SECCIÓN 10

Superficies paramétricas

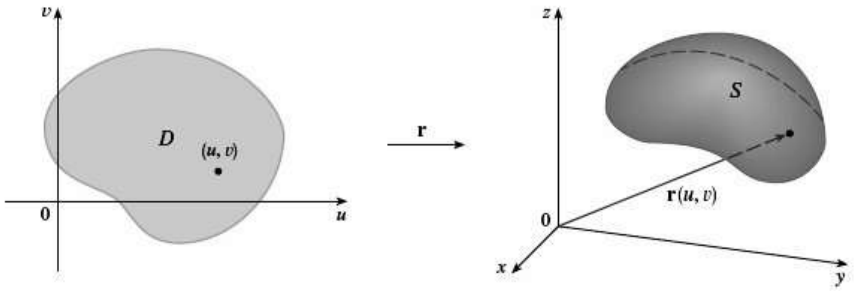
10.1 Introducción

En este curso ya se han estudiando superficies S que corresponden a gráficos de funciones de dos variables con dos tipos de representaciones:

- *Representación explícita* de S, cuando la ecuación que define a S es del tipo $z = f(x, y)$, como por ejemplo, el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$, y
- *Representación implícita* de S, cuando la ecuación que define a S es del tipo $F(x, y, z) = 0$, como por ejemplo, la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

En esta sesión se estudia otra forma de presentar una superficie, llamada forma paramétrica.

10.2 Representación paramétrica de superficies



Sea D una región del plano UV y

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\widehat{i} + y(u,v)\widehat{j} + z(u,v)\widehat{k} \tag{10.1}$$

una función vectorial de D en $\mathbb{R}^3$. Cuando (u,v) varía en D, los puntos imágenes (x,y,z) con

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v) \tag{10.2}$$

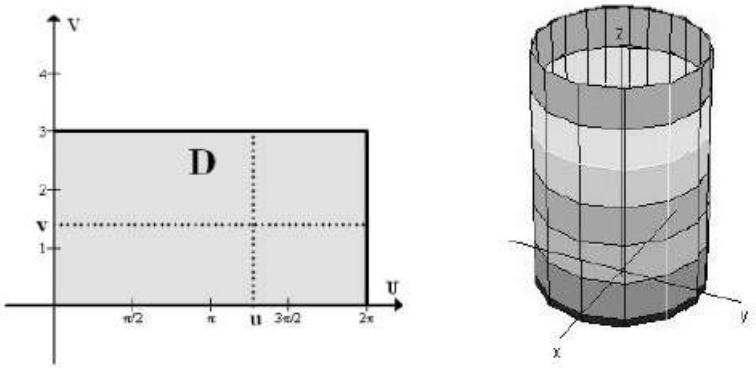
describen una superficie S, llamada *superficie paramétrica*, la ecuación (10.1) se denomina *ecuación vectorial* de S y las ecuaciones (10.2) se denominan *ecuaciones paramétricas* de S.

Ejemplo 10.1. *Porción de cilindro.* Considerar la superficie con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u,v) = 2\cos u \qquad y = y(u,v) = 2\sin u \qquad z = z(u,v) = v \tag{10.3}$$

con $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 3]$.

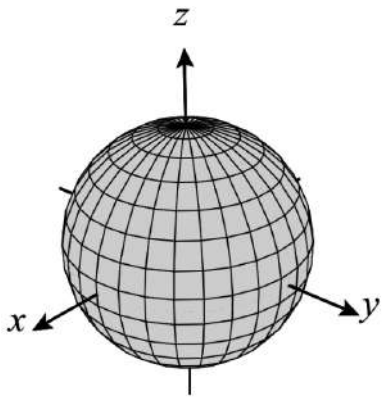
En este caso, es fácil verificar que $x^2 + y^2 = 4$. Luego esta superficie corresponde a una porción de este cilindro con z $(= v)$ entre 0 y 3.



