SECCIÓN **2**

Divergencia y rotacional

2.1 Introducción

En esta sesión se recuerda el operador gradiente de una función escalar y se revisan dos importantes operaciones sobre campos vectoriales, de frecuente uso el resto del curso. Una de ellas produce un campo escalar (divergencia) y la otra un campo vectorial (rotor).

2.2 Gradiente de un campo escalar

Recordar que en estudio de las funciones de varias variables, realizado en el curso de cálculo anterior, se revisó el operador *gradiente* de una función escalar, cuyo resultado era un campo vectorial. En efecto, sea $\varphi = \varphi(x, y, z)$ un campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces el gradiente de φ se anota y define por:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\widehat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\widehat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\widehat{k}$$

Ejemplo 2.1. Calcular el gradiente de la función $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2y$.

Desarrollo:

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y)\,\widehat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z)\,\widehat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(z^2x)\,\widehat{k} = 2xy + 2yz + 2xz$$

Es importante tener presente, durante este curso, las principales propiedades del gradiente de una función escalar, que recordamos en los siguientes teoremas:

Teorema 2.1. Sean f y g dos funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Entonces:

1) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$

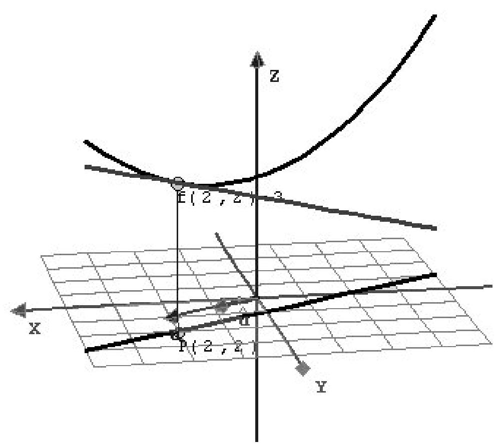
2) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

3) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

4) $\nabla f^n = nf^{n-1}\nabla f$

Teorema 2.2. Sea f una función de dos variables diferenciable en un punto $P(x,y)$:

1) $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\widehat{u}$, donde $\widehat{u}$ es un vector unitario, es la derivada direccional de f en la dirección del vector $\widehat{u}$. Recordar que $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ también se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial \widehat{u}}$.



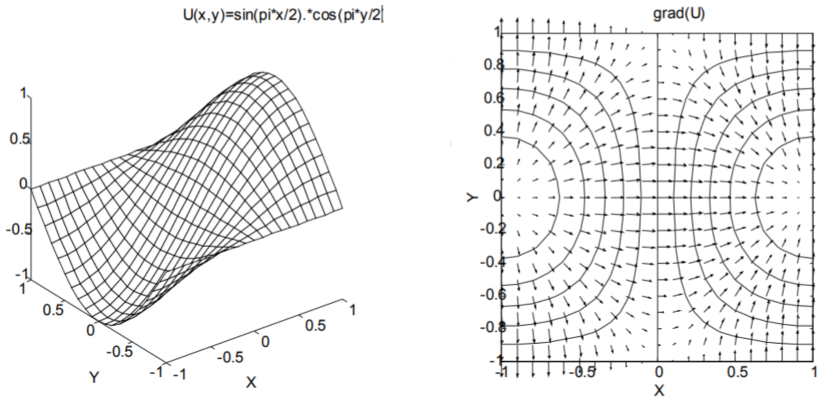
Derivada direccional

2) La tasa de crecimiento máxima de $f(x,y)$ en $P(x,y)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x,y)$.

3) El valor máximo de $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ en $P(x,y)$ es $||\nabla f(x,y)||$.

4) La tasa mínima de crecimiento (o máxima de decrecimiento) de $f(x,y)$ en $P(x,y)$ se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x,y)$.

5) El valor mínimo de $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ en $P(x,y)$ es $-||\nabla f(x,y)||$.



