

---

## Integral de línea I

---

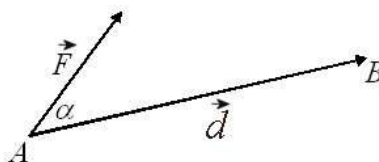
### 7.1 Introducción

En esta sesión se revisa el concepto de un nuevo tipo de integral: *integral de línea*. Se define de manera análoga al caso de la integral de Riemann de una función de una variable real, y tiene múltiples aplicaciones, particularmente en el ámbito de la Física. Esta nueva integral se puede aplicar tanto a campo vectoriales como escalares.

Partiremos definiendo la integral de línea para campos vectoriales. Así como la integral de Riemann se introduce con el problema del área, La integral de línea se inicia con la determinación del trabajo realizado por un campo de fuerzas al actuar sobre una partícula que se mueve sobre una curva.

### 7.2 Trabajo realizado por un campo de fuerzas

#### 7.2.1 Fuerza constante



Supongamos que una fuerza  $\vec{F}$  actúa sobre un objeto que se desplaza desde un punto  $A$  hasta un punto  $B$ , a través del segmento  $AB$ . En este caso se define el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$ , por

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

donde  $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ .

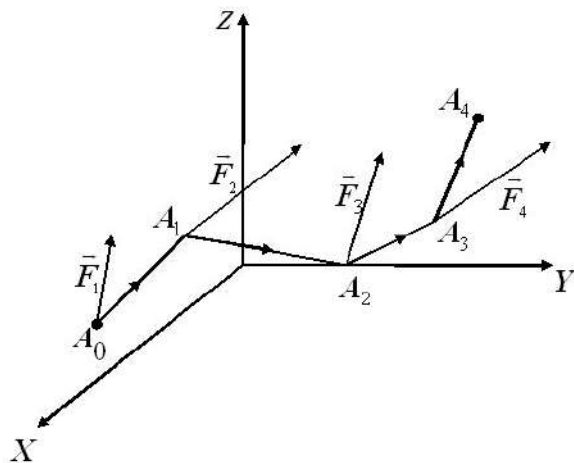
Notar que, equivalentemente

$$T = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \alpha$$

donde  $\alpha = \angle(\vec{F}, \vec{d})$ , es decir  $\alpha$  es el ángulo que forma el vector fuerza  $\vec{F}$  con el vector desplazamiento  $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ .

*Observación:* Una unidad de trabajo es el *Joule* que corresponde al trabajo realizado por una fuerza de 1 *Newton* cuando se produce un desplazamiento de 1 *metro*.

### 7.2.2 Fuerza seccionalmente constante



Supongamos ahora, que se tiene un camino poligonal,  $P$ , en el espacio que une los puntos  $A_0, A_1, A_2$  y  $A_3$ ; y que en cada segmento del camino poligonal actúan fuerzas constantes:  $\vec{F}_1$  en el camino  $\vec{d}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$ ,  $\vec{F}_2$  en el camino  $\vec{d}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$ , etc. En este caso el trabajo total realizado por estas fuerzas cuando se desplaza un objeto sobre  $P$ , desde  $A_0$  hasta  $A_4$  es:

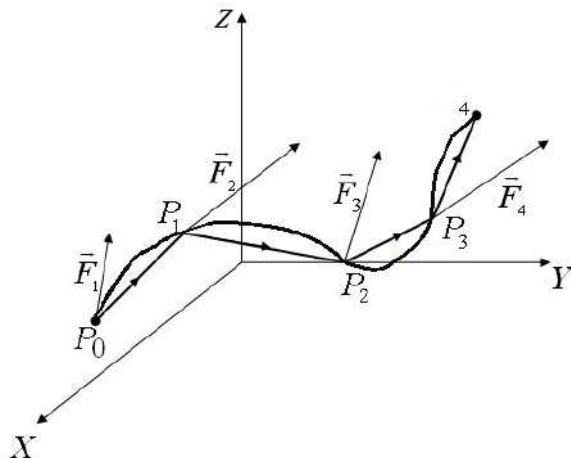
$$T = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{d}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{d}_3 + \vec{F}_4 \cdot \vec{d}_4$$

En caso que el camino poligonal este conformado por  $n$  segmentos que unen los puntos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ , de modo que en cada uno de estos segmentos actúan fuerzas constantes  $\vec{F}_i$ , correspondientemente, entonces el trabajo total realizado por este conjunto de fuerzas cuando se desplaza un objeto sobre  $P$ , desde  $A_0$  hasta  $A_n$  es:

$$T = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{d}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{d}_3 + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{d}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{d}_i$$

donde  $\vec{d}_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ .

