

**Nota:** Algunas respuestas al final de la guía.

1. a) Determinar y dibujar los dominios, y de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \frac{3}{x^2 - y^2}, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}, \quad f(x, y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-y}$$

- b) Sea  $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$ . Determinar las funciones  $z$  (de 2 variables) y  $f$  (de una variable), si  $z = \sqrt{1+y^2}$  para  $x = 1$ .

2. Sea  $f$  la función de dos variables definida por  $z = f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ .

- a) Determinar  $f(-2, 3)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ .

- b) Determinar algebraicamente el dominio de  $f$ ,  $dom(f)$ , y representarlo gráficamente en el plano  $XY$ .

- c) Construir una tabla de valores de  $f$ , con diez valores, manteniendo constante  $y = 3$  y variando la  $x$  a intervalos de 1 unidad.

¿Qué puede decir respecto del comportamiento de  $f$  en los puntos  $(x, 3)$  de  $D$ , cuando  $x > 3$ ?

Representar gráficamente la función  $u = f(x, 3)$ , para  $(x, 3) \in D$ , y confirmar o refutar su respuesta.

- d) ¿Qué puede decir respecto del comportamiento de  $f$  en los puntos  $(2, y)$  de  $D$ , cuando  $y > 2$ ?

- e) Determinar todos los puntos  $(x, y) \in D$  tales que  $f(x, 1) = 1$ .

3. Representar gráficamente en el espacio, cada una de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = x + y \quad f(x, y) = x \quad f(x, y) = x^2$$

4. Sea  $f(x, y) = 350x + 200y$ . Trazar las curvas nivel  $N_k(f)$ , para  $f$ , para  $k = 4000$ , 8000 y 12000.

5. Para cada una de las siguientes funciones:

$$z = f(x, y) = xy \quad z = x^2 - y^2 \quad z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = f(x, y) = x - y^2 \quad z = f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - y^2} \quad z = f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

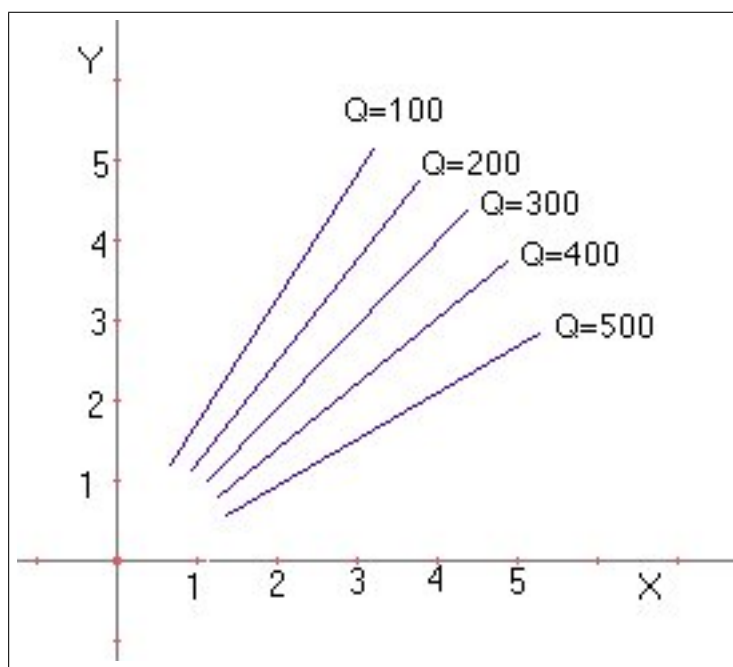
- a) Determinar su dominio.

- b) Dibujar las curvas de intersección de la superficie  $z = f(x, y)$  con cada plano coordenado.

- c) Dibujar un mapa de contorno de función considerando *varias* curvas de nivel.

d) Esbozar el gráfico de la superficie.

6. La demanda de jugo de naranja está en función del precio del mismo y del precio del jugo de manzana. En la figura se presentan los gráficos aproximados de cinco curvas de nivel de la función. ¿Cuál de los ejes debería corresponder al de jugo de naranja?. Justificar su respuesta.



