SECCIÓN 8

Integral de línea II

8.1 Introducción

En esta sesión se revisa el Teorema Fundamental de integrales de línea y el análisis de las condiciones para que la integral de línea de un campo vectorial sea independiente de la curva de integración.

Actividad 8.1. Para el campo vectorial $F(x, y) = (xy, y^2)$, evaluar la integral de línea $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, para cada uno de los caminos que unen los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 1)$:

1) $C_1 : x = t, \; y = t, \; t \in [0, 1]$

2) $C_2 : x = t, \; y = t^2, \; t \in [0, 1]$

Respuesta: $a)$ 2/3 $\quad$ $b)$ 9/20

Actividad 8.2. Para el campo vectorial $F(x, y) = (2xy, x^2)$, evaluar la integral de línea $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, para cada uno de los caminos que unen los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 1)$:

1) $C_1 : x = t, \; y = t, \; t \in [0, 1]$

2) $C_2 : x = t, \; y = t^2, \; t \in [0, 1]$

3) $C_3 = C_{31} + C_{32}$, donde
$C_{31} : x = t, \; y = 0, \; t \in [0, 1]$ $\quad$ y $\quad$ $C_{32} : x = 1, \; y = t, \; t \in [0, 1]$

Respuesta: $a)$ 1 $\quad$ $b)$ 1 $\quad$ $c)$ 1

Nota 8.1. Las actividades precedentes sugieren que algunas integrales de línea dependen del camino que une dos puntos (actividad 1) y otras no (actividad 2).

8.2 Teorema fundamental para integrales de línea (TFIL)

Sea C una curva suave, contenida en un disco abierto D de $\mathbb{R}^2$ (o una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$), que va desde el punto $A = \overrightarrow{r}(a)$ hasta el punto $B = \overrightarrow{r}(b)$. Si $\overrightarrow{F}$ es una campo vectorial *conservativo* continuo sobre D y φ una función diferenciable, *potencial* (o *potencial escalar*) para $\overrightarrow{F}$ ($\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$), entonces $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ es independiente de la trayectoria C, y

$$\boxed{\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(B) - \varphi(A)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} &= \int_C \nabla\varphi \cdot \overrightarrow{dr} \\
&= \int_a^b \nabla\varphi(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\overrightarrow{r}(t)) \\
&= \varphi(\overrightarrow{r}(b)) - \varphi(\overrightarrow{r}(a)) \\
&= \varphi(B) - \varphi(A) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolario: Sea C una curva *cerrada* y suave contenido en disco abierto D de $\mathbb{R}^2$ (o una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$). Si $\overrightarrow{F}$ es una campo vectorial conservativo continuo sobre B , entonces

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$$

Nota 8.2. Cuando la integral de línea es sobre una curva cerrada C, ésta se acostumbra a denotarla como

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Nota 8.3. El siguiente teorema establece una condición bastante simple para decidir si un campo vectorial es o no conservativo, y luego del teorema precedente si su integral de línea es no independiente de la trayectoria.

8.3 Teorema: Criterio de las componentes para un campo conservativo

Sea $\overrightarrow{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$ una campo vectorial sobre un disco abierto de $\mathbb{R}^2$, con P y Q funciones C^1 en este disco, entonces

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Nota 8.4. En caso que $\overrightarrow{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$ una campo vectorial sobre una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$, con sus componentes C^1 en esta esfera, se tiene que

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

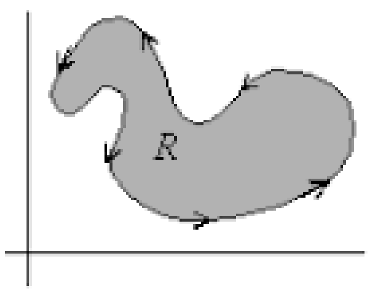
Nota 8.5. Observar que el teorema (5.3) y la nota precedente se pueden enunciar:

