SECCIÓN 12

Teorema de Gauss

12.1 Introducción

En la presente sesión se revisa un teorema clave del cálculo vectorial, el *Teorema de Gauss* o *Teorema de la divergencia.* Este teorema establece una relación entre una integral de superficie sobre una superficie cerrada y una integral triple sobre el sólido delimitado por esta superficie.

*Carl Friedrich Gauss**

* Matemático alemán, 1777-1855. Gauss trabajó en una amplia variedad de campos tanto de la matemática como de la física incluyendo la teoría de números, análisis, geometría diferencial, geodesia, magnetismo, astronomía y óptica. Su trabajo ha tenido una gran influencia en diversas áreas.

12.2 Primera forma vectorial del Teorema de Green

Recordemos que si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son campos escalares C^1 en un dominio D de $\mathbb{R}^2$ y C la curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de la región D, entonces el teorema de Green establece que:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy \tag{12.1}$$

Sea C dada por su ecuación vectorial:

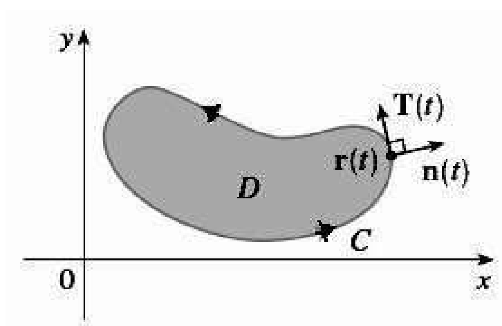
$$C: \ \overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\widehat{i} + y(t)\,\widehat{j}, \quad a \le t \le b$$

entonces el vector tangente unitario a C, viene dado

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{x'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||}\widehat{i} + \frac{y'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||}\widehat{j}$$

de donde el vector normal unitario exterior es

$$\overrightarrow{n}(t) = \frac{y'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||}\widehat{i} - \frac{x'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||}\widehat{j}$$



Luego, haciendo $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\widehat{\imath} + Q(x,y)\widehat{\jmath}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\oint_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds &= \int_a^b (\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n})(t)||\overrightarrow{r}'(t)||dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t),y(t))y'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||} - \frac{Q(x(t),y(t))x'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||}\right] ||\overrightarrow{r}'(t)||dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t))y'(t)dt - R(x(t),y(t))x'(t)dt \\
&= \int_C Pdy - Qdx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \nabla\cdot\overrightarrow{F}\,dxdy
\end{aligned}$$

Así entonces, la primera forma vectorial del Teorema de Green, que recibe el nombre de *Teorema de Gauss* (o de la *divergencia*) *en el plano*, es:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \iint_D \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dA \tag{12.2}$$

que establece que la integral de línea de la componente normal de $\overrightarrow{F}$ a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de $\overrightarrow{F}$ sobre la región D encerrada por la curva C.

Nota 12.1. El teorema de Gauss en el plano tiene una extensión natural al espacio $\mathbb{R}^3$, conocido con el nombre de Teorema de Gauss:

12.3 Teorema de Gauss

Sean

- E una región sólida simple*, o reunión de superficies simples.
- S la superficie cerrada correspondiente a la frontera de E con orientación positiva†.
- $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a E,

entonces

$$\boxed{\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_E div(\overrightarrow{F})\, dV} \tag{12.3}$$

o bien,

$$\boxed{\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV} \tag{12.4}$$

12.3.1 Comentarios sobre la fórmula (12.3), correspondiente al Teorema de Gauss

:

1) La integral del lado izquierdo es una integral de superficie, es el flujo hacia afuera de $\overrightarrow{F}$, a través de S.
2) El vector normal $\overrightarrow{n}$, sobre la superficie S es elegido *apuntando hacia afuera*, de modo que corresponde a la orientación positiva de S.

* Aquí E corresponde a uno de los tipos considerados en el cálculo de las integrales triples en $\mathbb{R}^3$.
† Orientación positiva corresponde a trabajar con el vector normal unitario *exterior*.

3) La integral del lado derecho es una integral triple de volumen, del campo escalar $div(\overrightarrow{F})$, sobre el sólido E.

Ejemplo 12.1. Comprobar el teorema de Gauss para $\overrightarrow{F}(x, y, z) = y\widehat{i} + x\widehat{j} + z\widehat{k}$ y E la región sólida encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.
Desarrollo: En la actividad 6 del tema sobre integrales de superficies se verificó que

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{\pi}{2} \tag{12.5}$$

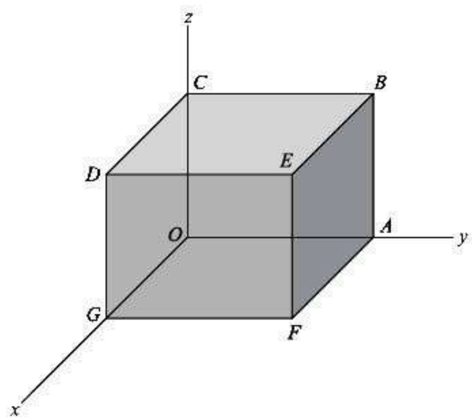
Ahora bien,

$$\iiint_E div(\overrightarrow{F})\, dV = \iiint_E dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r dz dr d\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{12.6}$$

Luego (12.5) y (12.6) comprueban (12.3) para el campo vectorial y sólido de este ejemplo.