## 7.2.3 Fuerza continuamente variable



El caso general, asociado a las dos situaciones recién comentadas, corresponde al trabajo realizado por un campo de fuerzas variable, que actúa en cada punto de una curva  $C$ , cuando se desplaza un objeto desde el punto inicial al punto terminal de dicha curva. Para fijar ideas, sean

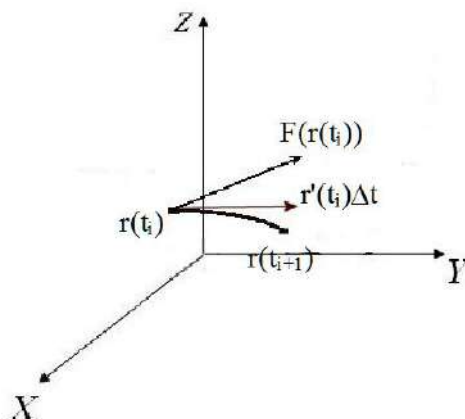
- $C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in [a, b]$ , una curva, y
- $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una campo (vectorial) de fuerzas, de modo que  $\vec{r}([a, b]) \subset \Omega$ , para que  $\vec{F}$  actúe en cada punto de  $C$ .

Para resolver esta situación, se observa que cada partición  $\pi$  del intervalo  $[a, b]$ :

$$\pi: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

induce una partición  $\bar{\pi}$  en la curva  $C$ :

$$\bar{\pi}: P_0 = \vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0), P_1 = \vec{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1), \dots, P_n = \vec{r}(t_n) = (x_n, y_n, z_n)$$



Nota: Como siempre  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ .

Ahora bien, aproximando el trabajo realizado por  $\vec{F}$  en el  $i$ -ésimo sub-arco que va desde  $\vec{r}(t_i)$  a  $\vec{r}(t_{i+1})$ , donde  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , por

$$T_i = \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot (\vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i))$$

y como, por definición de derivada,  $\vec{r}'(t_i)\Delta t \approx \vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i)$ , se tiene

$$T_i \approx \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)\Delta t$$

se tiene que el trabajo total realizado por  $\vec{F}$  cuando se mueve un objeto sobre toda la curva  $C$ , es aproximadamente igual a la siguiente suma de Riemann:

$$T \approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)\Delta t$$

Por lo tanto, es natural definir el trabajo total realizado por la fuerza  $\vec{F}$ , como\*

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)\Delta t$$

es decir,

$$T = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$$

lo que suele anotarse por,

$$T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Ejemplo:** Encontrar el trabajo que realiza el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (x, xy, yz)$  cuando se mueve una partícula sobre la parábola  $y = x^2$  en el plano  $z = 3$  desde el punto  $(0, 0, 3)$  al punto  $(1, 1, 3)$ .

Ahora bien, en general se define:

---

\* Es claro que, cuando  $n \rightarrow \infty$ , la norma,  $\Delta t$ , de las particiones tiende a 0.

## 7.3 Integral de línea para campos vectoriales

Sean

- $C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in [a, b]$ , una curva suave, y
- $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una campo vectorial continuo, de modo que  $\vec{r}([a, b]) \subset \Omega$ , para que  $\vec{F}$  actúe en cada punto de  $C$ .

la integral de línea del campo vectorial  $\vec{F}$  sobre la curva  $C$ , se anota y define:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

**Nota 7.1.** La integral de línea de un campo vectorial  $\vec{F}$ , cuando la curva  $C$  es cerrada, se anota

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## 7.4 Diversas maneras de presentar una integral de línea de un campo vectorial (trabajo)

La integral de línea se puede escribir:

- 1) Destacando el vector tangente:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

- 2) Usando su definición:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- 3) Desarrollada para incluir a  $dt$ , se destaca el parámetro  $t$  y el vector de velocidad  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

- 4) Sustituyendo  $\vec{F}$  y de  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$W = \int_C (P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) \cdot \left( \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \right) dt$$

- 5) Realizando el producto punto:

$$W = \int_C \left( P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt$$

6) Finalmente, cancelando  $dt$ , se obtiene una de las formas más usadas:

$$W = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

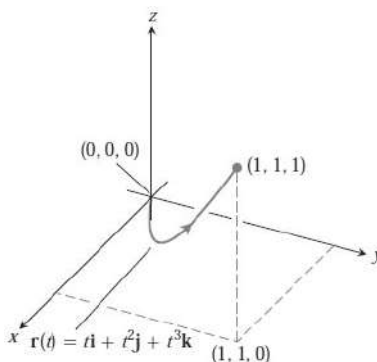
**Ejemplo 7.1.** Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable sobre una curva en el espacio.

