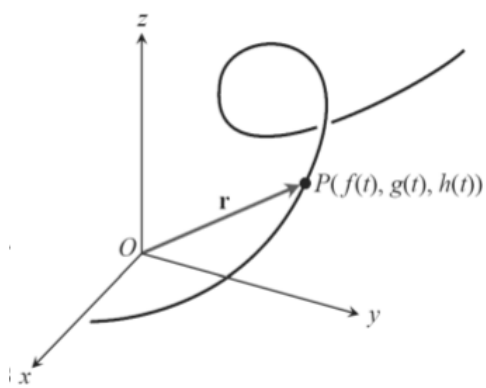
SECCIÓN 3

Funciones vectoriales y curvas



3.1 Introducción

En los cursos previos de cálculo, se han estudiado los fundamentos y aplicaciones de los siguientes tipos funciones:

- Cálculo I y II: Funciones de una variable real y de valor real:
$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\rightsquigarrow y = f(x) \end{aligned}$$
estudiando sus gráficos, límites, continuidad, derivadas e integrales.

- Cálculo III: Funciones de varias variables reales y de valor real:
$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow z = f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$$

estudiando también sus gráficos, límites, continuidad, derivadas parciales, derivadas direccionales e integrales múltiples. En este caso, por razones de carácter práctico, se trabaja especialmente para $n = 2$ y $n = 3$

En esta sesión se estudian la funciones de una variable real y de valor vectorial. Estas funciones tienen como dominio un subconjunto de $\mathbb{R}$, generalmente un intervalo, y codominio $\mathbb{R}^n$. En este curso trabajamos en el espacio $n = 3$, y en el plano ($n = 2$). Estas funciones se denominan *funciones vectoriales*. Como veremos el recorrido de estas funciones es una *curva* en el espacio o en plano. Por esta razón en la primera unidad de este curso, estudiamos las funciones vectoriales y curvas en el espacio.

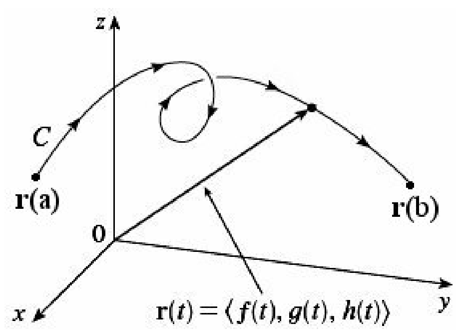
3.2 Funciones vectoriales y curvas

Informalmente se denomina *curva* a la traza de una partícula que se mueve en el plano o el espacio. De este modo una función vectorial indica, en general, la posición de la partícula en función del tiempo t transcurrido desde su partida.

Formalmente, se llama *curva en el espacio* al gráfico de una función

$$\boxed{\overrightarrow{r}(t) = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\widehat{k} = \langle f(t),\, g(t),\, h(t)\rangle} \tag{3.1}$$

donde f, g y h son funciones reales (escalares) definidas en todo $\mathbb{R}$ o un intervalo $I = [a, b]$.



Curva en el espacio

Nota 3.1.

- Como ya se dijo, una función del tipo recién definido ($\overrightarrow{r}$) recibe el nombre de *función vectorial*. Así entonces una función vectorial $\overrightarrow{r}$ es una función:

$$\overrightarrow{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow \overrightarrow{r}(t) = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\widehat{k}$$

  y en tal caso, la curva asociada C es el *recorrido* o *imagen* de $\overrightarrow{r}$, es decir,

$$C = \{(f(t),\, g(t),\, h(t)) \in \mathbb{R}^3 \,/\, t \in [a, b]\}$$

- Las funciones f, g y h se llaman *funciones componentes* de $\overrightarrow{r}$.

- En el caso que $g = 0$, la función $\overrightarrow{r}$ queda:

$$\overrightarrow{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} = \langle f(t),\, g(t)\rangle \tag{3.2}$$

  y en tal caso la curva asociada (su gráfico) es una curva en el plano $\mathbb{R}^2$.

- Es frecuente presentar las funciones componentes de una función vectorial mediante las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t); \qquad a \leq t \leq b$$

  o bien

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

  llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva asociada. Además, a la ecuación (3.1) se le llama *una parametrización* de la curva correspondiente y la variable t *parámetro*.

- Cuando el dominio es un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se dice que la curva C tiene un *punto inicial o de partida* $A = \overrightarrow{r}(a) = (f(a), g(a), h(a))$, que es el punto extremo del vector $\overrightarrow{r}(a)$ y un *punto final o de llegada* $B = \overrightarrow{r}(b) = (f(b), g(b), h(b))$, que es el punto extremo del vector $\overrightarrow{r}(b)$.