$$\boxed{\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}}$$

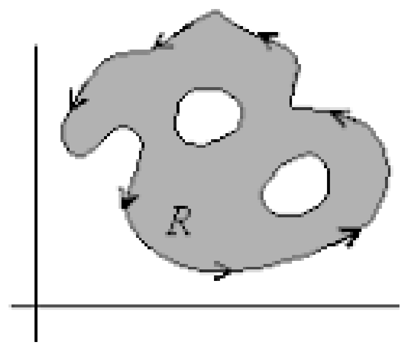
Nota 8.6. Existen otras condiciones equivalentes a que un campo vectorial sea conservativo. En efecto: Sea $\overrightarrow{F}$ un campo C^1 en una región abierta y conexa R y C una curva contenida en R (con punto inicial A y punto terminal B), entonces son equivalentes:

1) $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$, es decir, $\overrightarrow{F}$ es irrotacional.
2) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ es independiente de la curva C. Es decir, su valor es el mismo para *toda* curva que parta en A y termine en B.
3) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$, para toda curva cerrada C en R.

Nota 8.7. El Teorema (7.3), en general, se cumple cuando el dominio D es *simplemente conexo.* Un domino se dice *simplemente conexo* cuando toda curva cerrada contenida en D, tiene todo su interior contenido en D (o equivalentemente, cuando dicha curva se puede contraerse a un punto, sin salir de D).



Dominio simplemente conexo



Dominio no simplemente conexo

8.3.1 Método 1 para encontrar un potencial

Determinar si $\overrightarrow{F}(x,y) = (3x^2+6xy)\hat{\imath} + (3x^2+4y^3)\hat{\jmath}$ es conservativo, y en caso que lo sea, determinar una función f de la cual es su gradiente.

Solución: Es claro que, en esta situación, $P(x,y) = 3x^2+6xy$ y $Q(x,y) = 3x^2+4y^3$. En el caso de dos variables, las condiciones del teorema anterior se reducen a verificar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

En este caso:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x, \quad y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x$$

Luego, se cumple la condición y existe la función f.

Como $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+6xy \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2+4y^3 \tag{8.1}$$

Integrando con respecto a x la primera ecuación de (8.1), se tiene

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + h(y) \tag{8.2}$$

donde la constante de integración es una función que puede depender de la variable y. La derivada parcial con respecto a y de (8.2) debe ser igual a $3x^2 + 4y^3$, luego

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + h'(y) = 3x^2 + 4y^3 \tag{8.3}$$

de donde $h'(y) = 4y^3$, luego

$$h(y) = y^4 + C \tag{8.4}$$

donde C es una constante (no depende de x ni de y). Reemplazando (8.4) en (8.2), se tiene finalmente que

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^4 + C$$

8.3.2 Método 2 para encontrar una función potencial

El método recién explicado tiene una variante que lo simplifica. Mostraremos como funciona encontrando un potencial para el mismo campo vectorial conservativo del método 1.

- Integrando con respecto a x, la primera ecuación de (8.1):

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y \tag{8.5}$$

- Integrando con respecto a y, la segunda ecuación de (8.1):

$$f(x,y) = 3x^2y + y^4 \tag{8.6}$$

Ahora seleccionando, *sin repetición*, los términos que conforman las ecuaciones (8.5) y (8.6), se encuentra una función potencial para $\overrightarrow{F}$:

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^4$$

Ejemplo 8.1. *Para el campo vectorial* $\overrightarrow{F}(x,y) = (3x^2 + 6xy)\hat{\imath} + (3x^2 + 4y^3)\hat{\imath}$ *calcular* $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, *donde* C *es cualquier curva que va del punto* $A = (1,1)$ *al punto* $B = (1,0)$.

Solución: Del ejemplo precedente, se tiene que $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^4$ es un potencial de $\overrightarrow{F}$, luego por el teorema (5.2):

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f(B) - f(A) = 1 - 5 = -4$$

Ejercicio 8.1. Considerar el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x\sin y, x^2\cos y + 2y)$ y C una curva que va del punto $A = (1,-\pi)$ al punto $B = (1,\pi)$. Calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$.

