SECCIÓN 5

Aplicación: Leyes de Kêpler

Tycho Brahe
Sueco (1546-1601)

Johannes Kepler
Alemán (1571-1630)

Isaac Newton
Inglés (1643-1727)

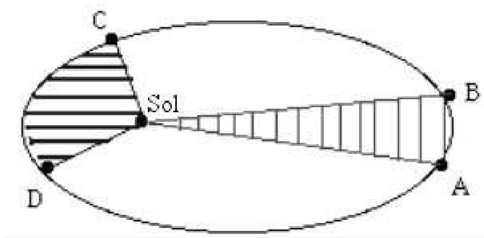
5.1 Introducción

En esta sección revisamos una importante aplicación de las funciones vectoriales: Deducción de las 3 leyes de Kepler a partir de 2 leyes de Newton: Segunda ley de movimiento y Ley de gravitación universal.

5.2 Leyes de Kepler

Primera ley (1609): Los planetas se mueven alrededor del Sol en elipses, con el Sol en uno focos.

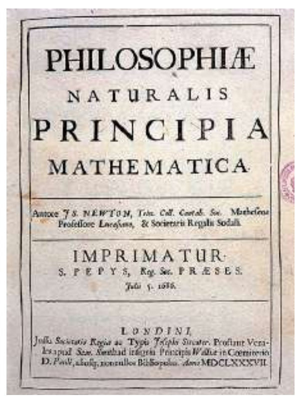
Segunda ley (1609): La línea que conecta el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto implica que la velocidad de los planetas alrededor del Sol no es constante, esta aumenta cuando los planetas se acercan al Sol y disminuye cuando se alejan.



$t_{AB} = t_{CD}$

Tercera ley (1618): El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo del semi-eje mayor de su órbita.

5.3 Leyes de Newton



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

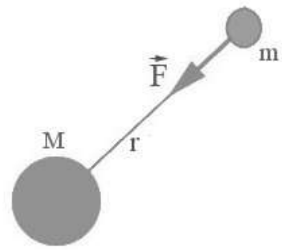
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Coemiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Principia Mathematica

Isaac Newton en su libro *Principia Mathematica*, de 1687 demuestra las 3 leyes de Kepler a partir de 2 de sus propias leyes:

- **Segunda ley de movimiento**:
$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{5.1}$$
es decir, la fuerza es proporcional a la aceleración que adquiere un cuerpo al moverse, y la masa es justamente la constante de proporcionalidad.

- **Ley de la gravitación**:
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$
es decir, la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.



La versión vectorial de esta ley, que es como la usaremos a continuación, viene dada por:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^3}\overrightarrow{r} = -\frac{GMm}{r^2}\widehat{r} \tag{5.2}$$

donde, en nuestro caso:

* $\overrightarrow{F}$ es la fuerza de gravitación de un planeta
* M y m son las masas del sol y del planeta, respectivamente. $M = 1.99 \cdot 10^{30} kg$.
* G es la fuerza de gravitación universal. $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \overrightarrow{N} m^2/kg^2$
* $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\widehat{\imath} + y(t)\widehat{\jmath} + z(t)\widehat{k}$ es la posición en planeta en el instante t.
* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}' = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\widehat{\imath} + y'(t)\widehat{\jmath} + z'(t)\widehat{k}$ es la velocidad en planeta en el instante t. $||\overrightarrow{v}||$ es la rapidez del planeta en el instante t.
* $\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{v}'(t) = \overrightarrow{r}''(t)$ es la aceleración del planeta en el instante t.
* $r = ||\overrightarrow{r}||$, $\widehat{u} = \widehat{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$

Nota: Para la demostración trabajaremos en las coordenadas usuales del espacio, $\mathbb{R}^3$, con el sol en el origen. La función posición del planeta la designaremos con la función vectorial $\overrightarrow{r}(t)$.

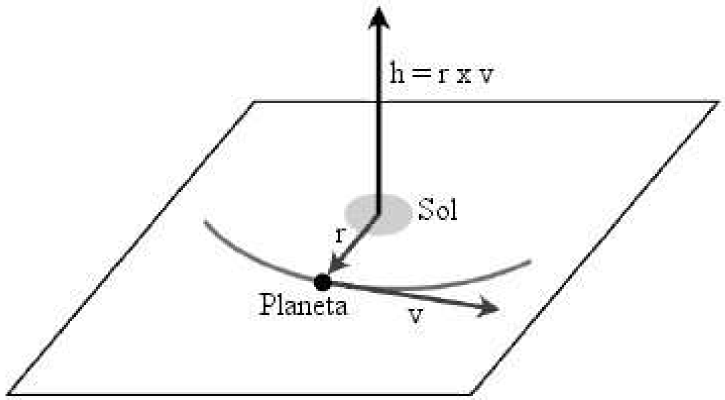
5.4 Demostración de la primera ley de Kepler

Esta demostración consta de 2 partes:

Parte 1: Se prueba que la órbita de cada planeta se encuentra en un plano.