12.4 Actividades Sección 12

1) Verificar el teorema de Gauss para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2x-z)\widehat{\imath} + x^2y\widehat{\jmath} - xz^2\widehat{k}$ tomada sobre la superficie S correspondiente al siguiente cubo de lado 1:



Resp.: $\displaystyle\iint_{DEFG} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 1.5$, $\displaystyle\iint_{ABCO} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 0.5$, $\displaystyle\iint_{ABEF} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 1/3$, $\displaystyle\iint_{OGDC} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 0$

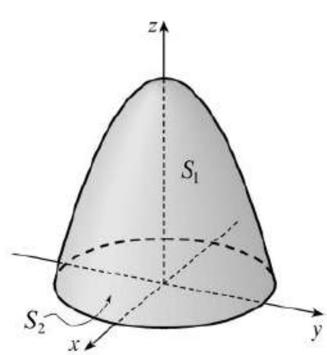
$\displaystyle\iint_{BCDE} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = -0.5$, $\displaystyle\iint_{AFGO} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 0$, $\displaystyle\iint_{S} \overrightarrow{F}\cdot dS = 11/6$, $\displaystyle\iiint_{V} div(\overrightarrow{F})dV = 11/6$.

2) Verificar el teorema de Gauss para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2\,\hat{\imath} + xy\,\hat{\jmath} + z\,\widehat{k}$ y S la superficie acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano XY.

Resp.: $\displaystyle\iiint_{V} div(\overrightarrow{F})dV = 8\pi$. $\displaystyle\iint_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 8\pi$, $\displaystyle\iint_{S_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = 0$.

Donde S_1 es la parte de la superficie en el paraboloide, y

S_2 la parte de la superficie en el plano XY.



3) Comprobar que $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{r} \cdot \hat{n} dS = 3vol(V)$, donde S es una superficie cerrada *encerrando* un sólido V y $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

4) Calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\widehat{\imath} + xe^z\,\widehat{\jmath} + z^3\,\widehat{k}$ a través de la superficie acotada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$. **Resp.**: $\frac{9\pi}{2}$.

5) Calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin z)\,\widehat{\imath} + (y^3 + z \sin x)\,\widehat{\jmath} + 3z\,\widehat{k}$ a través de la superficie acotada por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$. **Resp.**: $\frac{194\pi}{5}$.

6) Usar el teorema de la divergencia para calcular $\int\int_S (2x + 2y + z^2) dS$, donde S es la esfera unitaria centrada en el origen.

   Hint: En este caso $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} = 2x + 2y + z^2$ y como para la esfera $\overrightarrow{n} = \frac{x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}$, se tiene que $\overrightarrow{F} = 2\,\widehat{\imath} + 2\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}$. **Resp.**: $\frac{4\pi}{3}$

7) Sea S una superficie cerrada y $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial de clase C^2. Establecer si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar su respuesta.

$$\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

8) Sea E un sólido con frontera S. Comprobar que

   a) $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{a} \cdot \hat{n}\, dS = 0$, donde $\overrightarrow{a}$ es un vector constante.

   b) $\displaystyle vol(E) = \frac{1}{3}\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$, donde $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}$.

   c) $\displaystyle\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{S} = 0$

9) Sean

   - $\overrightarrow{r} = x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}$
   - $r = ||\overrightarrow{r}||$
   - S la superficie correspondiente a la esfera en $\mathbb{R}^3$, centrada en el origen y de radio a

   Considerar el siguiente campo vectorial:

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{r} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}), \quad k \text{ constante real}$$

a) Encontrar la $div(\overrightarrow{F})$ **Resp.**: $div(\overrightarrow{F}) = 0$

b) Comprobar que, al usar directamente el Teorema de Gauss, se obtiene que el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F}$ sobre S es igual a 0.

$$\textbf{Resp.}:\ Flujo = \iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D div(\overrightarrow{F})dA = \iint_D 0\,dA = 0$$

c) Usando la típica parametrización de la esfera:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = (a\sin v\cos u,\ a\sin v\sin u,\ a\cos v), \quad 0\le v\le\pi, \quad 0\le u\le 2\pi$$

encontrar el vector normal a S, $\overrightarrow{n}$, que apunta hacia afuera de S (*orientación positiva*)

Resp.: $\overrightarrow{r}_u = (-a\sin v\sin u,\ a\sin v\cos u,\ 0)$, $\overrightarrow{r}_v = (a\cos v\cos u,\ a\cos v\sin u,\ -a\sin v)$ de donde, $\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v = (-a^2\sin^2 v\cos u,\ -a^2\sin^2 v\sin u,\ -a^2\sin v\cos u)$.

Luego, es el vector normal a S buscado (que apunta hacia afuera de S) es: $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r}_v\times\overrightarrow{r}_u = (a^2\sin^2 v\cos u,\ a^2\sin^2 v\sin u,\ a^2\sin v\cos u)$

d) Verificar, usando la definición correspondiente, que el flujo de este campo vectorial sobre S es igual a 4π.

Resp.:

$$Flujo = \iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v))\cdot(\overrightarrow{r}_v\times\overrightarrow{r}_u)\,dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin v\,dv\,du = 4\pi$$

e) Observar que los resultados obtenidos en (b) y (d) no son compatibles. Explicar en detalle la razón por la cual se obtiene esta contradicción.

Solución:

La inconsistencia entre los resultados (b) y (d) se debe a que el resultado en (b) está incorrecto, pues en la situación plantada no es posible usar el Teorema de Gauss, ya que este campo vectorial no es C^1 en el interior de la esfera de radio a