8.3.3 Método 3 para encontrar una función potencial: Método de la integral de línea

Teorema 8.1. Si $\overrightarrow{F}$ es un campo vectorial conservativo C^1, entonces

$$\boxed{f(x,y,z) = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}}$$

donde $\overrightarrow{r}(t) = (tx, ty, tz)$, $0 \leq t \leq 1$, es una función potencial para $\overrightarrow{F}$.

Demostración: Para simplificar la escritura de la demostración, se trabajará en $\mathbb{R}^2$. Para ello, sean:

- $\overrightarrow{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$, con $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (por ser conservativo)
- $\overrightarrow{r}(t) = (tx, ty)$, $0 \leq t \leq 1$

Se debe probar que

$$\text{(A) } \frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{(B) } \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Comprobación de (A):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{dx}\left(\int_0^1 \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt\right) \\
&= \frac{\partial}{dx}\left(\int_0^1 (M(tx,ty), N(tx,ty)) \cdot (x,y))\right) dt \\
&= \frac{\partial}{dx}\left(\int_0^1 (M(tx,ty)x + N(tx,ty)y)\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{dx}\left(M(tx,ty)x + N(tx,ty)y\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(M(tx,ty) + x\frac{\partial}{dx}M(tx,ty) + y\frac{\partial}{dx}N(tx,ty)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(M(tx,ty) + xt\frac{\partial}{dx}M(tx,ty) + yt\frac{\partial}{dx}N(tx,ty)\right) dt \\
&= \int_0^1 t\left(x\frac{\partial}{dx}M(tx,ty) + y\frac{\partial}{dx}N(tx,ty)\right) + M(tx,ty)dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{dt}[tM(tx,ty)]\right) dt \\
&= tM(tx,ty)\Big|_0^1 \\
&= M(x,y)
\end{aligned}$$

Análogamente se verifica (B) ∎

Ejemplo 8.2. Dado el siguiente campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y^2, 2xy)$*:*

1) Verificar que $\overrightarrow{F}$ es conservativo.
2) Usando el método de la integral de línea, encontrar una función potencial para $\overrightarrow{F}$.

Desarrollo:

1) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x+y^2) = 2y = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy)$. Por lo tanto, $\overrightarrow{F}$ es conservativo.

2) Usando el método pedido:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_0^1 \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \overrightarrow{F}(tx,ty) \cdot (x,y)\,dt \\
&= \int_0^1 (tx+(ty)^2, 2t^2xy) \cdot (x,y)\,dt \\
&= \int_0^1 (tx^2 + t^2y^2x + 2t^2xy^2)\,dt \\
&= (tx^2 + 3t^2xy^2)\,dt \\
&= \left.(x^2\frac{t^3}{2} + t^3xy^2)\right|_0^1 \\
&= \frac{x^2}{2} + xy^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, un potencial para $\overrightarrow{F}$ es $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2$.

8.3.4 Método 4 para encontrar un potencial de un campo vectorial conservativo

Teorema 8.2. Sea $\overrightarrow{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}$, entonces un potencial de $\overrightarrow{F}$, viene dado por:

$$\boxed{f(x,y,z) = \int_0^x P(u,0,0)du + \int_0^y Q(x,v,0)dv + \int_0^z R(x,y,w)dw, \quad \textit{con } (x,y,z) \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo 8.3. Usando el Método 4, encontrar un potencial para el campo conservativo del ejemplo precedente: $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y^2, 2xy)$
Desarrollo*:*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_0^x P(u,0)du + \int_0^y Q(x,v)dv \\
&= \int_0^x udu + \int_0^y 2xvdv \\
&= \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^x + \left. xv^2\right|_0^y \\
&= \frac{x^2}{2} + xy^2
\end{aligned}$$

8.4 Campo vectorial de rotores

Como ya se ha visto, para campos vectoriales $\overrightarrow{F}$ de clase C^2 en dominios abiertos y conexos, se tiene que

$$rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe un potencial escalar } \varphi \text{ tal que } \overrightarrow{F} = \nabla\varphi$$

