SECCIÓN 13

Teorema de Stokes

13.1 Introducción

En la presente sesión se revisa el último teorema clave del cálculo vectorial, el *teorema de Stokes*. Este teorema establece una relación entre una integral de línea sobre una curva del espacio y una integral de superficie. Si bien este teorema lleva el nombre del físico matemático Stokes*, en realidad éste fue descubierto por el, también físico y matemático irlandés William Thomson†, más conocido por Lord Kelvin.

George Gabriel Stokes

William Thomson

* Matemático y Físico irlandés, 1819-1903. Stokes estableció la ciencia de la hidrodinámica con su ley de viscosidad que describe la velocidad de una pequeña esfera a través de fluido viscoso. † Matemático y Físico irlandés, 1824-1907. Thomson hizo importantes contribuciones en muchas áreas de la física, incluyendo la electricidad, magnetismo y termodinámica.

13.2 Segunda forma vectorial del Teorema de Green

Recordemos que si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son campos escalares C^1 en un dominio D de $\mathbb{R}^2$ y C la curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de la región D, entonces el teorema de Green establece que:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy \tag{13.1}$$

Con respecto al campo vectorial

$$\overrightarrow{F} = P\widehat{\imath} + Q\widehat{\jmath}$$

se tiene

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{13.2}$$

y su rotor viene dado por

$$rot(\overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k} \tag{13.3}$$

luego,

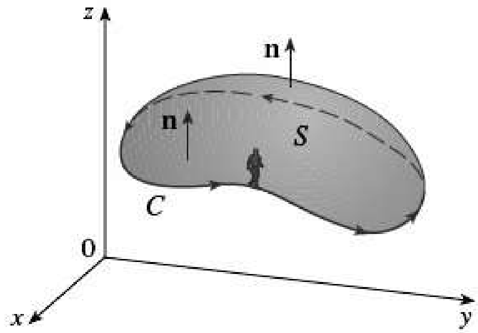
$$rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k} \cdot \widehat{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \tag{13.4}$$

Así entonces, la segunda forma vectorial del Teorema de Green, que recibe el nombre de *Teorema de Stokes en el plano*, luego de (13.1), (13.2) y (13.4) es:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D (rot\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{k} dA \tag{13.5}$$

que establece que la integral de línea de la componente tangencial de $\overrightarrow{F}$ a lo largo de C es igual a la integral doble de la componente vertical del $rot(\overrightarrow{F})$ sobre la región D encerrada por la curva C.

Nota 13.1. El *teorema de Green en el plano* (13.5) tiene una extensión natural al espacio $\mathbb{R}^3$, conocido con el nombre de *Teorema de Stokes*. Este teorema relaciona una integral de superficie sobre una superficie orientada S con una integral de línea sobre la curva C correspondiente a la frontera de dicha superficie. La orientación de la superficie S induce la orientación positiva de su curva frontera C, de modo que la orientación de la curva y la dirección de los vectores normales a S cumplen *la regla de la mano derecha*. En otras palabras, *si se camina en la dirección positiva de C, manteniendo la cabeza en la dirección del vector normal a S, la superficie se mantiene a la izquierda.*



Orientación positiva de C inducida por la orientación positiva de S

13.3 Teorema de Stokes

Sean

- S una superficie paramétrica $\overrightarrow{d}(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v))$, con $(u,v) \in D$, orientada y suave en $\mathbb{R}^3$ (con vector unitario $\widehat{n}$)
- $C:\ \overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $a \leq t \leq b$, la curva suave, cerrada y simple correspondiente a la frontera de S, $C = \partial(S)$, con orientación coherente con la orientación de $\widehat{n}$ (regla de la mano derecha para C y $\widehat{n}$ *)
- $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a S,

entonces

$$\boxed{\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS} \tag{13.6}$$

o, equivalentemente

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt = \iint\limits_D (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot (\overrightarrow{d}_u \times \overrightarrow{d}_v)\, dA} \tag{13.7}$$

13.3.1 Comentarios sobre la fórmula (13.6), correspondiente al Teorema de Stokes

1) La integral del lado izquierdo es una integral de línea. Se puede interpretar así:

   a) Si $\overrightarrow{F}$ es un campo de fuerzas, como el trabajo realizado por $\overrightarrow{F}$, al mover una partícula a lo largo de la curva cerrada C.

