SECCIÓN 11

Integrales de Superficie

11.1 Introducción

Aquí se presenta un nuevo tipo de integral: *integral de superficie* (IdS). Esta integrales generalizan las integrales dobles de funciones de 2 variables. En primer lugar se revisan la integrales de superficies para campos escalares, en los casos en que la superficie viene definida explícita o paramétricamente. En segundo lugar se revisan las integrales de superficie para campos vectoriales.

11.2 IdS de un campo escalar sobre una superficie definida paramétricamente

Sea S una superficie correspondiente al gráfico de la función definida paramétricamente por

$$\overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

de $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, y f un campo escalar continuo cuyo dominio (en $\mathbb{R}^3$) incluye a S.

En este caso, la *integral de superficie* de la función f sobre la superficie S, se anota y define por

$$\boxed{\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} f(\overrightarrow{r}(u,v)) \, ||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|| \, dA} \tag{11.1}$$

Ejemplo 11.1. Evaluar la integral de superficie $\int\int_S xy\, dS$, donde S es la superficie $\overrightarrow{r}(u,v) = (u\sin v, u\cos v, u^2)$, con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Desarrollo: Es claro que:

- $\overrightarrow{r}_u = (\sin v, \cos v, 2u)$
- $\overrightarrow{r}_v = (u\cos v, -u\sin v, 0)$
- $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (2u^2 \sin v, 2u^2\cos v, -u)$
- $||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|| = u\sqrt{1+4u^2}$
- $f(\overrightarrow{r}(u,v)) = u^2 \sin v \cos v$

Luego,

$$\iint\limits_S xy\, dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 u^2 \sin v \cos v \; u\sqrt{1+4u^2}\; dudv = \frac{5\sqrt{5}}{48} + \frac{1}{240}.$$

Ejemplo 11.2. Evaluar la integral de superficie $\iint\limits_S z^4\, dS$, donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a > 0$.

Desarrollo: Es claro que, en este caso, $f(x,y,z) = z^4$. Parametrizando la esfera S:

$$\overrightarrow{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$$

sobre la región D:

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

Entonces:

- $f(\overrightarrow{r}(\theta,\phi)) = f(x,y,z) = z^4 = a^4\ cos^4\phi$
- $\overrightarrow{r}_\phi \times \overrightarrow{r}_\theta = a^2\sin^2\phi\cos\theta\,\hat{\imath} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\,\hat{\jmath} + a^2\sin\phi\cos\phi\,\widehat{k}$
- $||\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_\phi|| = a^2\sin\phi$

Luego, aplicando (11.1):

$$\iint\limits_S z^4\, dS = \iint\limits_D a^4 cos^4\phi ||\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_\phi|| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^6 \cos^4\phi \sin\phi d\phi d\theta = \frac{4}{5}\pi a^6.$$

Nota 11.1.

- Al igual que para las integrales dobles, cuando $f(x,y,z) \equiv 1$, el valor de la integral de superficie corresponde al área de la superficie S, es decir

$$\text{área de}(S) = \iint\limits_S 1\cdot dS = \iint\limits_D ||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||\, dA$$

- Cuando la superficie S es la unión de un número finito de superficies suaves, digamos que $S = S_1 + S_2 + S_3$, entonces

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS + \iint_{S_3} f(x,y,z)dS$$

11.2.1 IdS de campo escalar sobre una superficie definida explícitamente

Sea S una superficie correspondiente al gráfico de la función C^1, $z = g(x,y)$ de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, y f un campo escalar continuo cuyo dominio (en $\mathbb{R}^3$) incluye a S.

La *integral de superficie* del campo escalar f sobre la superficie S, se anota y define por

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{[g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2 + 1}\, dA \tag{11.2}$$

Ejemplo 11.3. Evaluar la integral de superficie $\iint_S x\, dS$, donde S es la superficie definida por $z = x^2 + y$ y D es la región $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Desarrollo: En este caso $z = g(x,y) = x^2 + y$ y $f(x,y,z) = x$. Entonces, aplicando (11.3):

$$\iint_S x\, dS = \iint_D x\sqrt{[g_x]^2 + [g_y]^2 + 1}dxdy = \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{4x^2+2}dxdy = \frac{\sqrt{2}}{3}(3\sqrt{3} - 1)$$

Nota 11.2.