Gradiente de un campo escalar

2.3 Divergencia de un campo vectorial

Sea $\overrightarrow{F}$ *un campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$*, definido por*

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\hat{\imath} + Q(x, y, z)\,\hat{\jmath} + R(x, y, z)\,\widehat{k}$$

con P*,* Q *y* R *campos escalares con derivadas parciales.*
Se llama divergencia* *de* $\overrightarrow{F}$*, anotado* $div(\overrightarrow{F})$*, al campo escalar:*

$$\boxed{div(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Nota 2.1. Si se considera el operador diferencial vectorial†

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\widehat{k},$$

la divergencia de $\overrightarrow{F}$ se puede anotar simbólicamente como el producto punto entre ∇ y $\overrightarrow{F}$, es decir,

$$div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

En efecto:

$$div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Nota 2.2. En realidad el operador ∇, por ser un vector, debería anotarse $\overrightarrow{\nabla}$. Por razones de comodidad, en general, el operador nabla se anota sin la flecha de vector, siempre que este acuerdo no genere confusiones.

* En ingeniería y física, se suele denominar *densidad de flujo del campo vectorial* † Este operador diferencial es conocido con el nombre de *nabla* o *del*.

Ejercicio 2.1. Calcular la divergencia de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \sin(xy)\,\hat{\imath} + \sin(yz)\,\hat{\jmath} + \sin(zx)\,\widehat{k}$

Nota 2.3. No confundir ∇f (vector) con $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ (escalar). $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ es el gradiente del CE f, mientras que $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ corresponde al la divergencia del CV $\overrightarrow{F}$.

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Ley de Gauss para un campo eléctrico

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Ley de Gauss para un campo magnético

Algunas relaciones que involucran a la divergencia, se presentan en el siguiente teorema:

2.4 Algunas propiedades de la divergencia

Teorema 2.3. Sean $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ campos vectoriales y ϕ, ψ campos escalares, entonces

1) $div(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = div(\overrightarrow{F}) + div(\overrightarrow{G})$
2) $div(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\, div(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot grad(\phi)$
3) $div(\nabla\phi \times \nabla\psi) = 0$

2.5 Rotacional de un campo vectorial

Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, definido por

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{\imath} + Q(x,y,z)\,\hat{\jmath} + R(x,y,z)\,\widehat{k}$$

con P, Q y R campos escalares con derivadas parciales.

Se llama *rotor* de $\overrightarrow{F}$, anotado $rot(\overrightarrow{F})$, al campo vectorial:

$$\boxed{rot(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}}$$

Nota 2.4. Si se considera el operador gradiente $\nabla = (\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz})$, el rotor de $\overrightarrow{F}$ se puede anotar simbólicamente como el producto cruz entre ∇ y $\overrightarrow{F}$, es decir,

$$rot(\overrightarrow{F}) = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{dx} & \dfrac{\partial}{dy} & \dfrac{\partial}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

2.5.1 Rotacional para un campo en $\mathbf{R}^2$

Si el campo vectorial está en $\mathbf{R}^2$, digamos que $\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\widehat{\imath} + Q(x, y)\widehat{\jmath}$, podemos pensar $\overrightarrow{F}$ como un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$, pensándolo como $\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\widehat{\imath} + Q(x, y)\widehat{\jmath} + 0\,\widehat{k}$, y en tal caso su rotor viene dado por

$$rot(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$$

así entonces, el rotacional de un campo plano es un vector que apunta en la dirección perpendicular al plano.

Ejercicio 2.2. Calcular el rotor de $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \sin(xy)\widehat{\imath} + \sin(yz)\widehat{\jmath} + \sin(zx\,\widehat{k}$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

Ley de Faraday (conexión entre campo eléctrico y magnético)

2.6 Algunas propiedades del rotacional I

Teorema 2.4. Verificar que si $\overrightarrow{F} = P\widehat{\imath} + Q\widehat{\jmath} + R\,\widehat{k}$, es un CV con $P, Q, R \in C^2$ y $\phi(x, y, z)$ un CE C^2, entonces