Ejemplo 10.2. *Representación paramétrica de una esfera.*
Usando las coordenadas esféricas, se tiene que

$$x = x(u,v) = a\sin u\cos v \quad y = y(u,v) = a\sin u\sin v \quad z = z(u,v) = a\cos u \tag{10.4}$$

con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$, corresponden a ecuaciones paramétricas de una esfera centrada en el origen y de radio a. Verificarlo!.



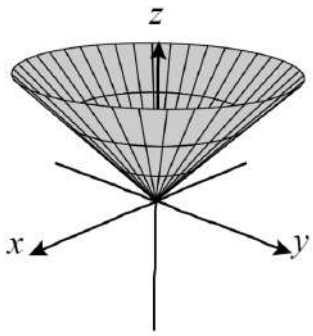
Ejemplo 10.3. *Representación paramétrica de un cono.*
Una ecuación paramétrica del cono

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

viene dada por

$$S : \begin{cases} x = av\cos u \\ y = av\sin u \\ z = v \end{cases}$$

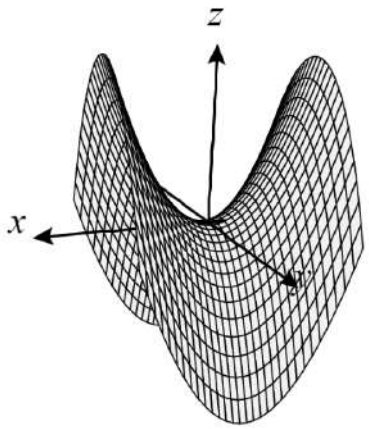
con $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$.



Nota 10.1. Cuando una superficie S viene dada por la ecuación $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$ una parametrización de S viene dada por

$$\overrightarrow{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

con $(u, v) \in D$.
Asi por ejemplo, una parametrización de la silla de montar $z = x^2 - y^2$ con $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ es $\overrightarrow{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, con $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$.



Nota 10.2. Recordar que para una superficie con ecuación explícita $z = f(x, y)$, la ecuación del plano tangente en su punto $P = (a, b, c)$, viene dado por:

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

y cuando su ecuación viene dada en forma implícita, $F(x,y,z)=0$, la ecuación del plano tangente en P viene dada por

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

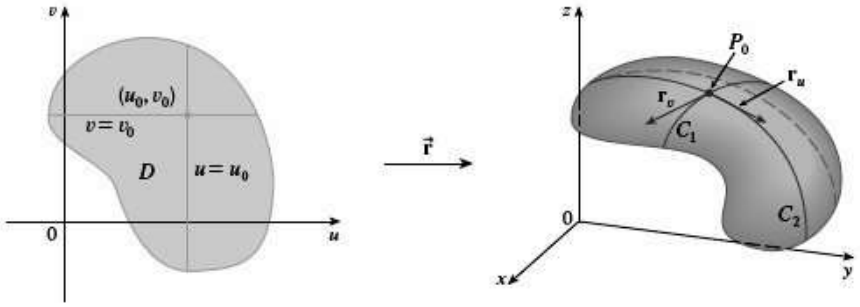
A continuación se revisa la formula del plano tangente a una superficie definida paramétricamente.

10.3 Plano tangente a una superficie paramétrica

Consideremos la superficie paramétrica S:

$$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u,v)=x(u,v)\widehat{i}+y(u,v)\widehat{j}+z(u,v)\widehat{k} \tag{10.5}$$

de $D\subseteq\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$:



Sea (u_0,v_0) un punto interior a D y $P_0=\overrightarrow{r}(u_0,v_0)$ su correspondiente imagen. La imagen del segmento de ecuación $u=u_0$ (en D), es una curva $C_1:\overrightarrow{r}(u_0,v)$ sobre S que tiene a

$$\overrightarrow{r}_v=x_v(u_0,v_0)\widehat{i}+y_v(u_0,v_0)\widehat{j}+z_v(u_0,v_0)\widehat{k}$$

como vector tangente en P_0

Análogamente, la imagen del segmento de ecuación $u=v_0$ (en D), es una curva $C_2:\overrightarrow{r}(u,v_0)$ sobre S que tiene a

$$\overrightarrow{r}_u=x_u(u_0,v_0)\widehat{i}+y_u(u_0,v_0)\widehat{j}+z_u(u_0,v_0)\widehat{k}$$

como vector tangente en P_0.