* Ver Nota (13.1)

b) Si $\overrightarrow{F}$ es un campo de velocidades del flujo de un fluido, como la circulación de $\overrightarrow{F}$, a lo largo de la curva cerrada C,

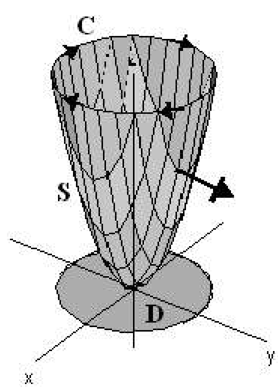
2) La integral del lado derecho es una integral de superficie. Es el flujo del rotacional de $\overrightarrow{F}$ (el rotacional de un campo vectorial, $rot(\overrightarrow{F})$, es nuevamente un campo vectorial) a través de la superficie S.

3) La orientación de la curva C y de la superficie S son compatibles.

Ejemplo 13.1. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\widehat{i} - x\widehat{j} = (y,-x,0)$$

sobre el paraboloide $S: \ z = x^2 + y^2$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ como su frontera.



Desarrollo: Se debe comprobar que

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n} dS$$

1) Cálculo de $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

$\overrightarrow{r}$: $\quad x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 1 \quad t \in [2\pi, 0]$
Luego,
$d\overrightarrow{r}$: $\quad dx = -\sin t\, dt \quad dy = \cos t\, dt \quad dz = 0$

Entonces

$$\begin{aligned} \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \oint (\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t\, dt, \cos t\, dt, 0) \\ \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{2\pi}^{0} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned} \tag{13.8}$$

2) Cálculo de $\displaystyle\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS$.

Ahora, $rot(\overrightarrow{F}) = (0, 0, -2)$, $\overrightarrow{N} = (2x, 2y, -1)$ (¿por qué?). Luego,

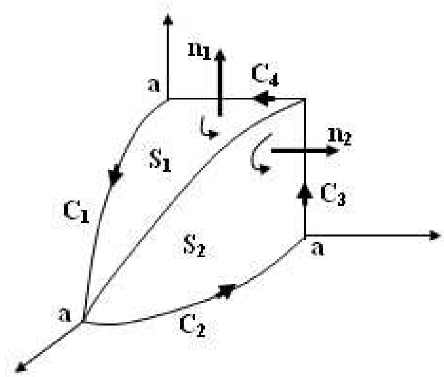
$$\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS = \iint_R 2dA = 2\pi \tag{13.9}$$

Luego, (10.8) y (10.9) verifican el teorema de Stokes para el caso pedido.

Ejemplo 13.2. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = 2yz\widehat{i} - (2 - x - 3y)\widehat{j} + (x^2 + z)\widehat{k} = (2yz, 2 - x - 3y, x^2 + z)$$

sobre el lado exterior de la superficie S, intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$, situada en el primer octante.



Desarrollo: Se debe comprobar que

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS$$

1) Cálculo de $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

En este caso $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde

C_1: $z = a\cos t$ $x = \sin t$ $y = 0$ $t \in [0, \pi/2]$

Luego,

$$dz = -a\sin t\, dt \quad dx = a\cos t\, dt \quad dy = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \oint (2yz, 2 - x - 3y, x^2 + z) \cdot (dx, dy, dz) \\
&= \int_0^{\pi/2} (a^3 \sin^3 t - a^2 \sin t \cos t)dt \\
&= -\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}a^3
\end{aligned} \tag{13.10}$$

C_2: $x = a\cos t$ $y = \sin t$ $z = 0$ $t \in [0, \pi/2]$
Luego,
$dx = -a\sin t\, dt$ $dy = a\cos t\, dt$ $dz = 0$

Entonces

$$\begin{aligned}\oint_{C_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \oint (2yz, 2-x-3y, x^2+z)\cdot(dx,dy,dz)\\ &= \int_0^{\pi/2} (-a^2\cos^2 t - 3a^2\sin t\cos t + 2a\cos t)dt\\ &= -\frac{a^2\pi}{4} - \frac{3a^2}{2} + 2a \end{aligned} \tag{13.11}$$

C_3: $x = 0$ $z = t$ $y = a$ $t \in [0, a]$
Luego,
$dx = 0$ $dz = dt$ $dy = 0$

Entonces

$$\begin{aligned}\oint_{C_3} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \oint (2yz, 2-x-3y, x^2+z)\cdot(dx,dy,dz)\\ &= \int_0^{a} t\, dt\\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned} \tag{13.12}$$