1) $div(rot\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) = 0$

2) $rot(\nabla\phi) = \nabla \times (\nabla\phi) = \overrightarrow{0}$

Algunas relaciones que involucran al rotacional, se presentan en el siguiente teorema:

2.7 Algunas propiedades del rotacional II

Teorema 2.5. Sean $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ campos vectoriales y ϕ campo escalar, entonces

1) $rot(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = rot(\overrightarrow{F}) + rot(\overrightarrow{G})$

2) $rot(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\, rot(\overrightarrow{F}) + (\nabla\phi) \times \overrightarrow{F}$

3) $rot(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot rot(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \cdot rot(\overrightarrow{G})$

4) $rot(rot\,\overrightarrow{F}) = grad(div\,\overrightarrow{F}) - \nabla^2\overrightarrow{F}$

Nota 2.5. *Si* $\overrightarrow{F} = P\,\hat{\imath} + Q\,\hat{\jmath} + Q\,\hat{k}$, *entonces*

$$\nabla^2\overrightarrow{F} = (\nabla^2 P)\,\hat{\imath} + (\nabla^2 Q)\,\hat{\jmath} + (\nabla^2 P)\,\hat{k}.$$

Para ver el significado de $\nabla^2 P$, $\nabla^2 Q$, $\nabla^2 R$, *ver Actividad 7.*

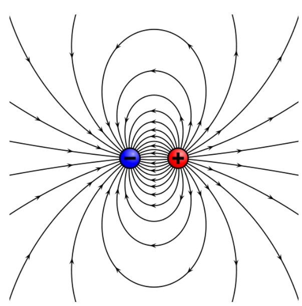
2.8 Interpretación física

2.8.1 Interpretación física de la divergencia

La divergencia de $\overrightarrow{F}$ representa la razón neta de cambio de la masa del fluido que fluye desde un punto por unidad de volumen. En otras palabras la divergencia mide la tendencia de un fluido a *divergir* desde un punto.

- Si la $div(F)(P) < 0$, el campo se está *convergiendo* (comprimiendo, concentrando) en torno al punto P. En este caso, se dice que $\overrightarrow{F}$ tiene un *sumidero* en el punto P.
- Si la $div(F)(P) > 0$, el campo se está *divergiendo* (expandiendo, alejándose) del punto P. En este caso, se dice que $\overrightarrow{F}$ tiene un *manantial* en el punto P.
- Si la $div(F) = 0$, el campo se dice *incompresible*.

Ejemplo 2.2. *Indicar un punto sumidero y un punto manantial en siguiente esquema de una campo eléctrico:*

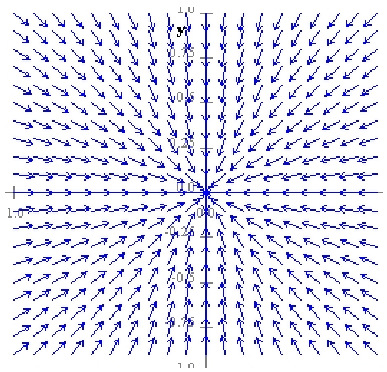


Campo eléctrico con un protón y un electrón

2.8.2 Interpretación física del rotacional

El $rot(\overrightarrow{F})(P)$ representa la tendencia de las partículas cercanas al punto P a rotar en torno al eje que apunta en la dirección del $rot(\overrightarrow{F})(P)$. El vector $rot(\overrightarrow{F})$, apunta en la dirección en la cual el fluido gira más rápido, siendo el valor $||rot(\overrightarrow{F})||$ una medida de la rapidez de esta rotación. Cuando $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$, el fluido se dice *irrotacional*.

Ejemplo 2.3. Si el campo de velocidades $\overrightarrow{F}$ de un fluido tiene el siguiente campo de direcciones



determinar si en origen

1) la divergencia es positiva, negativa o 0

2) una rueda con paletas giraría positivamente (en las dirección de las manecillas de un reloj), negativamente o no giraría.

3) Sabiendo que el campo de vectores corresponden al campo vectorial

$$\overrightarrow{F} = \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\widehat{\imath} - \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\widehat{\jmath},$$

verificar las respuestas anteriores:

a) algebraicamente

b) graficamente, usando CalcPlot3D.