Luego, si $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v$ es un vector no nulo, es un vector normal a la superficie S en P_0. Cuando este vector nunca se anula, se dice que la superficie es *suave* o *regular*. Así entonces, para una superficie suave el plano tangente es el plano que pasa por le punto P_0 y tiene como vector normal al vector $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v$.

Ejemplo 10.4. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x=u^2,\ y=v^2,\ z=uv$ en su punto correspondiente a $u=1$ y $v=1$.

Desarrollo: Es claro que:

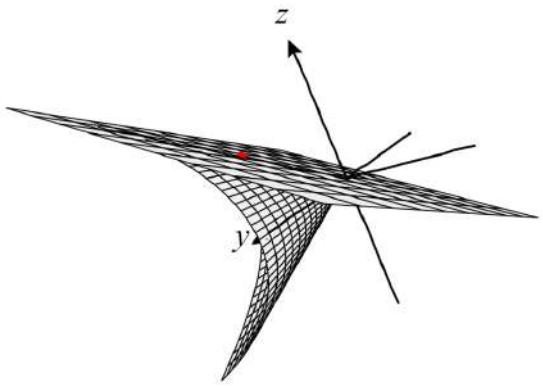
- $\overrightarrow{r}(u,v) = u^2\widehat{\imath} + v^2\widehat{\jmath} + uv\,\widehat{k}$
- $\overrightarrow{r}_u(u,v) = 2u\widehat{\imath} + v\,\widehat{k}$
- $\overrightarrow{r}_v(u,v) = 2v\widehat{\jmath} + u\,\widehat{k}$
- $\overrightarrow{r}_u(1,1) \times \overrightarrow{r}_v(1,1) = (2\widehat{\imath} + \widehat{k}) \times (2\widehat{\jmath} + \widehat{k}) = -2\widehat{\imath} - 2\widehat{\jmath} + 4\,\widehat{k}$

Luego, el plano tangente buscado es el plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular al vector $(-2,-2,4)$. Luego su ecuación es:

$$-2(x-1) - 2(y-1) + 4(z-1) = 0$$

es decir,

$$x + y - 2z = 0.$$



10.4 Area de una superficie paramétrica

Definición. El área de una superficie S suave, definida paramétricamente, con ecuaciones paramétricas (10.1), viene dada por

$$\text{Area de } S = \iint_D ||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||dA \tag{10.6}$$

Ejemplo 10.5. Verificar que el área de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.

Desarrollo: Trabajando con las ecuaciones (10.4), se tiene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_u &= (-a\sin v\cos u, a\sin v\cos u, 0) \\ \overrightarrow{r}_v &= (a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, -a\sin v) \end{aligned}$$

Luego, $||r_u \times r_v|| = a^4\sin^2 v$. Luego,

$$A(S) = \iint_D ||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{a^4\sin^2 v}\,dudv = 4\pi a^2.$$

10.5 Actividades Sección 10

1) Verificar que las ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u,v) = u\sin\alpha\cos v \quad y = y(u,v) = u\sin\alpha\sin v \quad z = z(u,v) = u\cos\alpha$$

con $u \geq 0$ y $v \in [0, 2\pi]$, representan un cono.

2) Encontrar una representación paramétrica de las siguientes superficies

a) $z = x^2 + 3y^2$.

b) $3x + 2y - z = 4$

c) $y^2 + z^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

3) Hallar una ecuación del plano tangente a las superficies paramétricas:

a) $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v$; en su punto $(2, 3, 0)$.

b) $x = u^2 - v^2, \quad y = u + v, \quad z = u^2 + 4v$; en su punto $(-1/4, 1/2, 2)$.

c) $x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u^2 + v^2$; en su punto correspondiente a $u = 1$ y $v = 1$.