- En lugar de *curva*, a veces se habla de *camino* o *trayectoria*.

- Si no se entrega el dominio de $\overrightarrow{r}$, se aplica la *regla del máximo dominio*, que indica que en ese caso, el dominio será:

$$D = dom(f) \cap dom(g) \cap dom(h)$$

- Como es de suponer, el parámetro no siempre representa el tiempo y se puede usar otra letra en lugar de t. Más adelante se verá que un parámetro de gran interés es el que representa la longitud de la porción de curva recorrida desde su inicio. Este parámetro recibe el nombre de *longitud de arco* y se designa con la letra s.

- En general se extiende el concepto de función vectorial a funciones de $D \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, para n un número natural mayor o igual a 2. En este curso se trabaja esencialmente con curvas en el plano ($n = 2$) y el espacio ($n = 3$).

Nota 3.2. Como una función vectorial (3.1) es una *función*, ella tiene asociado naturalmente los conceptos de dominio, codominio, rango o recorrido, imagen, pre-imagen, etc.

3.3 Gráfica de funciones vectoriales

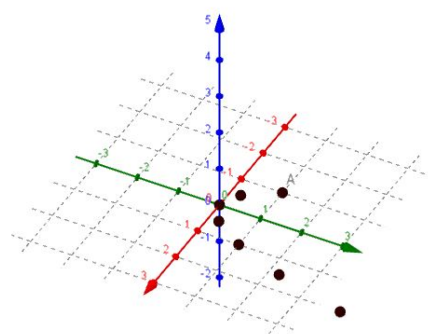
3.3.1 Usando tabla de valores

Aquí se sigue el mismo método que usábamos en Cálculo I para graficar funciones del tipo $y = f(x)$. A modo de ejemplo, graficar la función vectorial $\overrightarrow{u}(t) = \langle t, t^2, 0\rangle$, con $-1 \leq t \leq 2$

Paso 1 Completar una tabla del tipo:

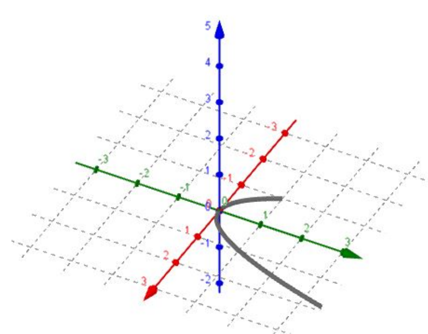
t	$x(t) = t$	$y(t) = t^2$	$z(t) = 0$	$(x(t), y(t), z(t))$
-1				
-0.5				
0				
0.5				
1				
1.5				
2				

Paso 2 Graficar en un sistema coordenado de $\mathbb{R}^3$ todos los puntos $(x(t), y(t), z(t))$



Gráfica de puntos

Paso 3 Unir con una curva *suave* los puntos graficados en el paso precedente. Se obtiene un gráfico del tipo:



Gráfica de puntos

Ejercicio 3.1. Usando este método graficar la curva

$$\overrightarrow{r}(t) = \langle t^2, -t, 0\rangle; \quad t \geq 0.$$

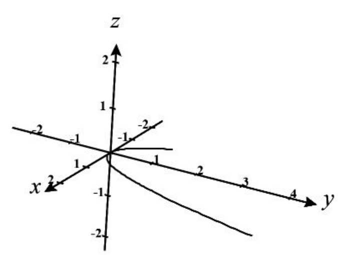
Nota 3.3. Como es de suponer este método no es muy efectivo. Por esta razón, en general, al momento de graficar una función vectorial se usan recursos tecnológicos.

3.3.2 Usando tecnología

a) Usando Geogebra. Los gráficos mostrados en la sección precedente, fueron realizados con el software Geogebra.

- En el Paso 2, se usó el comando: **Secuencia**$(u(t), t, -1, 2, 0.5)$
- En el Paso 3, se usó el comando: **Curva**$(t, t^2, 0, t, -1, 2)$

b) Usando CalcPlot3D. A esta aplicación online se accede desde CalcPlot3D



Gráfica obtenida en CalcPlot3D

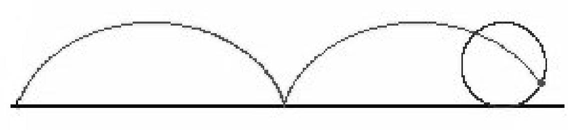
Ejercicio 3.2. *Usando GeoGebra y CalcPlot3D, graficar las curvas:*

1) $\overrightarrow{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \sin(5t)\rangle; \quad t \in \mathbb{R}.$

2) $\overrightarrow{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t}\rangle$

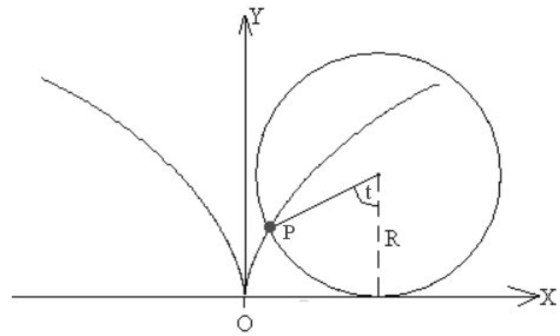
3.4 Un primer ejemplo: la cicloide

La cicloide es una curva generada por un punto perteneciente a una circunferencia al rodar sobre una línea recta, sin que la circunferencia se deslice.