C_4: $x = 0$ $y = t$ $z = a$ $t \in [a, 0]$
Luego,
$dx = 0$ $dy = dt$ $dz = 0$

Entonces

$$\begin{aligned}\oint_{C_4} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \oint (2yz, 2-x-3y, x^2+z)\cdot(dx,dy,dz)\\ &= \int_0^{a} (-3t+2)\, dt\\ &= \frac{3a^2-4a}{2} \end{aligned} \tag{13.13}$$

Por lo tanto, luego de (10.10), (10.11), (10.12) y (10.13):

$$\begin{aligned}\oint_{C} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \oint_{C_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_3} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_4} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}\\ &= \left(-\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}a^3\right) + \left(-\frac{a^2\pi}{4} - \frac{3a^2}{2} + 2a\right) + \left(\frac{a^2}{2}\right) + \left(\frac{3a^2-4a}{2}\right)\\ &= -\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a) \end{aligned} \tag{13.14}$$

2) Cálculo de $\displaystyle\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS$.

Es claro que $rot(\overrightarrow{F}) = (0, 2y - 2x, -2y - 1)$.

Como $S = S_1 + S_2$, se tiene:

- $S_1 = \{(x, y, z) \,/\, z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}\,\}$, sobre
  $D_1 = \{(x, y) \,/\, 0 \leq x \leq a,\ \text{y } 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\,\}$
  $N_1 = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, 0, 1\right)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS &= \iint_{D_1} (0, 2y - 2x, -2y - 1) \cdot (\sqrt{a^2 - x^2}, 0, 1) dA \\
&= \iint_{D_1} (-2y - 1) dx dy \\
\text{coord. polares}: &\quad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq a \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^a (-2r\sin\theta - 1) r dr d\theta \\
&= -\frac{2}{3}a^3 - \frac{\pi}{4}a^2
\end{aligned} \tag{13.15}$$

- $S_2 = \{(x, y, z) \,/\, y = g(x, z) = \sqrt{a^2 - x^2}\,\}$, sobre
  $D_2 = \{(x, z) \,/\, 0 \leq x \leq a,\ \text{y } 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\,\}$
  $N_2 = (-g_x, 1, -g_z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, 1, 0\right)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\, dS &= \iint_{D_2} (0, 2y - 2x, -2y - 1) \cdot (\sqrt{a^2 - x^2}, 1, 0) dA \\
&= \iint_{D_2} (2y - 2x) dx dy \\
&= 2\iint_{D_2} (\sqrt{a^2 - x^2} - x) dx dz \\
\text{coord. polares}: &\quad x = r\cos\theta,\ z = r\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq a \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^a (r\sin\theta - r\cos\theta) r dr d\theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13.16}$$

Luego, de (10.15) y (10.16), se tiene:

$$\begin{aligned}\iint_S rot(\overrightarrow{F})\cdot\widehat{n}\,dS &= \iint_{S_1} rot(\overrightarrow{F})\cdot\widehat{n}\,dS + \iint_{S_2} rot(\overrightarrow{F})\cdot\overrightarrow{N}dA \\ &= -\frac{2}{3}a^3 - \frac{\pi}{4}a^2 = -\frac{a^2}{12}(3\pi+8a) \qquad (13.17)\end{aligned}$$

Finalmente, comparando (10.14) y (10.17), se verifica el teorema de Stokes para el caso en cuestión.

Ejemplo 13.3. Sea S la superficie correspondiente a la porción del plano $x+y+z=1$ que está en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$ y $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y,2x,0)$. Si C es la elipse que resulta de la intersección del plano con el cilindro, cuya proyección en el plano XY está orientada positivamente. Calcular, usando las definiciones correspondientes:

1) $\displaystyle\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$

Solución: Una parametrización de la curva C es

$$C:\ \overrightarrow{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 1-\sin t-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Luego, $\displaystyle\int_C \vec{F}\,d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(-\sin^2 t+2\cos^2 t)dt=\pi$

2) $\displaystyle\iint_S rot(\vec{F})\cdot d\overrightarrow{S}$

Solución:

Cálculos previos:

- $rot(\overrightarrow{F})=(0,0,1)$
- Una parametrización de la superficie S correspondiente a la porción del plano $x+y+z=1$ que se encuentra al interior del cilindro $x^2+y^1=1$, es

$$\overrightarrow{r}(u,v)=(u,v,1-u-v),\quad \text{con}\ \ (u,v)\in D,\ \text{donde}\ \ D=\{u^2+v^2\le 1\}$$

- $\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v=(1,1,1)$, que es el vector <u>consistente</u> con la orientación de la curva C.

