U. de Talca

Temas: Límites de FVV, Límites por *caminos* (*trayectorias*). Límites iterados. Continuidad.

1. ¿Qué significa que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$?

2. Calcular

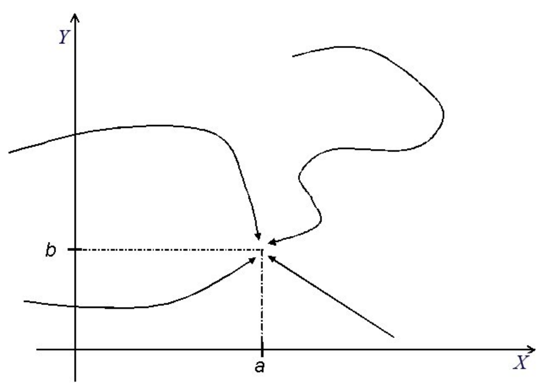
   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y}{x-\sqrt{y}}$

3. *Propiedades de los limites.* Dado que la definición de límite de funciones de dos variables, es esencialmente igual a la definición de funciones de una variable, las propiedades son análogas.

   a) Enunciar algunas propiedades para límites de funciones de 2 variables.

   b) ¿Estas propiedades son válidas para funciones de más variables?.

4. ¿Qué es un camino (trayectoria) que *va* a un punto (a,b)?. En la siguiente figura se muestran 4 caminos por los cuales (x,y) se puede acercar al punto (a,b).



5. *a*) **Teorema**:

   Sean $z = f(x,y)$ una función de dos variables y C_1 y C_2 dos caminos que *pasan* por el punto (a,b).
   Si $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = L_1$ y $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = L_2$ con $L_1 \neq L_2$
   entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *no existe.*

   b) Estudiar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

U. de Talca

6. ¿Cómo estudiar $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$?

   - **Límite NO existe**. Para verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe, usar el teorema precedente. Para ello buscar 2 caminos (diferentes) por los cuales los límites sean distintos.
   - **Límite existe**. Para verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, y es igual a L, se usa el Teorema del Encajonamiento:

   $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f(x,y) - L| \leq g(x,y), \text{ con } \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$$

   Nota: Algunas desigualdades que se pueden usar en la búsqueda de la función $g(x,y)$ son:

   - $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$
   - $x^2 \leq x^2+y^2, \quad y^2 \leq x^2+y^2$
   - $x^2 \leq \sqrt{x^4+y^4}, \quad y^2 \leq \sqrt{x^4+y^4}$

7. Límites y cambio de variable. Estudiar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

8. Límites y coordenadas polares. Estudiar

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$.

9. Continuidad

   a) Sabiendo que la definición de continuidad para una función de 2 (o más) variables es, esencialmente, la misma que para funciones de 1 variable, establecer bajo que condiciones se dice que una función $z = f(x,y)$ es continua en (a,b).
   b) Dar un ejemplo de una función de continua y otra discontinua en $(0,0)$.
   c) Estudiar la continuidad en $(0,0)$, de las siguientes funciones:
   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$