Respuesta. (a) $3x - y + 3z = 3$

4) Verificar que la ecuación del plano tangente a la superficie S de función vectorial $\overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ en su punto $P = (u_0, v_0)$, se puede presentar por

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0$$

5) Comprobar, a partir de (10.6), que área de una superficie con ecuación explícita $z = f(x,y)$ con dominio D, viene dada por

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dA$$

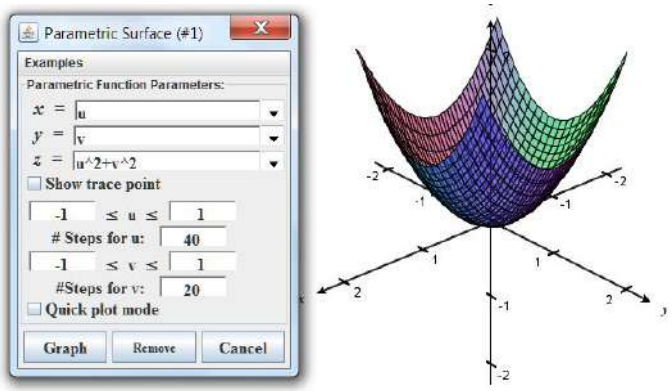
6) Comprobar que el área del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \leq z \leq a$ es $\pi\sqrt{2}a^2$.

7) Verificar que el área del paraboloide $S: \ z = x^2 + y^2$, para $0 \leq z \leq 6$ es $62\pi/3$.

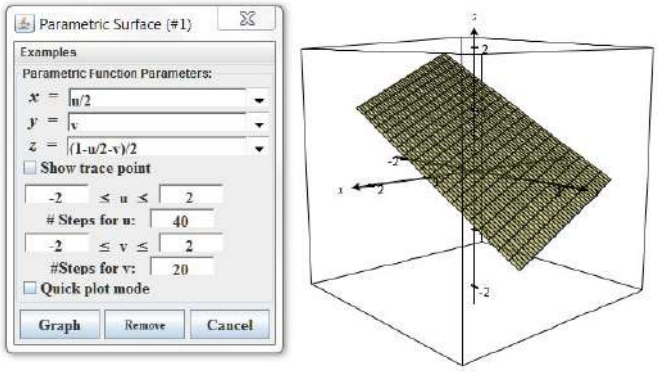
8) Comprobar que el área de la parte del plano $x + 2y + z = 4$ que se encuentra al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ es igual a $4\sqrt{6}\,\pi$.