Cicloide

Actividad: Siendo el eje X donde gira la circunferencia, cuyo radio es R. Usando el siguiente esquema,



deducir que las coordenadas del punto P vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = f(t) = R(t - \sin t) \\ y = g(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide. O bien, la cicloide es la curva que corresponde la recorrido de la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = \langle R(t - \sin t),\, R(1 - \cos t)\rangle = R(t - \sin t)\hat{\imath} + R(1 - \cos t)\hat{\jmath}$$

3.5 Operaciones entre funciones vectoriales

Las operaciones entre funciones vectoriales se definen, si las funciones toman valores en el mismo espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o $n = 3$).

Sean $\vec{r}_1(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$ y $\vec{r}_2(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t)\rangle$, entonces se define:

- La suma de dos funciones vectoriales es una función vectorial:
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = \langle f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), f_3(t) + g_3(t)\rangle$$
- La multiplicación de una función vectorial $\vec{r}_1(t)$ por un escalar c es una función vectorial:
$$\vec{r}(t) = c\vec{r}_1(t) = \langle cf_1(t), cf_2(t), cf_3(t)\rangle$$
- La multiplicación de una función vectorial $\vec{r}_1(t)$ por una función real $f(t)$ es una función vectorial:
$$f(t)\vec{r}_1(t) = \langle f(t)f_1(t), f(t)f_2(t), f(t)f_3(t)\rangle$$
- El producto escalar, o producto punto, de dos funciones vectoriales $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$ es una función real:
$$r(t) = \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)$$
- El producto vectorial, o producto cruz, de dos funciones vectoriales $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$ se define de manera análoga.

3.6 Parametrizaciones: Ejemplos claves

3.6.1 Curva en el plano de ecuación $y = f(x)$

Si C el gráfico de la función $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$, una parametrización *trivial* de C es

$$C: \ \overrightarrow{r}(t) = t\,\hat{\imath} + f(t)\,\hat{\jmath}, \quad a \leq t \leq b$$

Ejercicio 3.3. Encontrar una parametrización para cada una de las siguientes funciones reales:

1) $y = 3x^2 - x + 1$, con $-1 \leq x \leq 2$

2) $2x + 3y = 6$, con $0 \leq y \leq 5$

3) $y^2 = x^3$, con $-1 \leq y \leq 8$

3.6.2 Recta y segmento en espacio

La curva en el espacio, correspondiente a la recta que pasa los puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ viene dada por la función vectorial:

$$\overrightarrow{s}(t) = \langle a_1 + (b_1 - a_1)t, a_2 + (b_2 - a_2)t, a_3 + (b_3 - a_3)t \rangle; \quad \text{con t} \in \mathbb{R}$$

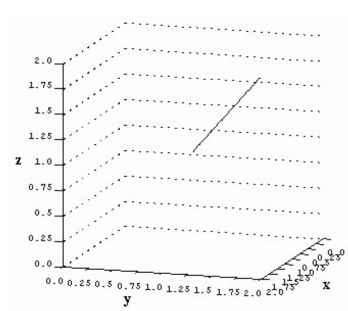
Notar que esta función vectorial también se puede anotar:

$$\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A})t, \quad \text{con t} \in \mathbb{R}$$

Así, por ejemplo, la recta, S, que pasa los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 3, 4)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 3t; \qquad t \in \mathbb{R}$$

y su gráfico es:



Recta (parcial) en el espacio

Observar que cuando t varía entre 0 y 1, los puntos de la recta varían desde el punto $(1, 1, 1)$ al punto $(2, 3, 4)$. Así entonces, ¿cuál es la ecuación paramétrica del segmento que une los puntos A y B?.