Parte 2: Se prueba que la órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos.

5.4.1 Parte 1: La órbita de cada planeta se encuentra en un plano.



De (5.1) (5.2) se tiene que:

$$m\overrightarrow{a} = -\frac{GMm}{r^2}\widehat{r}$$

de donde,

$$\overrightarrow{a} = -\frac{GM}{r^3}\overrightarrow{r} \tag{5.3}$$

esta relación dice que que los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{r}$son paralelos, luego

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \tag{5.4}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}' \\ &= \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} \\ &= \quad \overrightarrow{0} \quad + \quad \overrightarrow{0} \\ &= \qquad \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Luego, el vector $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$ es constante. Llamemos a este vector $\overrightarrow{h}$. Como, para todo valor de t, $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{h} = 0$, se tiene que el vector posición del planeta, $\overrightarrow{r}(t)$, es siempre perpendicular al vector $\overrightarrow{h}$. Por lo tanto, el vector posición $\overrightarrow{r}(t)$ siempre se encuentra en el plano que pasa por el origen (Sol) y que es perpendicular a $\overrightarrow{h}$. ■

5.4.2 Parte 2: La órbita de cada planeta es una elipse, con el sol en uno de sus focos

Recuerdo: En esta demostración se trabaja la ecuación de la elipse en coordenadas polares. Por esta razón, se recuerda que la ecuación de la elipse en coordenadas polares es

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$$

cuando su eje está el eje X y $0 < e < 1$.

Para la demostración de esta parte, se sigue la siguiente secuencia de pasos:

Paso 1: $\overrightarrow{h} = r^2(\widehat{u} \times \widehat{u}')$, donde $\widehat{u} = \widehat{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$, $r = ||r||$

Veamos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{h} &= \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} \\
&= \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{r}' \\
&= r\widehat{u} \times (r\widehat{u})' \\
&= r\widehat{u} \times (r\widehat{u}' + r'\widehat{u}) \\
&= r^2(\widehat{u} \times \widehat{u}') + rr'(\widehat{u} \times \widehat{u}) \\
&= r^2(\widehat{u} \times \widehat{u}')
\end{aligned}$$

■

Paso 2: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{h} = GM\overrightarrow{u}'$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot c$$

Propiedad del triple producto vectorial

Veamos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times h &= \frac{-GM}{r^2} \times r^2(\widehat{u} \times \widehat{u}') \\
&= -GM\widehat{u} \times (\widehat{u} \times \widehat{u}') \\
&= -GM[(\widehat{u} \cdot \widehat{u}')\widehat{u} - (\widehat{u} \cdot \widehat{u})\widehat{u}']
\end{aligned}$$

$\widehat{u} \cdot \widehat{u}' = 0$ y $\widehat{u} \cdot \widehat{u} = 1$. ¿Por qué?.

$$= GM\widehat{u}'$$

■

Paso 3: $(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h})' = GM\,\widehat{u}'$

Veamos:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h})' &= \overrightarrow{v}' \times \overrightarrow{h} \\
&= \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{h} \\
&= GM\widehat{u}'
\end{aligned}$$

■

Paso 4: $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} = GM\overrightarrow{u} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}$ vector constante.

Veamos.

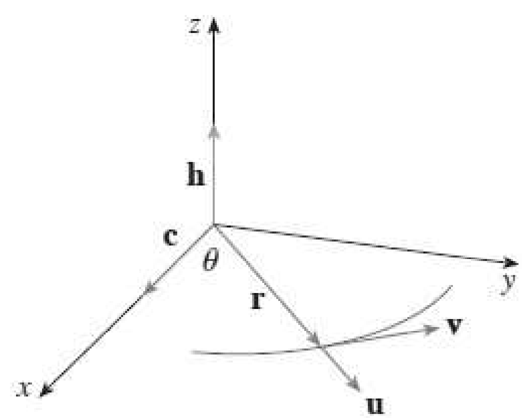
Integrando ambos lados de la relación del **Paso 3**, se obtiene

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h} = GM\overrightarrow{u} + \overrightarrow{c}, \ \overrightarrow{c} \text{ vector constante.}$$

■

Para facilitar la verificación de los siguientes resultados, es conveniente *ajustar* nuestro sistema de coordenadas.