La condición $div(\overrightarrow{F}) = 0$, que define a los campos solenoidales, con la relación anterior. En efecto:

Teorema 8.3. Si $\overrightarrow{F}$ es un campo vectorial C^1 en un intervalo abierto de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$div(\overrightarrow{F}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe un campo vectorial } \overrightarrow{G}^{*} \text{ de clase } C^2 \text{ tal que } \overrightarrow{F} = rot(\overrightarrow{G})$$

Nota 8.8. En el siguiente ejemplo se muestra como encontrar el potencial vector de un campo solenoidal

Ejemplo 8.4. Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xz,\, -yz,\, y)$. Como claramente $\overrightarrow{F}$ es de rotores, encontrar un potencial vector para $\overrightarrow{F}$.
Desarrollo: Se tiene que encontrar un campo vectorial $\overrightarrow{G}$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_3}{\partial y} - \dfrac{\partial G_2}{\partial z} = xz & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial z} - \dfrac{\partial G_3}{\partial x} = -yz & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} = y & (3) \end{cases}$$

como el objetivo es encontrar *un* potencial vector $\overrightarrow{G} = (G_1, G_2, G_3)$ para $\overrightarrow{F}$, se puede asumir, por ejemplo que $G_3 = 0$. Luego las ecuaciones (1) y (2) quedan:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_2}{\partial z} = -xz & (4) \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial z} = -yz & (5) \end{cases}$$

De (4):

$$G_2(x,y,z) = -\frac{xz^2}{2} + g_2(x,y) \qquad (6)$$

De (5):

$$G_1(x,y,z) = -\frac{yz^2}{2} + g_1(x,y) \qquad (7)$$

Luego, sustituyendo en la ecuación (3):

$$\begin{aligned} -\frac{z^2}{2} + \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{z^2}{2} - \frac{\partial g_1}{\partial y} &= y \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} &= y \end{aligned}$$

* Al campo $\overrightarrow{G}$ se le llama *potencial vector* de $\overrightarrow{F}$.

Como una segunda simplificación se puede considerar $h_2 = 0$, de donde $g_2 = xy$. Luego,

$$\begin{cases} G_1(x,y,z) &= -\frac{yz^2}{2} \\ G_2(x,y,z) &= -\frac{xz^2}{2} + xy \\ G_3(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

Finalmente:

$$G(x,y,z) = \left(-\frac{yz^2}{2}, -\frac{xz^2}{2} + xy, 0\right)$$

Nota 8.9. En general, bajo las condiciones del Teorema (8.3) se tiene que:

$$\boxed{\overrightarrow{G}(x,y,z) = \left(\int_0^z F_2(x,y,t)dt,\ -\int_0^z F_1(x,y,t)dt + \int_0^x F_3(s,y,z_0)ds,\ 0\right)}$$

Ejercicio 8.2. Verificar el resultado del ejemplo (8.4), usando la fórmula precedente.

8.5 Un campo conservativo...¿qué conserva?

Suponer que un objeto de masa m se mueve sobre una curva suave C:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

por la acción de una fuerza conservativa $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \nabla f(\overrightarrow{r})$. En cada instante t se tiene:

- Por la segunda Ley de Newton: $F = ma$

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = m\overrightarrow{a}(t) = m\overrightarrow{r}''(t) \tag{8.7}$$

- Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$$E_c = \frac{1}{2}m||\overrightarrow{r}'(t)||^2 \tag{8.8}$$