Ejercicio 3.4. Determinar las ecuaciones paramétricas y esbozar las siguientes curvas:

a) recta en el espacio, que pasa los puntos $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$.

b) recta en el plano, que une los puntos (a, b) y (c, d).

c) segmento en el espacio que une el origen con el punto $(1, -3, 3)$

d) segmento en el espacio que une el punto

   i) A con el punto B

   ii) B con el punto A

   donde $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$

Ejercicio 3.5. Escribir la ecuación vectorial de la recta que pasa por un punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

3.6.3 Circunferencia en un plano

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia en el plano, con centro $(0, 0)$ y radio r son:

$$x = r\cos(t), \quad y = r\sin(t); \qquad t \in [0, 2\pi[$$

Ejercicio 3.6. Determinar las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio 3. En general, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio r y centrada en el punto (x_0, y_0)?

Ejercicio 3.7. ¿A qué curva corresponde la función vectorial

$$\overrightarrow{r}(t) = \langle \cos(t), b\sin(t), 3 \rangle; \quad t \in [0, \pi]?$$

Nota 3.4. Observar que una circunferencia en el espacio se puede presentar de varias maneras. Por ejemplo, la circunferencia en el plano XY con centro en el origen y radio a, puede ser *mirada* como la intersección del plano $z = 0$ con:

a) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

b) el paraboloide $x^2 + y^2 - z = a^2$.

c) el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

3.6.4 Hélice

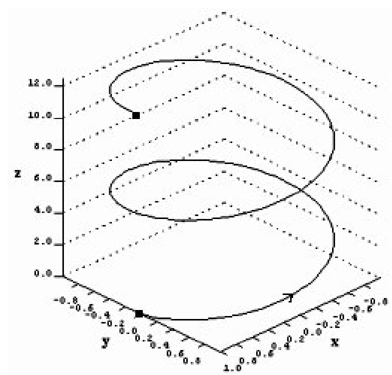
Considerando la curva en el espacio con ecuación vectorial

$$\overrightarrow{h}(t) = \cos(t)\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + t\,\overrightarrow{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

o sus equivalentes ecuaciones paramétricas

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = t; \qquad t \in [0, 4\pi]$$

corresponde a una curva que *parte del punto* $(1, 0, 0)$ (cuando $t = 0$), y que a medida que t crece, los puntos correspondientes de la curva van *subiendo*, pero siempre sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



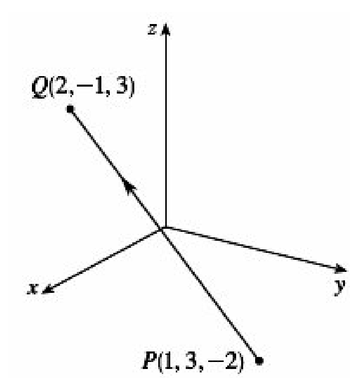
Hélice circular

3.7 Actividades Sección 3

1) Determinar las ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas. Hacer un esbozo de cada una de ellas e indicar la dirección en que la curva es descrita cuando el parámetro crece en su correspondiente intervalo.

   a) $x = 1 + t,\ y = 4 - 2t, \quad t \in [-2, 4]$
   b) $x = 1 + t^2,\ y = 4 - 2t, \quad t \in [0, 2]$
   c) $x = \sqrt{1 + t},\ y = t - 1, \quad t \in [3, 6]$
   d) $x = \sec t,\ y = 2 \tan t, \quad t \in [0, 2\pi]$
   e) $x = 2 + t,\ y = t - 2,\ z = 2 - t, \quad t \in [-2, 2]$
   f) $x = t,\ y = t^2,\ z = 2, \quad t \in [-1, 1]$
   g) $x = 2\cos(t),\ y = -1,\ z = 3\sin(t), \quad t \in [0,\ 2\pi]$
   h) $x = 2 + \cos(t),\ y = -1 + 2\sin(t),\ z = 3, \quad t \in [0,\ \pi]$

2) Determinar las ecuaciones correspondiente al siguiente segmento de recta en el espacio. Poner atención a la dirección indicada.



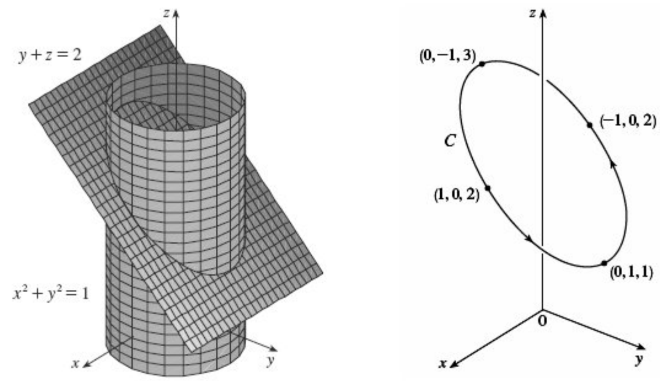
Segmento de recta

3) a) Obtener el gráfico de la curva con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = (1 + \cos(16t))\cos(t)$$
$$y = (1 + \cos(16t))\sin(t)$$
$$z = 1 + \cos(16t)$$

   b) Explicar la apariencia del gráfico mostrando que esta curva *descansa* en un cono.