1) Cuando $f(x,y,z) \equiv 1$, el valor de la integral de superficie corresponde al área de la superficie S, es decir

$$\text{área de}(S) = \iint_D \sqrt{[g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2 + 1}\, dA$$

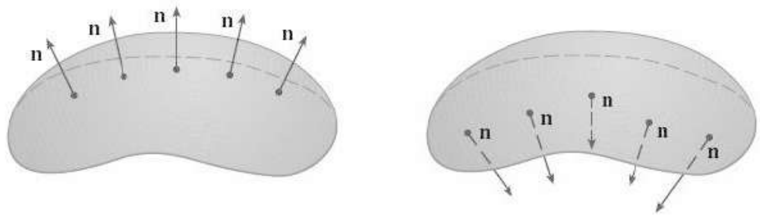
2) Cuando la superficie S viene dada por la función C^1, $y = g(x,z)$ de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, la *integral de superficie* del campo escalar f sobre la superficie S, viene dada por

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,g(x,y),z)\sqrt{[g_x(x,y)]^2 + [g_z(x,y)]^2 + 1}\, dA \tag{11.3}$$

11.3 Superficies orientadas

Las integrales de superficies para un campo vectorial se definen sobre *superficies orientadas*. Por esta razón se consideran solamente superficies de 2 lados* y que tengan un plano tangente en cada uno de sus puntos (excepto sus puntos frontera). Para esta superficies se tendrán 2 vectores unitarios normales en cada uno de sus puntos: $\widehat{n}_1$ y $\widehat{n}_2 = -\widehat{n}_1$

* Un clásico ejemplo de una superficie que solo tiene un solo lado, es la llamada "cinta de Moebius". Un dibujo de ella aparece al final de esta sesión.



Ahora bien, una superficie S se dice *orientable*, cuando es posible elegir un vector unitario normal en cada uno de sus puntos, de modo que este vector varíe continuamente en S. La elección de este vector entrega una orientación de S (una vez elegido este vector, se dice que la curva esta *orientada*). Toda superficie orientable tiene 2 posibles orientaciones.

Así, por ejemplo

- Para una superficie $z = g(x, y)$, se suele considerar la orientación inducida por el siguiente vector tangente unitario:
$$\widehat{n} = \frac{-g_x\,\widehat{\imath} - g_y\,\widehat{\jmath} + \widehat{k}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}}$$
En este caso como la componente de $\widehat{k}$ es positiva, se dice que esta elección orienta la superficie *hacia arriba*.

- Para una superficie suave orientable $\overrightarrow{r}(u, v)$, se tiene la orientación entregada por
$$\widehat{n} = \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||}$$

- Para una superficie cerrada, se acostumbra considerar la orientación positiva cuando se eligen los vectores normales unitarios *apuntando hacia afuera* de la superficie.

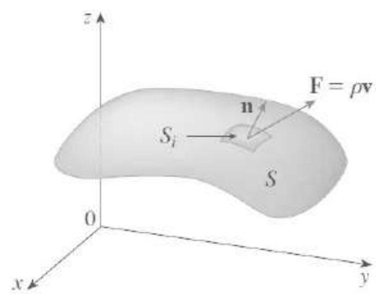
- En general, para evitar ambigüedades, en las actividades se indicará la orientación con la cual se deberá trabajar.

- Una superficie S orientada, se suele anotar por $\overrightarrow{S}$.

Ejemplo 11.4. Verificar que la orientación positiva en una esfera
$$\overrightarrow{r}(\phi, \theta) = a \sin\phi \cos\theta\,\widehat{\imath} + a \sin\phi \sin\theta\,\widehat{\jmath} + a \cos\phi\,\widehat{k}$$
viene inducida por los vectores unitarios $\frac{1}{a}\overrightarrow{r}(\phi, \theta)$.

Desarrollo: : Del ejemplo (8.2), se tiene:
$$\widehat{n} = \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||} = \sin\phi\cos\theta\,\widehat{\imath} + \sin\phi\sin\theta\,\widehat{\jmath} + \cos\phi\,\widehat{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{r}(\phi, \theta)$$
Observar que estos vectores apuntan en la misma dirección que $\overrightarrow{r}(\phi, \theta)$, es decir, ellos apuntan *hacia afuera* de la esfera. Luego, ellos inducen la orientación positiva de la esfera.