10.6 APÉNDICE: Ecuaciones paramétricas de algunas superficies

1) Paraboloide*

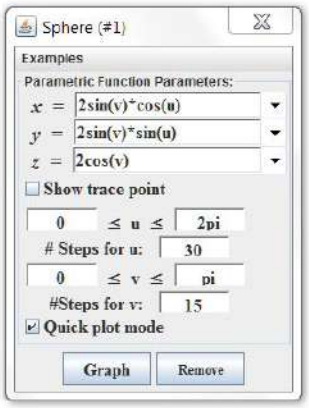


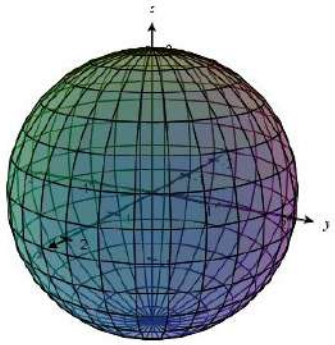
2) Planos



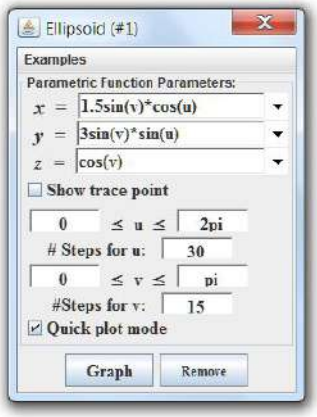
3) Esfera

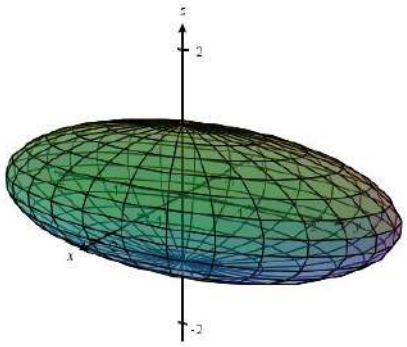
* Los siguientes gráficos se realizaron con el applet CalcPlot3D, disponible (on line) en http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/calcNSF/JavaCode/CalcPlot3D.htm