Solución:

1) Como el campo apunta hacia el origen, es razonable pensar que el fluido se acumula en torno al origen. Por lo tanto $div(\overrightarrow{F})(0,0,0)$ debe tener un valor negativo.

2) Como el campo actúa radialmente, la rueda no giraría. Por lo tanto $rot(\overrightarrow{F})(0,0,0) = \overrightarrow{0}$.

3) (a) $div(\overrightarrow{f}) = \frac{3(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{2}{1+x^2+y^2)^{3/2}} + 0 = -2$

$rot(\overrightarrow{F}) = (0-0)\,\widehat{\imath} + (0-0)\,\widehat{\jmath} + (\frac{3yx}{1+x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3xy}{1+x^2+y^2)^{3/2}})\,\widehat{k} = \overrightarrow{0}$

2.9 Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos $\overrightarrow{E}$ y el campo magnético $\overrightarrow{H}$, cuando varían con el tiempo en una región que *no contiene ni carga ni corriente* se pueden formular de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{ll} div(\overrightarrow{E}) = 0 & div(\overrightarrow{H}) = 0 \\[2ex] rot(\overrightarrow{E}) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{H}}{dt} & rot(\overrightarrow{H}) = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{dt} \end{array}}$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío (caso particular)

donde c es la velocidad de la luz. Notar que en este caso, tanto el campo eléctrico, E, como el magnético, H, dependen, aparte de su posición espacial, (x, y, z), también del tiempo t. Así entonces:

$$E = E_1(x, y, z, t)\,\widehat{\imath} + E_2(x, y, z, t)\,\widehat{\jmath} + E_3(x, y, z, t)\,\widehat{k}$$

$$H = H_1(x, y, z, t)\,\widehat{\imath} + H_2(x, y, z, t)\,\widehat{\jmath} + H_3(x, y, z, t)\,\widehat{k}$$

donde las funciones componente son C^2. Por esta razón estos campos se llaman *campos variables*. Luego, para cada $t \in \mathbb{R}$, E y H son campos vectoriales en el espacio. Con estas ecuaciones se puede verificar que:

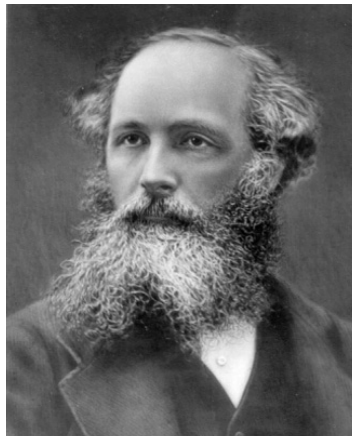
1) $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{dt^2}$

2) $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{H}}{dt^2}$

3) $\nabla^2(\overrightarrow{E}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{dt^2}$

4) $\nabla^2(\overrightarrow{H}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{H}}{dt^2}$

Nota: En la sección 4 de esta unidad, se revisará el significado de $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{dt}$



James Clerk Maxwell
Matemático escocés (1831-1879)

2.10 Un operador de segundo orden: el laplaciano

Todos los operadores diferenciales revisados: Gradiente, Divergencia y Rotacional, entregan como resultado nuevamente un campo escalar o vectorial:

Operador diferencial	se aplica a un campo:	da por resultado un campo:
Gradiente	Escalar	Vectorial
Divergencia	Vectorial	Escalar
Rotacional	Vectorial	Vectorial

Por lo tanto, luego al resultado de aplicar un operador de primer orden, se le puede aplicar nuevamente uno de estos operadores. Por ejemplo:

- **Divergencia y rotacional del gradiente**. Como el gradiente de ϕ ($\nabla\phi$), ϕ campo escalar, es un campo vectorial, se le puede calcular su divergencia, obteniendo un campo vectorial: $\nabla \cdot \nabla\phi$. Así como también se puede calcular su rotacional, obteniendo: $\nabla \times \nabla\phi$.