- Energía potencial: $E_p = -f(x,y,z)$

$$E_p = -f(\overrightarrow{r}) \tag{8.9}$$

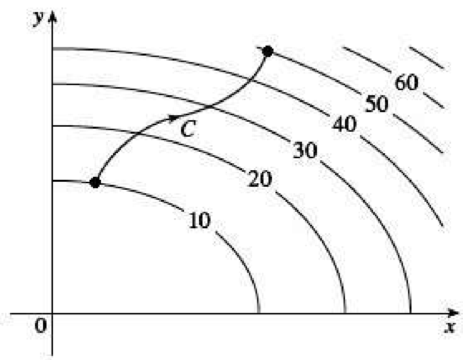
Ahora bien:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_c + E_p) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m||\overrightarrow{r}'(t)||^2 - f(x,y,z)\right) \\ &= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(||\overrightarrow{r}'(t)||^2\right) - \frac{d}{dt}\left(f(x,y,z)\right) \\ &= m\overrightarrow{r}''(t)\cdot\overrightarrow{r}'(t) - \left(\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}\right) \\ &= m\overrightarrow{r}''(t)\cdot\overrightarrow{r}'(t) - \nabla f(\overrightarrow{r})\cdot\overrightarrow{r}'(t) \\ &= (m\overrightarrow{r}''(t) - \nabla f(\overrightarrow{r}))\cdot\overrightarrow{r}'(t) \\ &= (\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) - \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}))\cdot\overrightarrow{r}'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

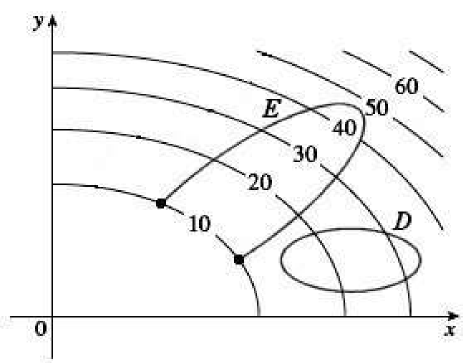
Luego, Si es $\overrightarrow{F}$ es un campo vectorial de fuerza conservativo, la suma de las energías cinética y potencial es constante. Por esta razón este campo se dice campo conservativo.

8.6 Actividades Sección 8

1) a) En el siguiente gráfico se muestra una curva C y las curvas de nivel de un campo escalar f diferenciable con gradiente continuo. Hallar el valor de $\int_C \nabla f \cdot d\overrightarrow{r}$.



   b) Idem ejercicio precedente, para las curvas D y E:



2) Para el campo vectorial dado $\overrightarrow{F}$, encontrar una función f tal que $\nabla f = \overrightarrow{F}$ y usar esta función para calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ para la curva dada C.

   a) $\overrightarrow{F}(x, y) = (y, x + 2y)$, C es el semicírculo superior que parte en $(0, 1)$ y termina en $(2, 1)$.
   b) $\overrightarrow{F}(x, y) = (\frac{y^2}{1+x^2}, 2y \arctan x)$, $\quad C : r(t) = (t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$.
   c) $\int_C yzdx + xzdy + (xy + 2z)dz$, C el segmento de recta que va del $(1, 0, -2)$ al punto $(4, 6, 3)$.

3) Establecer si las siguientes integrales de línea son o no independientes de la trayectoria. Evaluar la integral propuesta.

   a) $\int_C \tan y dx + x \sec^2 y dy$, C es *una* curva que va del origen al punto $(1, 1)$.
   b) $\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^x dy$, C es *una* curva que va del $(-1, 1)$ al punto $(1, 1)$.
   c) $\int_C ydx + xdy + xyzdz$, C el segmento de recta que va del origen al punto $(1, 1, 1)$.

4) Sea $\overrightarrow{F} = \nabla f$, donde $f(x,y) = \sin(x-2y)$. Determinar curvas *no cerradas* C_1 y C_2 de modo que:

   a) $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ *b)* $\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 1$

5) Determinar, en caso que exista, una valor del parámetro k de modo que el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (kx - y, y - 2k)$$

   sea conservativo.

   Respuesta. $k = 0.5$

6) Para el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{-y\,\widehat{\imath} + x\,\widehat{\jmath}}{x^2+y^2}$:

   a) Comprobar que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

   b) Sean C_1 y C_2 las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1, respectivamente. Calcular $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ y $\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$. ¿Qué se puede concluir?.

   c) La conclusión precedente, ¿contradice el teorema 5.3?.