Calcular el trabajo realizado por

$$\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$$

sobre la curva

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$



**Paso 1:** Se evalúa  $\vec{F}$  sobre la curva:  $\vec{F}(\vec{r}(t))$ :

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (t^2 - t^2)\hat{i} + (t^3 - t^4)\hat{j} + (t - t^6)\hat{k} = (t^3 - t^4)\hat{j} + (t - t^6)\hat{k}$$

**Paso 2:** Se calcula  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}) = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$$

**Paso 3:** Se calcula  $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = ((t^3 - t^4)\hat{j} + (t - t^6)\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}) = -3t^8 - 2t^5 + 2t^4 + 3t^3$$

**Paso 4:** Finalmente se calcula  $\int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$ :

$$\int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 (-3t^8 - 2t^5 + 2t^4 + 3t^3) dt = \frac{29}{60}$$

**Respuesta:** El trabajo realizado es igual a  $\frac{29}{60}$  (u. de trabajo).

**Ejercicio 7.1.** Sea  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  una porción de la hélice entre  $t = 0$  y  $t = 2\pi$ . Si  $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, x + y + z, z)$ . Verificar que

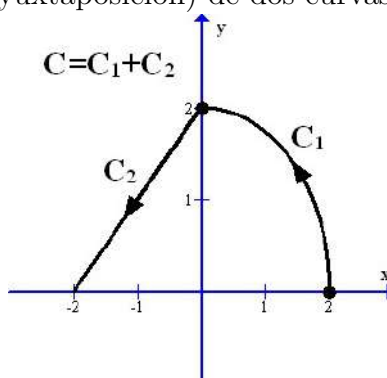
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi b^2.$$

## 7.5 Propiedades de las integrales de línea

- 1) El valor de la integral de línea no depende de la parametrización de la curva  $C$ , siempre que se conserve su sentido.
- 2) Si  $-C$  es la curva  $C$  orientada en sentido contrario, se tiene que

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- 3) Si una curva  $C$  es la *unión* (yuxtaposición) de dos curvas  $C_1$  y  $C_2$ ,



se tiene que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Observación:** Como  $\vec{r} = (x, y, z)$ , se suele anotar  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ .

Además, como  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , se obtiene formalmente que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = Pdx + Qdy + Rdz$$

Luego, usando estas notaciones, se tiene que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

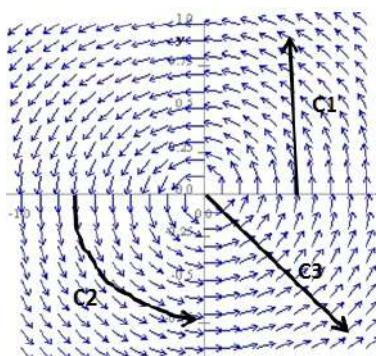
además, si  $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in [a, b]$ , se tiene

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) &= (P(\vec{r}(t)), Q(\vec{r}(t)), R(\vec{r}(t))) \\ \vec{r}'(t) &= (x'(t), y'(t), z'(t)) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)]dt$$

**Ejercicio 7.2.** Si el campo vectorial  $\vec{F}$  tiene el siguiente campo de direcciones



y  $C1$ ,  $C2$  y  $C3$  son las curvas indicadas. Determinar el signo, de ser posible, de cada una de las siguientes integrales de línea

a)  $\int_{C1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$       b)  $\int_{C2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$       c)  $\int_{C3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

**Solución:**

- 1) Positiva. Pues como el campo de vectores forman un ángulo agudo con los vectores tangentes a la curva  $C1$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{r}' = \|\vec{F}\| \|\vec{r}'\| \cos(\angle(\vec{F}, \vec{r}')) > 0$ .
- 2) Positiva. Razón análoga.
- 3) Cero. En este caso el campo de fuerzas es perpendicular a la curva, luego  $\cos(\angle(\vec{F}, \vec{r}')) = \cos(90) = 0$

### Nota 7.2. Integrales de flujo y de circulación de campos vectoriales

Cuando  $\vec{F}$  es un campo de velocidades, la integral de línea de  $\vec{F}$  sobre una curva  $C$  recibe el nombre de *flujo* de  $\vec{F}$  a lo largo de  $C$ . Así entonces

$$\text{Flujo} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Cuando  $C$  es una curva cerrada, el flujo se llama *circulación* de  $\vec{F}$  sobre una curva  $C$ .