- **Gradiente de la divergencia**: Como la divergencia de $\overrightarrow{F}$ ($\nabla \cdot \overrightarrow{F}$), $\overrightarrow{F}$ campo vectorial, es un campo escalar, se le puede calcular su gradiente obteniendo el campo escalar $\nabla(\nabla \cdot \phi)$.

- ¿Qué otros operadores de segundo orden se pueden plantear?

Ahora bien, en este punto nos vamos a detener en el operador (2): Gradiente de la divergencia, el cual recibe el nombre de *laplaciano*.

Definición 2.1. Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar. El laplaciano de f de anota y define por:

$$\triangle f = \nabla^2 f = \nabla(\nabla \cdot f) \tag{2.1}$$

Teorema 2.6. Verificar que el laplaciano de f viene dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Nota 2.6. Una función escalar se dice *armónica* cuando satisface la ecuación

$$\nabla^2 f = 0$$

Ejemplo 2.4. Decidir si la función $\phi(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ es o no armónica

Desarrollo: Es claro que

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-y^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-z^2) = 0$$

Por lo tanto, ϕ es una función armónica.

Ejemplo 2.5. Sea f una función armónica C^2. Verificar que

$$\nabla \cdot f\, \nabla f = ||\nabla f||^2$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot f\, \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot f \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \\
&= f\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)}_{f \text{ es armonica}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \\
&= f \cdot 0 + ||\nabla f||^2 \\
&= ||\nabla f||^2
\end{aligned}$$

2.11 Teorema fundamental del cálculo vectorial (Teorema de Helmholtz)

Cerramos esta sección sobre la divergencia y rotacional de un campo vectorial, con el *teorema de Helmholtz* o también llamado *Teorema Fundamental del Calculo Vectorial*. Este teorema establece que, *en general*, un campo vectorial está completamente determinado cuando se conoce su divergencia y su rotacional. En efecto:

Teorema 2.7. Sean $\overrightarrow{C}$ un campo vectorial y $\overrightarrow{D}$ un campo escalar, ambos suficientemente suaves (por ejemplo, C^{∞}) y que convergen a 0 más rápido que $\frac{1}{r^2}$, cuando r va al infinito, entonces

1) existe un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ tal que $\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \overrightarrow{D}$ y $\nabla \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{C}$

2) $\overrightarrow{F}$ es único, siempre que $\overrightarrow{F}$ converja a 0, cuando r va al $+\infty$

2.12 Actividades Sección 2

1) Calcular la divergencia y el rotor de los siguientes CV:

   a) $\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = x^2\,\hat{\imath} + y^2\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$ b) $\overrightarrow{F_2}(x,y) = \sin x\,\hat{\imath} - \sin y\,\hat{\jmath}$

2) a) Verificar que el rotor y la divergencia del siguiente campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\hat{\jmath}$$

   son siempre nulos.

   b) Dibujar un campo de vectores de este campo vectorial y tomando como referencia este dibujo, analizar los resultados obtenidos en (a).

3) Sean f un CE y $\overrightarrow{F}$ un CV, determinar cual(es) de las siguientes expresiones tienen sentido. Justificar su respuesta.

   a) $rot(f)$, b) $rot(grad(f))$ c) $div(div(f))$ d) $div(div(\overrightarrow{F}))$ e) $rot(rot(\overrightarrow{F}))$

4) Encontrar un campo vectorial cuya divergencia sea:

   a) 1 b) x^2y c) $\sqrt{x^2+z^2}$

5) Sea $\overrightarrow{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y $r = ||\overrightarrow{r}||$, verificar que:

   a) $\nabla \cdot \overrightarrow{r} = 3$ b) $\nabla \cdot (r\,\overrightarrow{r}) = 4r$ c*) $\nabla^2 r^3 = 12r$

6) Con las mismas notaciones del ejercicio precedente, comprobar que

   a) $\nabla r = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$ b) $\nabla \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ c) $\nabla(1/r) = -\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$

7) Sea $\overrightarrow{\omega}$ un vector constante. Verificar que si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, entonces $rot(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{\omega}$.