Luego,

$$\iint_S rot(\vec{F})\cdot\,d\overrightarrow{S} = \iint_D (0,0,1)\times(1,1,1)\,dA = \iint_D 1\,dA = area(D)=\pi$$

3) Comparar y comentar en detalle, los resultados obtenidos en (a) y (b).

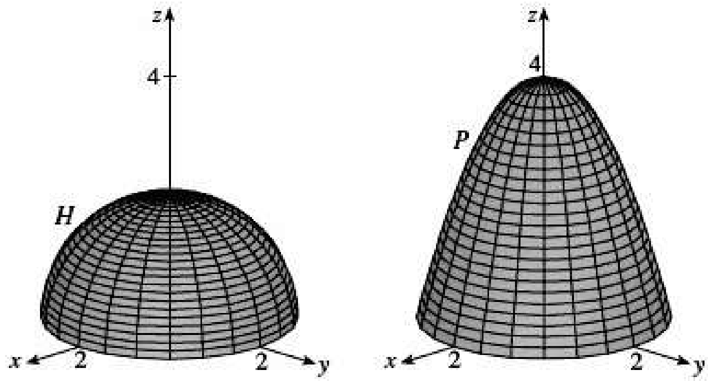
   Solución: En la situación planteada, se satisfacen todas las condiciones del Teorema de Stokes, el cual establece justamente que

$$\int_C \vec{F}\, d\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot d\overrightarrow{S}$$

   Por lo tanto, era seguro que los valores obtenidos en las partes (a) y (b) debían ser iguales.

13.4 Actividades Sección 13

1) En el siguiente dibujo H es una semi esfera y P una porción de un paraboloide



Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial con componentes C^1, explicar por qué:

$$\iint\limits_{H} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint\limits_{P} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$$

2) Verificar el teorema de Stokes para el campo $\overrightarrow{F} = (2xy - z, x + y + z, x^2 + y^2 + z)$ y S la superficie del hiperboloide $z = xy + 1$ cortado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

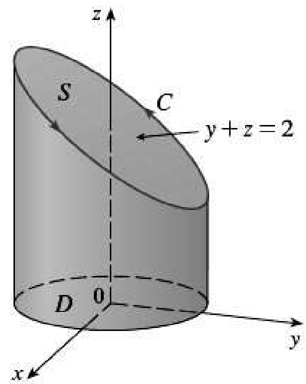
   Hint: Para parametrizar la intersección cilindro-hiperboloide se puede tomar $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin t \cos t + 1$. **Resp.**: Ambas integrales son iguales a π.

3) Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial radial $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$ y S la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $z \geq 0$. **Resp.**: Ambas integrales son iguales a 0.

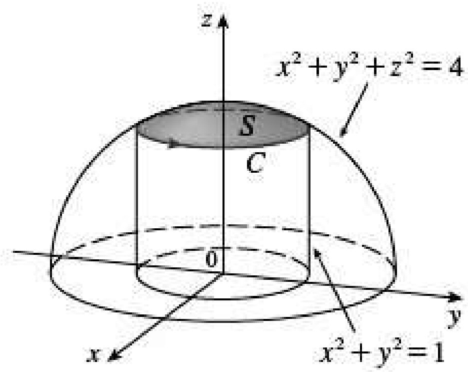
4) Usar el teorema de Stokes para calcular $\iint\limits_{S} rot(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{S}$, para $\overrightarrow{F}(x, y, z) = yz\,\widehat{\imath} + xz\,\widehat{\jmath} + xy\,\widehat{k}$ y S la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra sobre el plano $z = 5$, orientada *hacia arriba.* **Resp.**: 0

5) Usar el teorema de Stokes para calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, para $\overrightarrow{F}(x, y, z) = e^{-x}\,\widehat{\imath} + e^{x}\,\widehat{\jmath} + e^{z}\,\widehat{k}$ y C es la frontera de la parte del plano $2x + y + 2z = 2$ que se encuentra en el primer octante y orientada contra reloj cuando *se la mira desde arriba.* **Resp.**: $2e - 4$

6) Comprobar que $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \pi$, donde $\overrightarrow{F} = (-y^2, x, z^2)$ y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (C orientada contra-reloj cuando se mira desde arriba).



7) Usar el teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{S}$, donde $\overrightarrow{F} = (xz, yz, xy)$ y S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está en el interior de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano $z = 0$.



Resp.: 0