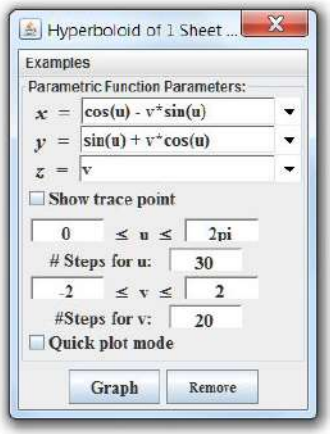


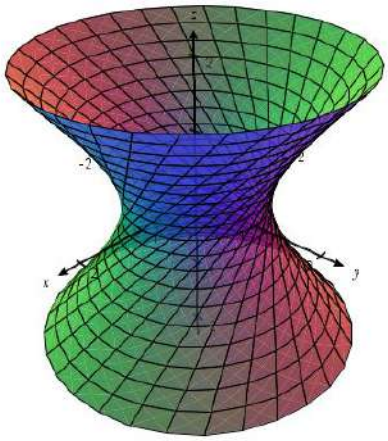
4) Elipsoide



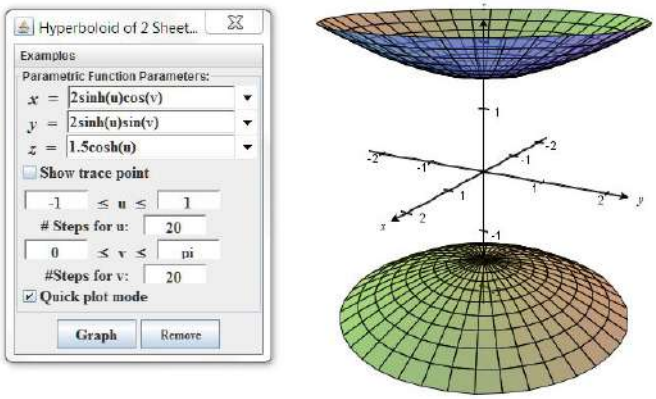


5) Hiperboloide de una hoja

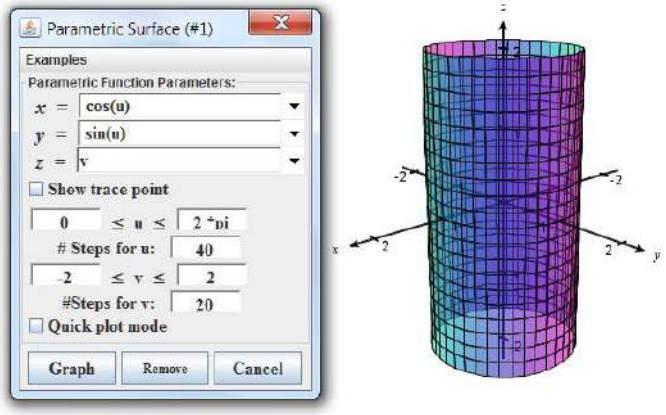




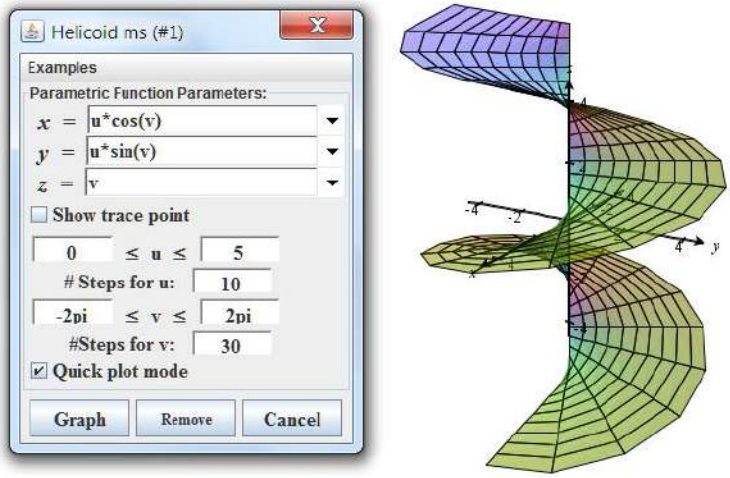
6) Hiperboloide de dos hojas



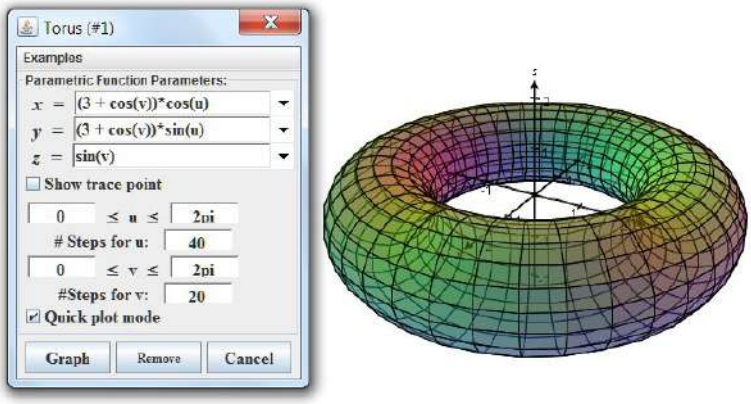
7) Cilindro



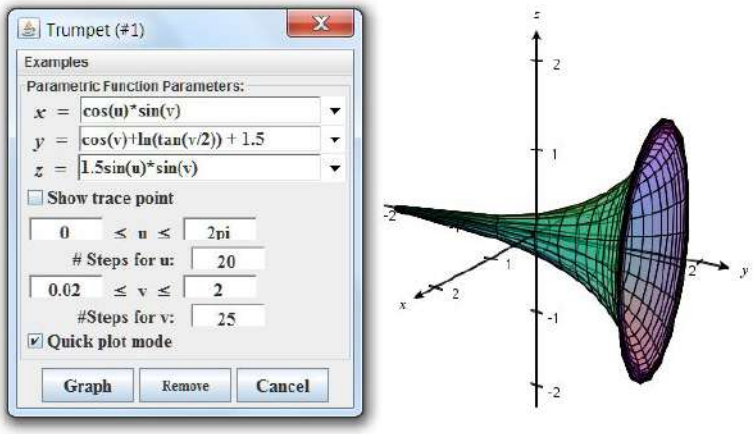
8) Helicoide



9) Toro


Torus (#1)
Examples
Parametric Function Parameters:
x = (3 + cos(v))*cos(u)
y = (3 + cos(v))*sin(u)
z = sin(v)
Show trace point
0 ≤ u ≤ 2pi
Steps for u: 40
0 ≤ v ≤ 2pi
#Steps for v: 20
Quick plot mode
Graph
Remove
Cancel

10) Trompeta


Trumpet (#1)
Examples
Parametric Function Parameters:
x = cos(u)*sin(v)
y = cos(v)+ln(tan(v/2)) + 1.5
z = 1.5sin(u)*sin(v)
Show trace point
0 ≤ u ≤ 2pi
Steps for u: 20
0.02 ≤ v ≤ 2
#Steps for v: 25
Quick plot mode
Graph
Remove
Cancel