   Hint: Recordar que $\overrightarrow{r} = (x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

8) La intensidad de campo electrostático $\overrightarrow{E}$ puede derivarse como el gradiente negativo de un potencial eléctrico escalar V, es decir, $\overrightarrow{E} = -\nabla V$. Determinar $\overrightarrow{E}$ en el punto $(1,1,0)$ si $V = V_0 e^{-x}\sin(\frac{\pi y}{4})$. **Resp.**: $\frac{V_0}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} - \frac{\pi}{4}\,\hat{\jmath})$

9) Estudiar cuáles de las siguientes funciones son armónicas:

   a) $f(x,y,z) = \dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$

   b) $g(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$

   c) $h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

* Mirar ejercicio 7

Pierre Simon Laplace
Matemático Francés (1749-1827)

10) Verificar que si $f(x,y,z)$ es armónica, también lo es la función

$$\frac{1}{r} f\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right),$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

11) Considerar el campo vectorial

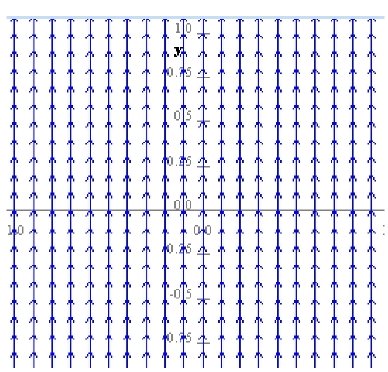
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{\overrightarrow{r}}{r^p}$$

con $\overrightarrow{r} = x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}$ y $r = ||\overrightarrow{r}||$.

a) Calcular $div(\overrightarrow{F})$.

b) Determinar los valores de p para los cuales $div(\overrightarrow{F}) = 0$.

12) Si el campo de velocidades $\overrightarrow{F}$ de un fluído tiene el siguiente campo de direcciones

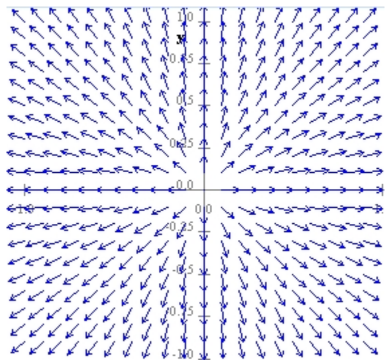


determinar si en origen

a) la divergencia es positiva, negativa o 0

b) una rueda con paletas giraría positivamente (en las dirección de las manecillas de un reloj), negativamente o no giraría

c) Los mismo si el campo de vectores es



13) Un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ se dice radial, cuando tiene la forma

$$\overrightarrow{F}(r) = \phi(r)\overrightarrow{r}$$

donde ϕ es una función derivable, $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, y $r = ||\overrightarrow{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Verificar que:

a) $grad(\overrightarrow{F}) = \dfrac{\phi'(r)}{r}\overrightarrow{r}$

b) $div(\overrightarrow{F}) = r\phi'(r) + 3\phi(r)$

c) $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$

14) Con respecto al campo $\overrightarrow{F} = yz\,\widehat{\imath} + zx\,\widehat{\jmath} + xy\,\widehat{k}$:

a) Verificar que la divergencia y rotor de $\overrightarrow{F}$ son nulos.

b) Buscar un campo vectorial, distinto de $\overrightarrow{F}$, cuya divergencia y rotor también sean nulos.

c) Los resultados anteriores, ¿contradicen el Teorema de Helmholtz?. Explicar.

15) Las Ecuaciones de Maxwell establecen los valores de la divergencia y rotor del campo eléctrico. De acuerdo al teorema de Helmholtz, ¿estas ecuaciones permiten determinan unívocamente el campo eléctrico?.

Referencias:
Coordenadas polares. Depto. Física aplicada. U. de Sevilla
Campos escalares y vectoriales. Prof. Roque Molina Legaz
Gradiente, Divergente, Laplaciano y Rotacional en Coordenadas Cilíndricas.. Math D. LG