4) Encontrar ecuaciones paramétricas para la curva C correspondiente a la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.



C: intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$

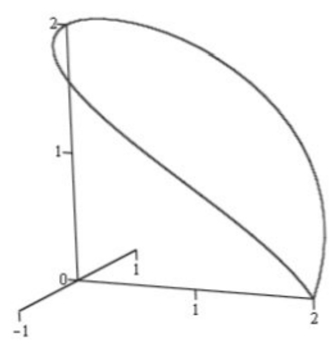
5) **Curva de Viviani**. Es la curva intersección de una semiesfera con un cilindro de eje paralelo a un diámetro de la esfera. Por ejemplo, consideremos la semiesfera de centro el origen de coordenadas y radio 2:

$$x^2 + z^2 + y^2 = 4$$

y el cilindro:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

La curva de Viviani es la siguiente:



Curva de Viviani

Buscar una representación paramétrica de esta curva.

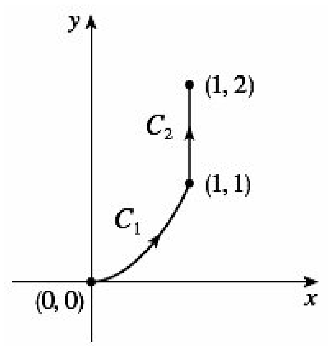
Resp.: $x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2\sin(\frac{t}{2}), \quad t \in [0, 2\pi]$.

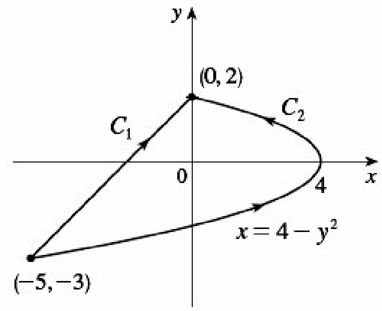
6) Encontrar la función vectorial que representa la curva de intersección de las superficies:

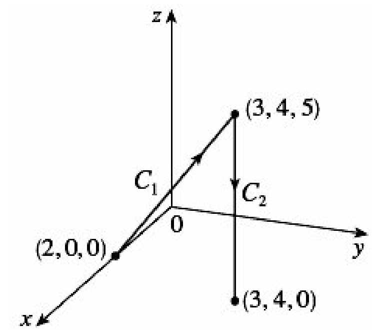
- el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, t
- el plano $z = 1 + y$

Resp.: $\overrightarrow{r}(t) = \langle t,\, \frac{t^2-1}{2},\, \frac{t^2+1}{2} \rangle$

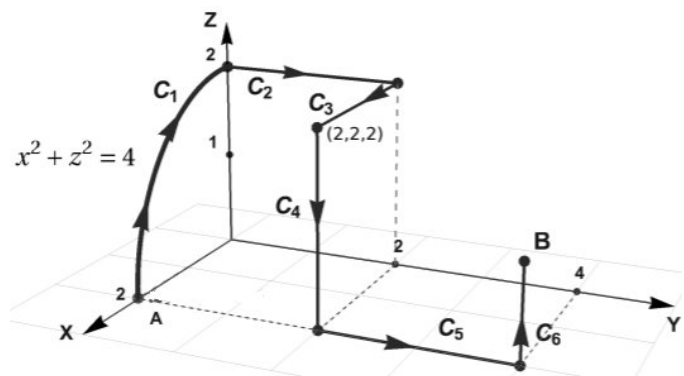
7) Es frecuente que una curva C no sea suave, pero que corresponda a la *concatenación* de ciertas curvas suaves, digamos C_1 y C_2. En este caso se anota $C = C_1 + C_2$. Para las siguientes curvas encontrar sus ecuaciones paramétricas.







8) Considerar la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6$. La curva parte en el punto $(2, 0, 0)$ y termina en $(2, 4, 1)$. La curva C_1 es la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$. El resto de las curvas son segmentos de recta. Determinar una parametrización la curva C.