Curvas de nivel

7. La función de producción  $f$  para cierto artículo está definida por  $f(x, y) = 4x^{1/3}y^{2/3}$ , donde  $x$  e  $y$  son las cantidades de dos insumos. Dibujar un mapa de contorno de  $f$  que muestre las curvas de producción constante para 16, 12, 8, 6, 4 y 2.
8. Una placa metálica delgada, ubicada en el plano  $XY$ , tiene temperatura  $T(x, y)$  en el punto  $(x, y)$ . Las curvas de nivel de  $T$  se denominan *isotermas*, debido a que en cada punto de estas curvas, la temperatura es la misma. Dibujar algunas *isotermas*, si la función temperatura viene dada por la función  $T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ .
9. Se construye un paralelepípedo recto de base rectangular en el primer octante, con tres caras en los planos coordenados, teniendo un vértice en el origen, y el vértice opuesto al origen en un punto  $(x, y, z)$  del plano  $x + 3y + 2z = 6$ .
- a) Expresar el volumen  $V$  del sólido como función de las dimensiones de la base del sólido, y determinar el dominio de la función  $V$ , considerando las restricciones del problema.

- b) Determinar el volumen del sólido si la base es un cuadrado de lado 1,25 unidad (\*).

Funciones de tres variables

10. Sea  $f$  la función de tres variables definida por:

$$u = f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x + y - z}$$

- a) Determinar un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , si es que existe, tal que  $f(x, y, z) = 5$ .  
b) Determinar el dominio de  $f$  y representarlo gráficamente en el espacio.
11. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio y representarlo gráficamente en el espacio tridimensional:

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 - y}, \quad f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

12. Supongamos que la temperatura de una región en cada punto  $(x, y, z)$  es  $T(x, y, z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$  grados Celsius. Describir las superficies de nivel de  $T$ , que en este caso denominan *isotermas*.

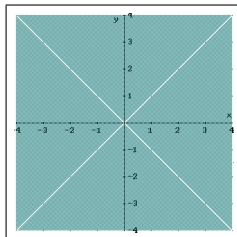
Respuestas

Ejercicio 1

1.

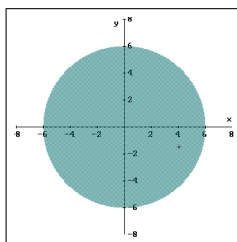
$$f(x, y) = \frac{3}{x^2 - y^2}.$$

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 0 \text{ y } x + y \neq 0\}$$

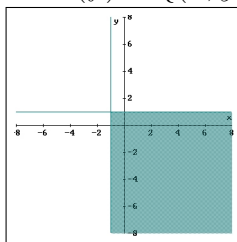


$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}.$$

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 36\}$$



$$f(x, y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-y}. \quad Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x+1 \geq 0 \text{ y } 1-y \geq 0\}$$

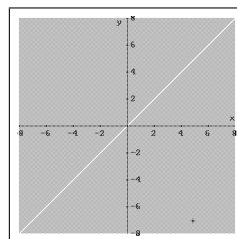


2.  $f(y) = \sqrt{1+y^2}$  y  $z = \text{signo}(x)\sqrt{x^2+y^2}$ , donde

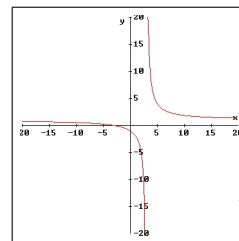
$$\text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2

b)  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ .  $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 0\}$



c) Sea  $u = f(x, 3) = \frac{x+3}{x-3}$ . Para  $x > 3$ ,  $u$  es decreciente.



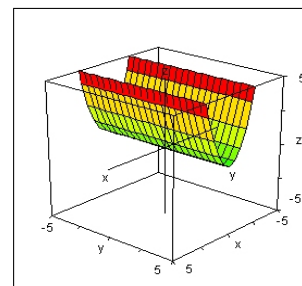
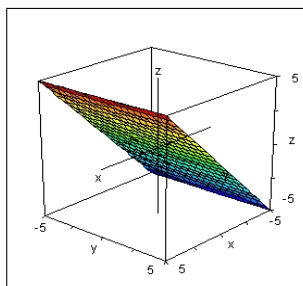
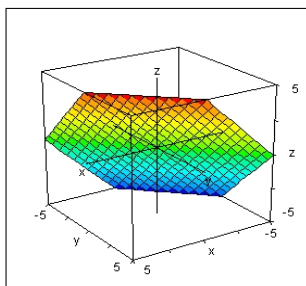
e) No existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x, 1) = 1$

