13.5 APÉNDICE: Formulario Cálculo vectorial

1) **Divergencia y rotor de un campo vectorial**

   a) $div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial P}{dx} + \dfrac{\partial Q}{dy} + \dfrac{\partial R}{dz}$

   b) $rot(\overrightarrow{F}) = \nabla \times \overrightarrow{F} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\widehat{\imath} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\widehat{\jmath} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$

2) **Integral de línea**

   a) *Integral de línea de un campo vectorial*
   Sea
   $$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\widehat{\imath} + Q(x,y,z)\widehat{\jmath} + R(x,y,z)\widehat{k}$$
   un campo vectorial continuo definido sobre una región que contiene la curva suave
   $$C: \quad \overrightarrow{r}(t) = x(t)\widehat{\imath} + y(t)\widehat{\jmath} + z(t)\widehat{k}, \quad \text{con} \quad a \leq t \leq b \tag{13.18}$$
   La integral de línea del CV $\overrightarrow{F}$ sobre la curva C se anota y define por:
   $$\boxed{\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \qquad (13.19)}$$

   b) *Integral de línea de un campo escalar*
   Sea f un campo escalar y C la curva (1). La integral de línea del CE f sobre la curva C se anota y define por:
   $$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))\,||r'(u)||\,dt \tag{13.20}$$

3) **Campo vectorial conservativo**

   a) Un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ se dice *campo vectorial conservativo*, cuando existe un campo escalar f, de modo que $\overrightarrow{F} = \nabla f$. En tal caso, la función f recibe el nombre de *función potencial de* $\overrightarrow{F}$

   b) *Criterio de las componentes*

      i) Sea $\overrightarrow{F} = P\widehat{\imath} + Q\widehat{\jmath}$ una campo vectorial sobre un disco abierto de $\mathbb{R}^2$, con P y Q funciones C^1 en este disco, entonces
      $$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ii) Si $\overrightarrow{F} = P\,\widehat{\imath} + Q\,\widehat{\jmath} + R\,\widehat{k}$ es un campo vectorial sobre una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$, con sus componentes C^1 en esta esfera, se tiene que

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

4) **Teorema de Green**

Sea $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, con $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ campos escalares C^1 en un dominio D de $\mathbb{R}^2$. Sea C la curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de la región D, entonces

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D rot(\overrightarrow{F})\,\widehat{k}\,dA$$

5) **Integral de superficie**

a) *Campo escalar sobre una superficie definida paramétricamente*

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\overrightarrow{r}(u,v))\,||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||\,dA$$

b) *Campo vectorial sobre una superficie definida paramétricamente*

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}\,dS = \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)\,dA$$

6) **Teorema de Gauss**

Sea E una región sólida simple en $\mathbb{R}^3$ y sea S la superficie cerrada correspondiente a la frontera de E con orientación positiva. Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a E, entonces

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_E div(\overrightarrow{F})\,dV$$

7) **Teorema de Stokes** Sea S una superficie orientada y suave en $\mathbb{R}^3$ (con vector unitario exterior $\widehat{n}$) y sea C la curva correspondiente a la frontera de S con orientación positiva. Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a S, entonces

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n}\,dS$$