7) Como se comentó en el ejercicio (6) de las actividades (1.4), el campo gravitacional viene dado por:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) = -\frac{mMG}{||\overrightarrow{x}||^3}\overrightarrow{x}$$

   Verificar que el trabajo realizado por este campo vectorial al mover una partícula desde el punto $(4,0,0)$ al punto $(0,0,2)$ es igual a $\frac{1}{4}mMG$.

   Hint. Verificar que $f(x,y,z) = \dfrac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es una función potencial de $\overrightarrow{F}$.

8) Para la siguiente integral de línea

$$I = \int_C \frac{x^2}{(x^3+y^3+z^3)^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{y^2}{(x^3+y^3+z^3)^{\frac{3}{2}}}dy + \frac{z^2}{(x^3+y^3+z^3)^{\frac{3}{2}}}dz$$

   a) Identificar y verificar que el campo vectorial en cuestión es conservativo.

   b) Calcular I si C es una curva suave que une el punto $(1,1,1)$ con $(1,5,3)$. **Resp.**: $0,3310$

9) Para cada (x,y,z), sea $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ un vector que apunta hacia el origen, con magnitud inversamente proporcional a la distancia al origen, es decir:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{-k(x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k})}{x^2+y^2+z^2}$$

   a) Verificar que $\overrightarrow{F}$ es conservativo, mostrando una función potencial para $\overrightarrow{F}$.

   b) Comprobar que también es conservativo el campo vectorial $\overrightarrow{G}(x,y,z)$ dirigido alejándose del origen, con magnitud proporcional a la distancia al origen.

c) Para generalizar las dos situaciones precedentes, verificar que si

$$\overrightarrow{H}(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2)(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})$$

donde g es una función continua (en una variable), entonces $\overrightarrow{H}$ es conservativo.

Hint: Mostrar que $\overrightarrow{H} = \nabla f$, donde $f(x,y,z) = \frac{1}{2}h(x^2+y^2+z^2)$, donde h es una primitiva de g, es decir $h(u) = \int g(u)du$.

10) Dado el siguiente campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$. Se pide:

a) Verificar que es un campo vectorial conservativo

b) Encontrar una función potencial para $\overrightarrow{F}$, usando los 4 métodos comentados.

11) Suponer que un objeto de masa m se mueve sobre una curva suave C:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}, \quad \text{con} \quad a \le t \le b$$

sujeto unicamente a la acción de una fuerza continua $\overrightarrow{F}$.

Verificar que el trabajo realizado corresponde al cambio en la energía cinética del objeto, es decir que:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{m}{2}(||\overrightarrow{r}\,'(b)||^2 - ||\overrightarrow{r}\,'(a)||^2)$$

Hint: Recordar que $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = m\overrightarrow{r}\,''(t)$ y que $\overrightarrow{r}\,''(t) \cdot \overrightarrow{r}\,'(t) = \frac{d}{dt}(||\overrightarrow{r}\,'(t)||)^2$

12) Sea $\overrightarrow{F}$ un campo de fuerza de la forma

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{k\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||^3}$$

para alguna constante k y con $\overrightarrow{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$.

Calcular el trabajo realizado al mover un objeto desde un punto P_1 hasta un punto P_2 a través de un camino suave, en término de las distancias d_1 y d_2 de estos puntos al origen.

Hint. ¿Qué es $f(\overrightarrow{r}) = \dfrac{k}{||\overrightarrow{r}||}$ de $\overrightarrow{F}$?.

13) Sobre la trayectoria

$$\overrightarrow{r} = (a\sin\omega t,\, b\cos\omega t), \text{ con } 0 \le t \le 2\pi$$

se mueve una partícula de masa m. Calcular el trabajo realizado cuando se mueve desde $(0,b)$ hasta $(a,0)$. *Hint*: Tener presente que $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{r}\,''$. **Resp.**: $\frac{1}{2}m\omega^3(b^2-a^2)$

Referencias:
1) Cálculo Diferencial e Integral IV. Prof. Esteban Hurtado
2) Rotacional y divergencia. M. Pérez,