- El vector $\widehat{k}$ (eje Z) apuntará en la dirección del vector $\overrightarrow{h}$. Así, entonces el plano XY será el plano donde está la órbita del planeta.
- Dado que los vectores $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h}$ y $\widehat{u}$ son perpendiculares al vector $\overrightarrow{h}$ el **Paso 4**, muestra que el vector $\overrightarrow{c}$ está en el plano XY. Entonces se puede elegir el eje X en la dirección del vector $\overrightarrow{c}$:



Nuevo sistema de trabajo

Paso 5: $\overrightarrow{r} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h}) = r(GM + c\cos\theta)$, con $\theta = \angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{r})$

Veamos:

Si $\theta = \angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{r})$, entonces (r, θ) son las coordenadas polares del planeta. Del **Paso 4**:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h}) &= \overrightarrow{r} \cdot (GM\widehat{u} + \overrightarrow{c}) \\
&= GM\overrightarrow{r} \cdot \widehat{u} + \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{c} \\
&= GMr\overrightarrow{u} \cdot \widehat{u} + rc\cos\theta \\
&= GMr + rc\cos\theta \\
&= r(GM + c\cos\theta)
\end{aligned}$$

■

Paso 6: $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$

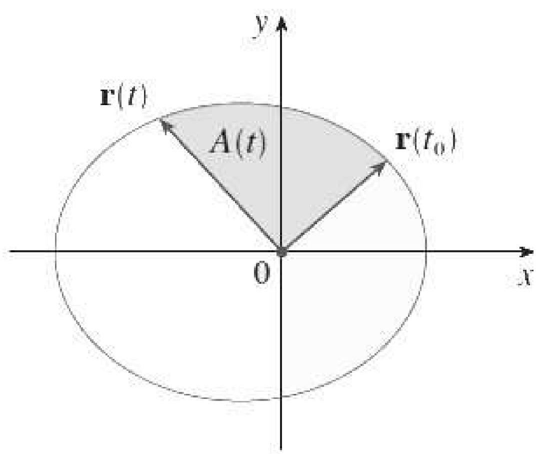
Como
$$\overrightarrow{r} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{h}) = (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{h} = \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h} = h^2$$

Sustituyendo en Paso 5, despejando r y haciendo $e = \frac{c}{GM}$, se tiene que.

$$r = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

haciendo $d = \frac{h^2}{c}$, se obtiene finalmente, que la órbita del planeta tiene ecuación (en coordenadas polares):
$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$
y al ser la trayectoria del planeta una curva cerrada, esta es la ecuación de una elipse, con el sol en uno de sus focos y excentricidad igual a e.

5.5 Demostración de la segunda ley de Kepler



Segunda Ley de Kepler

Usar las mismas notaciones convenidas en la demostración de la 1era Ley de Kepler y usar las coordenadas polares, de modo que:

$$\overrightarrow{r} = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\sin\theta)\hat{\imath}$$

Para obtener una demostración de esta Ley seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Verificar que $\overrightarrow{h} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \widehat{k}$

Paso 2: Deducir que $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$

Paso 3: Si $A = A(t)$ es el área barrida por el vector del radio $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, en el intervalo $[t_0, t]$ como en la figura, comprobar que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dr}$$

Paso 4: Deducir que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h = \text{constante}$$

y de aqui concluir la Segunda Ley de Kepler.

5.6 Demostración de la tercera Ley de Kepler

Sea T el tiempo que le toma al planeta para recorrer completamente su órbita elíptica (T recibe el nombre de periodo del planeta). Además sean $2a$ y $2b$ los ejes mayor y menor, respectivamente, de la elipse.
Comprobar la Tercera Ley de Kepler, siguiendo los siguientes pasos.

Paso 1: Usando el Paso 4, de la demostración de la segunda Ley de Kepler, verificar que:

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

Paso 2: Comprobar que

$$\frac{h^2}{GM} = ed = \frac{b^2}{a}$$

Paso 3: Usando los 2 pasos precedentes, demostrar que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

Observar que la constante de proporcionalidad no depende del planeta en cuestión.