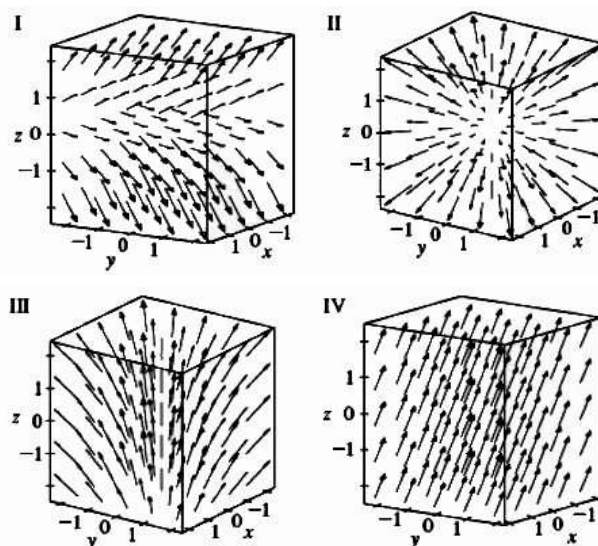


6) Hacer corresponder los siguientes campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$

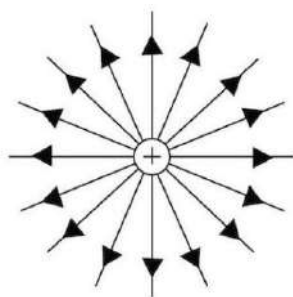
$$\begin{aligned}\vec{F}_1(x, y, z) &= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \\ \vec{F}_3(x, y, z) &= x\hat{i} + y\hat{j} + 3\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_2(x, y, z) &= \hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{F}_4(x, y, z) &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\end{aligned}$$

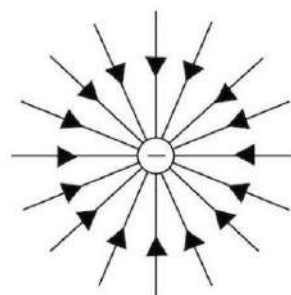
con uno de los siguientes gráficos:



## 7) Campo vectorial eléctrico con una carga puntual



Caso 1 (carga positiva)



Caso 2 (carga negativa)

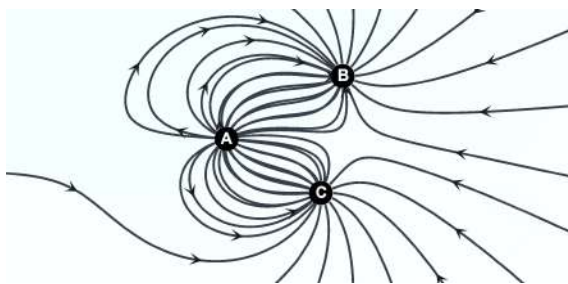
- a) Sabiendo que para el caso 1, la fuerza de repulsión de la carga central  $q_1$  y otra carga positiva  $q$  (carga de prueba), por la *Ley de Coulomb* es  $\|\vec{F}\| = K \frac{q_1 q}{r^2}$  (Newton), donde  $r$  es la distancia entre las cargas.

Suponiendo que la carga central está en el origen del sistema de coordenadas, determinar el valor del campo vectorial eléctrico para una carga positiva  $q$ , ubicada en el punto  $r = (x, y)$ , sabiendo que el campo eléctrico viene definido por  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ .

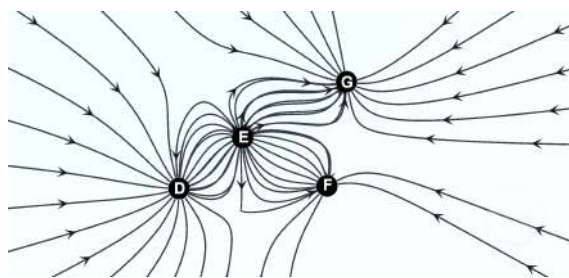
- b) Explicitar las funciones componentes de este campo eléctrico.
- c) En base al resultado obtenido en (a), determinar el campo eléctrico vectorial correspondiente al caso 2 (carga negativa).

## 8) Campo eléctrico de cargas puntuales

A continuación se entregan las líneas de fuerza de 2 campos eléctricos (vectoriales) con 3 y 4 cargas, respectivamente. Determinar en cada uno de ellos las cargas (positiva o negativa) de cada una de sus cargas.



Campo eléctrico 1



Campo eléctrico 2

## 9) Ley de gravitación de Newton.

La ley de gravitación universal establece que la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos objetos de masas  $m$  y  $M$ , viene dada por:

$$\|\vec{F}\| = \frac{mMG}{r^2}$$

donde,  $r$  es la distancia entre los objetos y  $G$  la constante gravitacional\*.

- a) Sea  $M$  la masa de la tierra, su centro ubicado en el origen de  $\mathbb{R}^3$  y  $m$  la masa de un objeto con vector posición  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Deducir que en este caso, la fuerza gravitacional que actúa sobre el cuerpo ubicado en  $\vec{r}$ , llamado *campo vectorial gravitatorio*, es

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{mMG}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

- b) Explicitar las funciones componentes de  $\vec{F}$ .
- c) Esbozar el campo de direcciones de  $\vec{F}$ .
- 10) Un campo vectorial  $\vec{F}$  se dice *campo vectorial conservativo*, cuando existe un campo escalar  $f$ , de modo que  $\vec{F} = \nabla f$ . En tal caso, la función  $f$  recibe el nombre de *función potencial de  $\vec{F}$*
- a) Verificar que  $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + x^2y$  es una función potencial de  $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + y)$
- b) Decidir si el CV  $\vec{G} = \vec{G}(x, y) = (x + 4y, 4x + y)$  es o no conservativo.
- c) Idem anterior para  $\vec{H} = \vec{H}(x, y) = (x + 4y, x + 4y)$
- 11) a) Sean  $P$  y  $Q$  dos funciones  $C^1$  en un disco abierto del plano. Verificar que si el CV  $\vec{F}(x, y) = (P, Q)$  es conservativo entonces  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .
- b) Verificar que el CV  $\vec{F}(x, y) = xy^2\vec{i} + xy\vec{j}$  no es conservativo
- c) El CV  $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^3)$  es conservativo. ¿Es posible comprobar esta afirmación usando (a)?

- 12) Verificar que el campo vectorial gravitatorio de la actividad (6) es conservativo.

**Hint:** Una función potencial es  $\phi = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

---

\*  $G \approx 6.67428 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$