Curva definida por tramos

Resp.: $C_1 : \overrightarrow{r}_1(t) = \langle 2\cos t, 0, 2\sin t\rangle; t \in [0, \pi/2]$, $C_2 : \overrightarrow{r}_2(t) = \langle 0, t, 2\rangle; t \in [0, 2]$, $C_3 : \overrightarrow{r}_3(t) = \langle t, 2, 2\rangle; t \in [0, 2]$, $-C_4 : \overrightarrow{r}_4(t) = \langle 2, 2, t\rangle; t \in [0, 2]$, $C_5 : \overrightarrow{r}_5(t) = \langle 2, t, 0\rangle; t \in [2, 4]$, $C_6 : \overrightarrow{r}_6(t) = \langle 2, 4, t\rangle; t \in [0, 1]$

9) Considerar las curvas

$$C_1 : \ \overrightarrow{r_1}(t) = t\,\overrightarrow{i} + (1-t)\,\overrightarrow{j} + (3+t^2)\,\overrightarrow{k}$$
$$C_2 : \ \overrightarrow{r_2}(s) = (3-s)\,\overrightarrow{i} + (s-2)\,\overrightarrow{j} + s^2\,\overrightarrow{k}$$

Determinar, en caso que existan, el (o los) punto(s) en los cuales se intersectan C_1 y C_2.

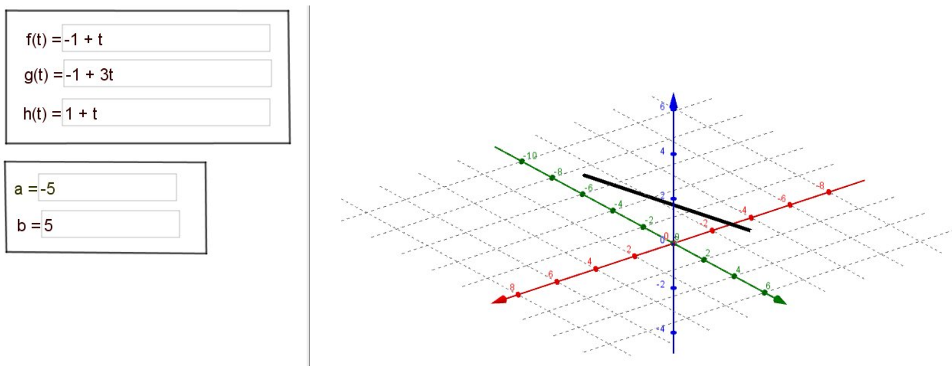
10) Decidir si la curva

$$\overrightarrow{r}(t) = (1+t)\,\hat{\imath} + (1+t^2)\,\hat{\jmath} + (1+2t-t^2)\,\hat{k}$$

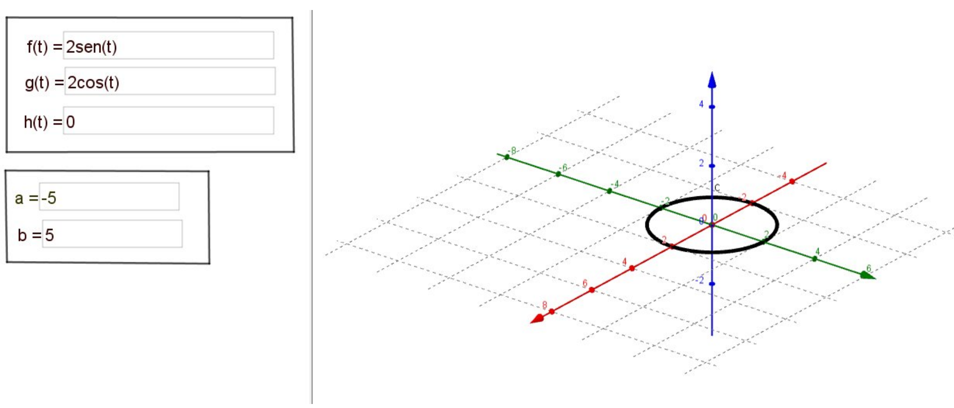
es plana, es decir si esta completamente contenida en un plano, y en caso afirmativo, encontrar el plano que la contiene.