## 7.6 Integral de línea para campos escalares

También es posible definir integrales de línea para campos escalares. Sean:

- $C$  una curva suave con ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \text{con } a \leq t \leq b$$



- $u = f(x, y, z)$  un campo escalar continuo definido en un conjunto que contiene a la curva  $C$ .

La integral de línea de  $f$  sobre la curva  $C$  se anota y define por

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

**Ejemplo 7.2.** Calcular  $\int_C (2x + 9z)ds$ , donde  $C : x = t, y = t^2, z = t^3; 0 \leq t \leq 1$ .

**Desarrollo:** En primer lugar se calcula

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

Luego,

$$\int_C (2x + 9z)ds = \int_0^1 (2t + 9t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}dt = \frac{1}{6}(14^{3/2} - 1)$$

**Nota 7.3.** Si  $C$  es una curva suave definida por

$$C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad \text{con } a \leq t \leq b$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z)dx + f(x, y, z)dy + f(x, y, z)dz = \\ \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + f(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt + f(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt \end{aligned} \quad (7.1)$$

**Ejemplo 7.3.** Calcular  $\int_C zdx + xdy + ydz$ , donde  $C : x = t^2, y = t^3, z = t^2; 0 \leq t \leq 1$ .

**Desarrollo:**

$$\int_C zdx + xdy + ydz = \int_0^1 t^2 \cdot 2tdt + t^2 \cdot 3t^2dt + t^3 \cdot 2tdt = \int_0^1 (2t^3 + 5t^4)dt = \frac{3}{2}$$

## 7.7 Algunas aplicaciones a la física de la integral de línea de campos escalares

En Física, si la curva  $C$  representa un *delgado* alambre con densidad lineal  $\rho(x, y, z)$  en su punto  $(x, y, z)$ , entonces:

- 1) *Masa* de este alambre se define por

$$m = \int_C \rho ds$$

2) *Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:*

$$M_{yz} = \int_C x \rho ds, \quad M_{xz} = \int_C y \rho ds, \quad M_{xy} = \int_C z \rho ds,$$

3) *Coordenadas del centro de masa de este alambre,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , viene dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho ds = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho ds = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_C z \rho ds = \frac{M_{xy}}{m}$$

4) *Momentos de inercia con respecto a los ejes y otras rectas:*

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho ds, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho ds, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho ds$$

**Ejercicio 7.3.** *Un arco de metal delgado, más denso en la parte inferior que en la superior está a lo largo de la semicircunferencia en el plano  $YZ$ . Determinar el centro de masa del arco, si la densidad en el punto  $(x, y, z)$  del arco es  $\rho(x, y, z) = 2 - z$*

**Resp.:** El centro de masa es, aproximadamente, el punto  $(0, 0, 0.57)$

## 7.8 Actividades Sección 7

- 1) a) Para  $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ ,  $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , verificar que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 64$   
 b) Para  $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{i} + y\hat{j} - x\hat{k}$ ,  $\vec{r}(t) = t\hat{i} + \sin t\hat{j} + \cos t\hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , verificar que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$

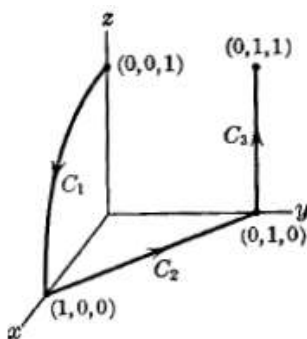
2) Calcular las siguientes integrales de línea:

- a)  $\int_C (x+y)dx + (x-y)dy + (y-z)dz$  donde  $C(t) = (t^2, t, 1)$   $t \in [0, 2]$   
 b)  $\int_C 2xydx - ydy$  donde  $C$  es el arco de parábola  $y = x^2$  que va de  $(-2, 4)$  hasta  $(0, 0)$  seguido del segmento que va de  $(0, 0)$  hasta  $(2, 6)$

3) Calcular  $\int_C xy^4 ds$ , si  $C$  es la mitad derecha de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 16$ .