11.4 Flujo de un campo vectorial



Supongamos que $\overrightarrow{v}$ es el campo de velocidades de un fluido en espacio (con densidad ρ) y que S es una superficie (permeable al fluido) y orientada por el vector unitario $\widehat{n}$. Luego el caudal masa por unidad de tiempo, por unidad de área, es $\rho\overrightarrow{v}$. Aquí surge la pregunta: ¿cuál es la cantidad total de masa del fluido que atraviesa S, en la dirección de $\widehat{n}$, por unidad de tiempo?. Esta cantidad recibe el nombre de *flujo* de $\overrightarrow{v}$ a través de S.

Haciendo una partición de S, en pequeñas porciones de superficie S_i y eligiendo un punto P_i en S_i, se tiene que el caudal que atraviesa S_i, viene dado, aproximadamente, por $\rho\,\overrightarrow{v}(P_i)\cdot\hat{n}$ area(S_i). Luego, el flujo total, en toda la superficie S es, aproximadamente: $\sum_{i=1}^{m}\rho\,\overrightarrow{v}(P_i)\cdot\hat{n}$ área(S_i), y tomando el límite cuando area(S_i) tiende a 0 (aquí se ha usado el típico razonamiento de *tipo integral*), se tiene que el flujo total neto en S viene dado por

$$\iint_S \rho\,\overrightarrow{v}\cdot\widehat{n}\,d\overrightarrow{S}$$

Integrales de este tipo, se extienden a cualquier campo vectorial $\overrightarrow{F}$ y reciben el nombre de *integrales de superficies sobre campos escalares*:

11.5 IdS de un campo vectorial sobre una superficie definida paramétricamente

Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y S una superficie orientada definida paramétricamente por $\overrightarrow{r}(u,v)$. La *integral de superficie* de $\overrightarrow{F}$ sobre la sobre la superficie S, se anota y define por

$$\boxed{\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v))\cdot(\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v)\,dA} \tag{11.4}$$

Recordando que $dS = ||\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v||\,dA$ y $\widehat{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v}{||\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v||}$, y anotando $d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{n}\,dS$, también se suele escribir:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} \;=\; \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}\, dS \tag{11.5}$$

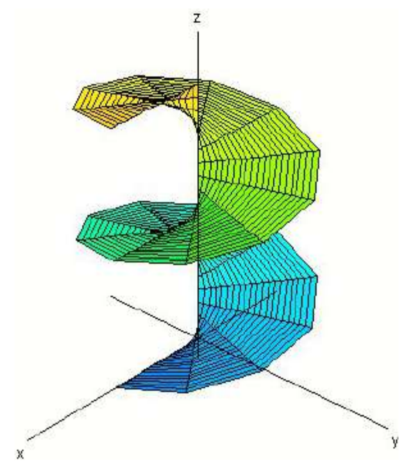
Nota 11.3. La integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie S también recibe el nombre de flujo de $\overrightarrow{F}$ a través de S.

Ejemplo 11.5. Calcular

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S},$$

para el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\widehat{\imath} + x\,\widehat{\jmath} + z^2\,\widehat{k}$ y S es el helicoide de ecuaciones paramétricas:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = u\cos v\,\widehat{\imath} + u\sin v\,\widehat{\jmath} + v\,\widehat{k}, \quad 0 \le u \le 1, \;\; 0 \le v \le 4\pi$$



Helicoide

Desarrollo: Es claro que:

- $\overrightarrow{r}_u = \cos v\,\widehat{\imath} + \sin v\,\widehat{\jmath}$
- $\overrightarrow{r}_v = -u\sin v\,\widehat{\imath} + u\cos v\,\widehat{\jmath} + \widehat{k}$
- $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \sin v\,\widehat{\imath} - \cos v\,\widehat{\jmath} + u\,\widehat{k}$
- $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) = u\sin v\,\widehat{\imath} + u\cos v\,\widehat{\jmath} + v^2\,\widehat{k}$

Luego,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{4\pi}\int_0^1 (-u\cos(2v) + uv^2)\,du\,dv = \frac{32\pi^3}{3}.$$

Actividad 11.1. Verificar que la integral de superficie (11.5) se expresa por

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D \overrightarrow{F}(x,y,g(x,y))\cdot(-g_x\,\widehat{\imath} - g_y\,\widehat{\jmath} + \widehat{k})\;dA$$

cuando S viene definida explícitamente por la ecuación $z = g(x,y)$ y se ha elegido su orientación *hacia arriba*.

Actividad 11.2. Comprobar que

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \frac{713}{180},$$

si $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ y S es la superficie correspondiente a la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra sobre el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le x \le 1$ y tiene orientación hacia arriba.