3.8 APÉNDICE: Ecuaciones paramétricas de algunas curvas

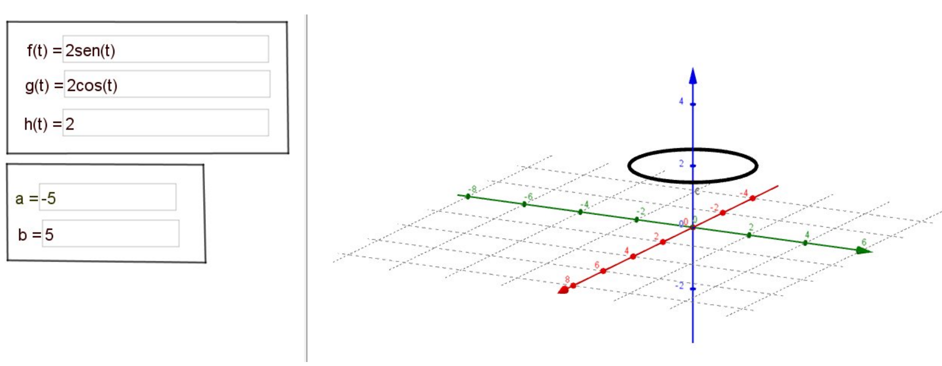
1) Recta*



2) Circunferencia

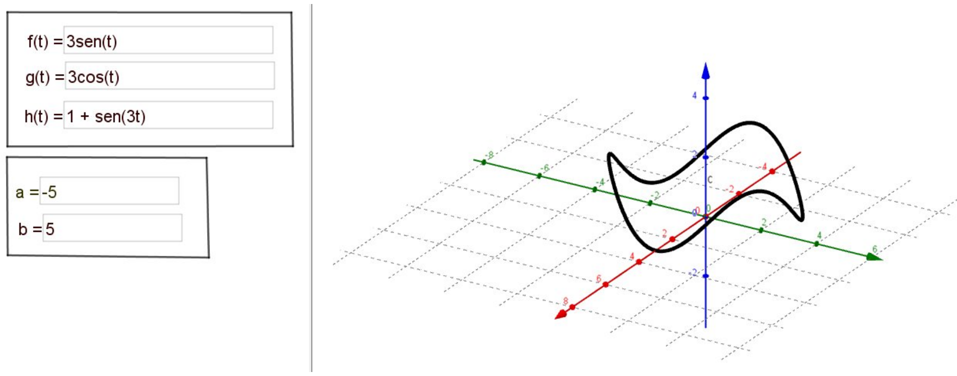


3) Una circunferencia en el espacio

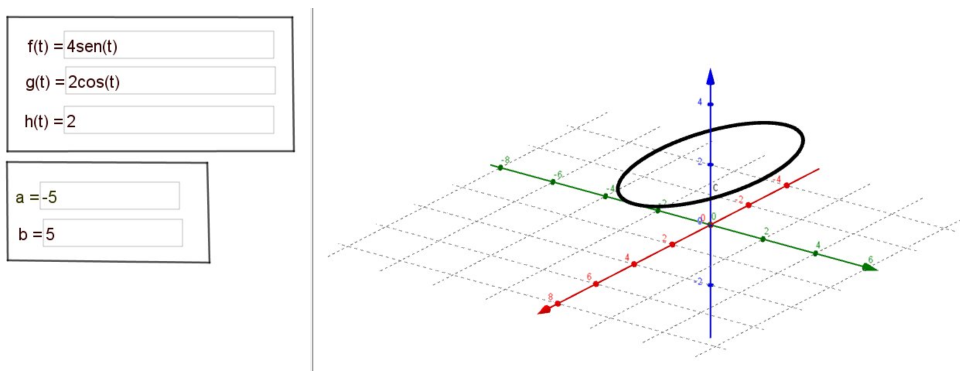


* Los siguientes gráficos se realizaron en GeoGebra.