Respuesta: 1638.4

4) Calcular  $\int_C xz dx + x dy - yz dz$ , donde  $C$  es la curva que consiste en un cuarto de círculo en el plano  $XZ$  y los segmentos de recta en los planos  $XY$  e  $YZ$ , tal como se indica en la siguiente figura:



**Resp.:**  $\frac{1}{3}$ , pues  $\int_{C_1} xz dx + x dy - yz dz = \frac{1}{3}$ ,  $\int_{C_2} xz dx + x dy - yz dz = \frac{1}{2}$ ,  $\int_{C_3} xz dx + x dy - yz dz = -\frac{1}{2}$

5) Encontrar el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F}(x, y) = (x, y+2)$  moviendo un objeto a lo largo de la *cicloide*  $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Resp.:**  $2\pi^2$  (unidades de trabajo)

6) Al doblar un delgado alambre se forma un semicírculo de ecuación aproximadamente igual a  $x^2 + y^2 = 4$  con  $x \geq 0$ . Si su densidad lineal es constante e igual a  $k$ , encontrar la masa y centro de masa de este alambre.

**Resp.:**  $m = 2k\pi$   $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{4}{\pi}, 0)$

- 7) Determinar la masa y centro de masa de un alambre con la forma de la hélice  $x = t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , si la densidad en cualquier punto de este alambre es igual al cuadrado de su distancia al origen. **Resp.:**  $m = \sqrt{2}(\frac{8}{3}\pi^3 + 2\pi)$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{3\pi(2\pi^2+1)}{4\pi^2+3}, 0, 0)$

- 8) Encontrar el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

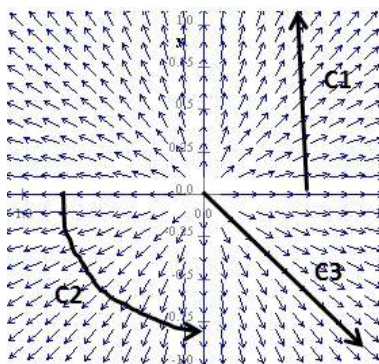
sobre una partícula que se mueve en el segmento de recta que va del punto  $(1, 0, 0)$  al punto  $(3, 4, 2)$ . **Resp.:** 26 (unidades de fuerza).

- 9) Un campo de fuerzas del tipo gravitacional,  $\vec{F}$ , está dado por

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = \frac{K}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

Calcular el trabajo realizado por  $\vec{F}$  cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo del eje  $X$ , desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(2, 0, 0)$ . **Resp.:**  $\frac{3}{8}K$

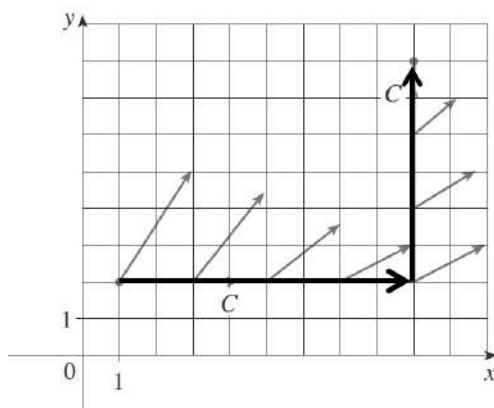
- 10) a) Verificar que una fuerza constante realiza trabajo cero sobre una partícula que se mueve uniformemente una vez sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .  
b) ¿Sucede lo mismo si la fuerza viene dada por  $\vec{F}(x, y) = (kx, ky)$ , con  $k$  constante?.
- 11) Si el campo vectorial  $\vec{F}$  tiene el siguiente campo de direcciones



y  $C1$ ,  $C2$  y  $C3$  son las curvas indicadas. Determinar el signo, de ser posible, de cada una de las siguientes integrales de línea

a)  $\int_{C1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$       b)  $\int_{C2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$       c)  $\int_{C3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

- 12) Un objeto se mueve sobre la curva  $C$  desde el punto  $(1, 2)$  al punto  $(9, 8)$ . En el siguiente dibujo se muestra la curva  $C$  y algunos vectores del campo vectorial  $\vec{F}$ . La longitud de estos vectores están medidos en newton. Encontrar un valor aproximado del trabajo realizado por  $\vec{F}$



13) Calcular la circulación de los campos

$$\vec{F}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

alrededor de las siguientes curvas:

a) La circunferencia  $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

b) La elipse  $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (4 \sin t)\hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

**Resp.:** a)  $Circ(\vec{F}_1) = 0$   $Circ(\vec{F}_2) = 2\pi$ ,    b)  $Circ(\vec{F}_1) = 0$   $Circ(\vec{F}_2) = 8\pi$