11.6 Algunas aplicaciones de las integrales de superficie

1) *Valor promedio.* El valor promedio de un campo escalar $u = f(x,y,z)$ sobre una superficie S, se define por:

$$\frac{1}{\text{área de } S}\iint_S f(x,y,z)dS$$

2) *Centroide.* Las coordenadas del centroide $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ de una superficie S de área A, se definen por:

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_S x dS, \quad \overline{y} = \frac{1}{A}\iint_S y dS, \quad \overline{z} = \frac{1}{A}\iint_S z dS$$

3) *Flujo de un fluido.* Si $\overrightarrow{F}$ es el campo vectorial de velocidad de un fluido que fluye a través de la superficie S, de ecuación $z = f(x,y)$ y definida en D, se define el flujo de S a través de S a la integral de superficie:

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}.$$

11.7 Actividades Sección 11

1) Calcular la integral de superficie de $f(x, y, z) = xyz$ cuando S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre

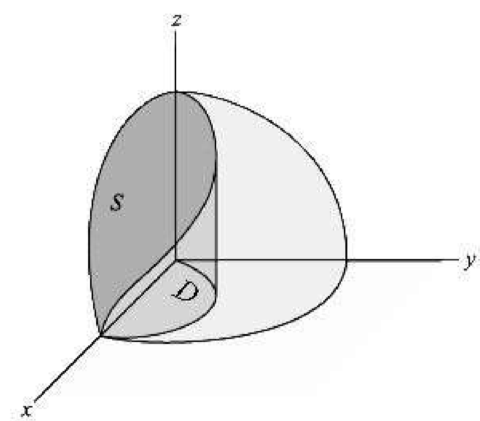
   a) los planos $y = 1$, $y = 3$. (Resp. 0).

   b) los planos $y = 1$, $y = 3$ y el primer octante. (Resp. 16).

2) Comprobar que $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$, donde S es la superficie:

$$S:\ r(u,v) = u\cos(v)\widehat{i} + u\sin(v)\widehat{j} + v\widehat{k}; \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

3) Calcular el área de la superficie de una esfera de radio a cortada por un cilindro que tiene este radio como diámetro.



Resp. $(\pi - 2)a^2$

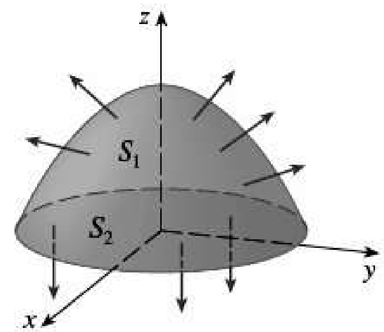
4) Verificar que la integral de superficie de $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\,\overrightarrow{k}$ sobre la superficie S correspondiente a la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ del primer octante, es igual a 18.

5) El campo de velocidad de un fluido viene dado por $F(x, y, z) = (y, -z, 8)$ y S es la superficie correspondiente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ubicada sobre la región D del plano XY acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Verificar que el flujo de F a través de S es igual a 32π (unidades cúbicas de volumen por unidad de tiempo).

6) Si $\overrightarrow{F}(x, y, z) = y\ \widehat{i} + x\ \widehat{j} + z\ \widehat{k}$ y S la frontera de la región sólida encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$. Verificar que $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{\pi}{2}$.

   Observar que en este caso $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 es la parte superior (paraboloide) de la superficie y S_2 la parte inferior (circulo). Luego:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$$

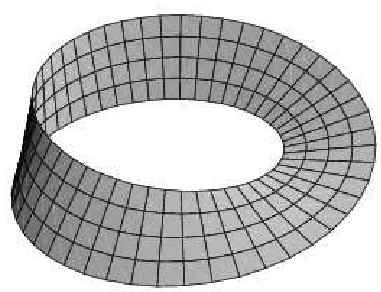


7) Sea $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x^2\,\widehat{\imath} + xy\,\widehat{\jmath} + 2z\,\widehat{k}$ y S el cubo en el primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Verificar que el flujo de $\overrightarrow{F}$ a través de S, calculando 6 integrales de superficie (una para cada cara del cubo), es igual a 3.5.

8) Considerar:

   - El campo escalar $f(x, y, z) = x + y + zg(x - y)$, donde g es una función real con derivada continua
   - S la superficie $x + y = 10$, con $0 \leq z \leq 8$

   Verificar que el flujo del gradiente de f es igual a 128.



Banda de Moebius