Ejercicio 3

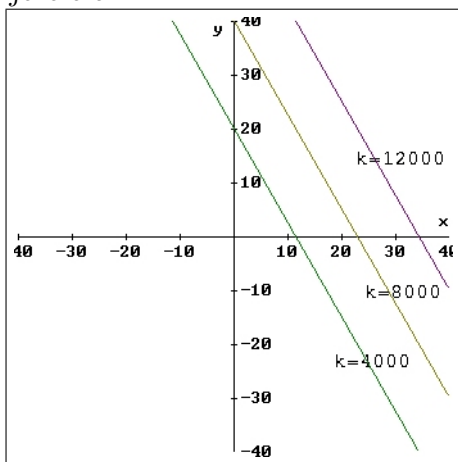
$f(x, y) = x + y$  (plano)

$f(x, y) = x$  (plano)

$f(x, y) = x^2$  (sup cilíndrica)



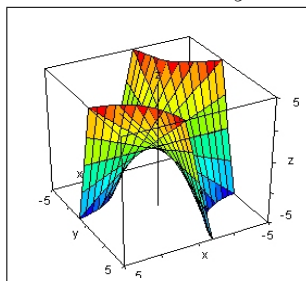
Ejercicio 4



Ejercicio 5

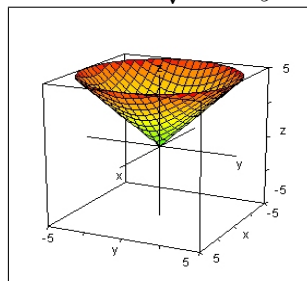
$f(x, y) = xy$ . Gráfico de  $z = xy$

a)  $Dom(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

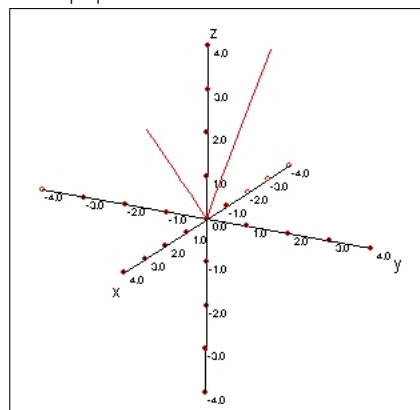


b) Con plano  $XY$  ( $z = 0$ ) | Con plano  $XZ$  ( $y = 0$ ) | Con plano  $YZ$  ( $x = 0$ )  
 (Eje X)  $\cup$  (Eje Y) | Eje X | Eje Y

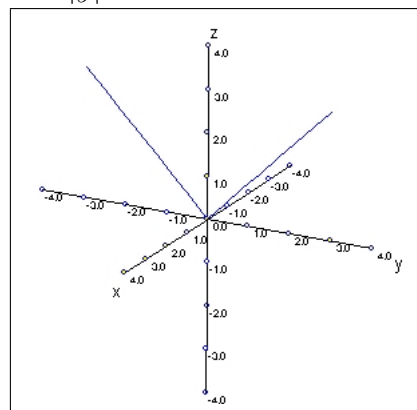
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Gráfico de  $\sqrt{x^2 + y^2}$  a)  $Dom(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



b) Con plano  $XY$  ( $z = 0$ ) | Con plano  $XZ$  ( $y = 0$ )  
 Punto  $(0, 0)$  |  $z = |x|$



Con plano  $YZ$  ( $x = 0$ )  
 $z = |y|$



U. de Talca

Ejercicio 6

El precio del jugo de naranja debería estar representado en el eje Y, ya que la demanda por el jugo de naranja es mayor (o crece) cuando el precio de éste disminuye y el precio del jugo de manzana (en eje X) aumenta.

Ejercicio 9

- Sea  $x$  (en eje X) e  $y$  (en eje Y) los lados de la base del sólido.

Las coordenadas de la base del sólido son:  $(0, 0, 0)$ ,  $(x, 0, 0)$ ,  $(x, y, 0)$  y  $(0, y, 0)$

La altura del sólido es:  $z = \frac{6-x-3y}{2}$

Luego, el volumen del sólido se puede expresar en función de  $x$  e  $y$ :

$$V = V(x, y) = xy \left( \frac{6 - x - 3y}{2} \right)$$

- Considerando  $x = y = 1,25$  (base cuadrada):  $V = 0,78125 \text{ unid}^3$

Ejercicio 10

1. Para  $z = 1$ ,  $y = 1$ , por ejemplo,  $x = 1/2$ . Luego un punto que pertenece a la función dada es  $(1/2, 1, 1)$ , ya que  $f(1/2, 1, 1) = 5$ .
2.  $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}/x + y - z \neq 0\}$ , es decir, el dominio de  $f$  es el conjunto de todos los puntos del espacio  $\mathbb{R}$  excepto los puntos del plano  $x + y - z = 0$ .