Temas: Derivadas parciales de funciones de varias variables. Interpretación geométrica. Derivadas parciales de orden superior. Igualdad de las derivadas parciales cruzadas (mixtas).

1. © **Definición**. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables.

   a) La *derivada parcial de primer orden* (o la *primera derivada parcial*) de f con respecto a x, es la función f_x, definida por:

   $$f_x(x, y) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

   siempre y cuando el límite exista.

   b) La *derivada parcial de primer orden* (o la *primera derivada parcial*) de f con respecto a y, es la función f_y, definida por:

   $$f_y(x, y) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

   siempre y cuando el límite exista.

2. © **Notaciones.** Sea $z = f(x, y)$.

   a) Las derivadas parciales f_x y f_y, se denotan también:

   $$f_x(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_1 f(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

   $$f_y(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_2 f(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

   b) Las *derivadas parciales de primer orden* evaluadas en un punto (a, b) se denotan:

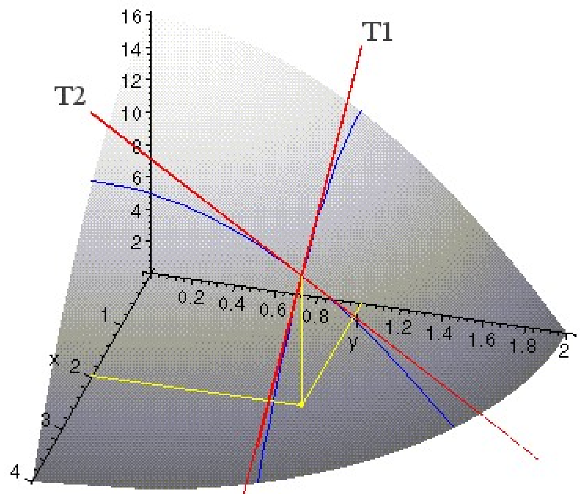
   $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

3. ✓ Si $u = \arctan(y/x)$, calcular y simplificar $xu_y - yu_x$. Respuesta: 1.

4. ✓ Encontrar una función $u = f(x, y)$ tal que $u_x = 4x - y^3$ y $u_y = 2y^2 - 3xy^2$.
   Respuesta: $u = 2x^2 - xy^3 + \frac{2}{3}y^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

5. © ¿Qué representa geométricamente una derivada parcial de una función de dos variables?.

6. ✓ A continuación se esboza el gráfico de $z = 16 - x^2 - 4y^2$. En su punto $(2, 1, 8)$ se han graficado sus trazas con los planos $x = 2$ e $y = 1$. Determinar las ecuaciones de las rectas, $L1$ y $L2$, tangentes a las trazas mencionadas.



7. © Si $u = f(x, y, z)$, ¿cómo se define $f_y(x, y, z) := \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = D_2 f(x, y, z) = u_y = \dfrac{\partial u}{\partial x}$?.

8. ✓ ¿Cuántas derivadas de orden 2 tiene la función $u = f(x, y, z)$?

9. © **Teorema de Schwarz** (Igualdad de las derivadas parciales cruzadas).

   Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, tal que las primeras y las segundas derivadas parciales de f son continuas en una región abierta R. Se tiene que, para cada punto (x, y) de R:
$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

10. ✓ Si $u = \dfrac{xy}{x + y}$, calcular y simplificar
$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy}$$