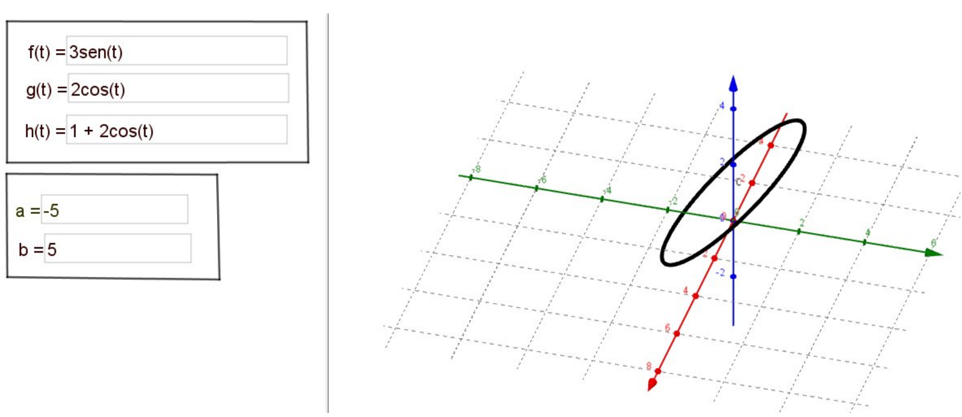
4) Una circunferencia *ondulada*



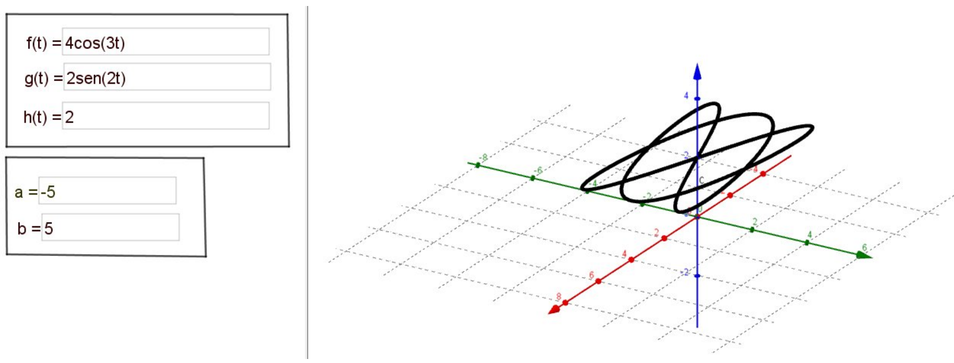
5) Elipse



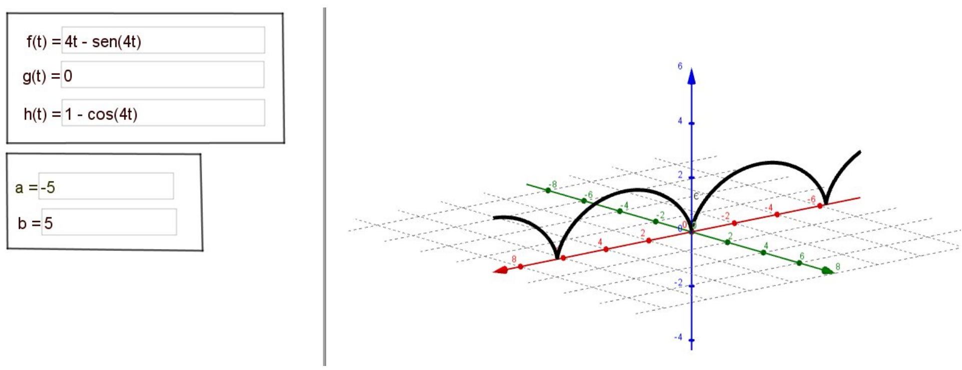
6) Una elipse *inclinada*



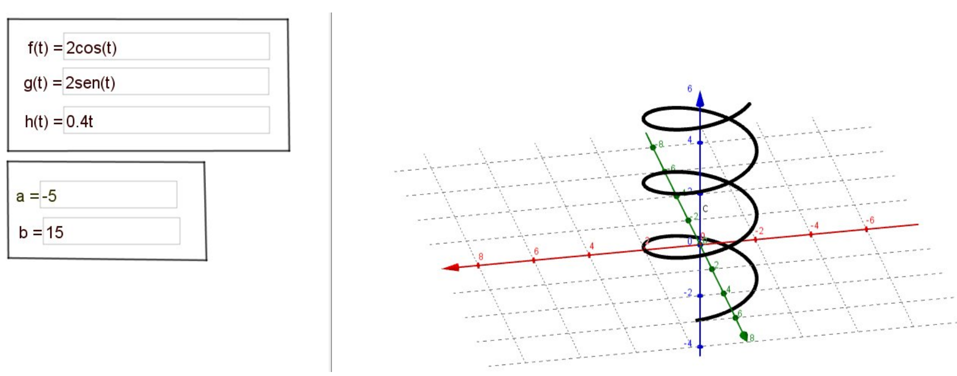
7) Lissajous



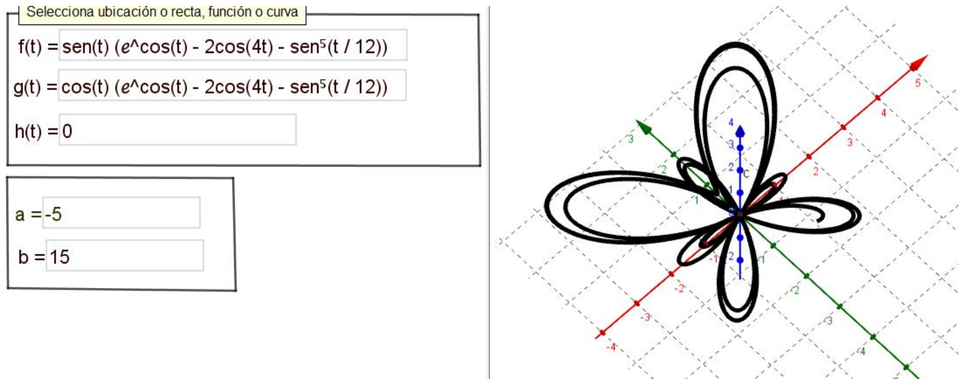
8) Cicloide



9) Hélice



10) Mariposa


Selecciona ubicación o recta, función o curva
f(t) = sen(t) (e^cos(t) - 2cos(4t) - sen⁵(t / 12))
g(t) = cos(t) (e^cos(t) - 2cos(4t) - sen⁵(t / 12))
h(t) = 0
a = -5
b = 15