Temas: Incrementos. Diferenciales. Diferenciabilidad. Regla de la cadena.

1. ✓ Verificar que si una función (de una variable) $y = f(x)$ es derivable en $x = x_0$, entonces
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x \quad (*)$$
donde $\epsilon = \epsilon(\Delta a) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

   Nota: $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$

   ¿Que nombre recibe f si satisface $(*)$?.

2. ✓ Si $w = f(x, y)$ y $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$ son incrementos de x e y respectivamente. ¿Cuál es el incremento (total) $\triangle w$ de w?. Dar un ejemplo.

3. ©

   Definición: Sea $w = f(x, y)$ una función de dos variables. La función f es *diferenciable* en (x_0, y_0) si Δw puede expresarse en la forma
$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \qquad (1)$$
donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de Δx y Δy que tienen límite 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

   Nota: Equivalentemente, $w = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si:
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta w - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \qquad (2)$$

   Teorema: Si $w = f(x, y)$ y f_x y f_y son continuas en una región rectangular R, entonces f es diferenciable en R.

   Teorema: Si $w = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

4. ✓ Estudiar, en el origen, la continuidad y diferenciabilidad de las funciones:

   a) $u = 3x^2 - y$

   b) $w = \sqrt{|xy|}$ en $(0, 0)$.

5. © **Regla de la cadena**

   Caso más simple:

   Teorema: Si $w = f(x, y)$ y $x = g(t)$, $y = k(t)$, donde f, g y k son diferenciables, entonces
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

   Demostración (esbozo):

   Como f es diferenciable, por (1) se tiene:
$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{3}$$

   Dividiendo (3) por Δt, se tiene:
$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = f_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{4}$$

   tomando límite cuando Δt tiende a 0, se tiene:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = f_x(x_0, y_0)\,\frac{dx}{\partial t} + f_y(x_0, y_0)\,\frac{dy}{\partial t}$$

   ■

   El teorema precedente tiene múltiples extensiones. Una de ellas, por ejemplo, es

   Teorema: Si $w = f(u, v)$ y $u = g(x, y)$, $v = k(x, y)$, donde f, g y k son diferenciales, entonces
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

6. ✓ Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable y $x = s^2 - t^2$, $y = t^2 - s^2$. Calcular y simplificar:
$$t\frac{\partial z}{\partial s} + s\frac{\partial z}{\partial t}$$

7. ✓ Si $z = f(x, y) \in C^2$, y $x = u^2 + w^2$, $y = 2uw$. Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) $\dfrac{\partial z}{\partial w} = 2uz_x + 2wz_y$

   b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial w^2} = 2z_x + 4u^2 z_{xx} + 8uwz_{xy} + 4w^2 z_{yy}$

8. ✓ Si $u = f(y/x)$, calcular y simplificar $xu_x + yu_y$.

9. *a*) © Una función $f(x, y)$ se dice *homogénea* de *grado* n si y solo si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

para todo $t > 0$.

b) ✓ Decidir si son homogéneas las funciones $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ y $g(x, y) = \sqrt{3x^2 - 2xy}$. En caso de serlo, indicar en el grado.

c) ✓ Sea $u = f(x, y)$ una función diferenciable y homogénea de grado n. Verificar que

$$xf_1(x, y) + yf_2(x, y) = nf(x, y)$$

Sugerencia: Sea (x,y) un punto del dominio de u. Definir y derivar (con respecto a t) la función

$$g(t) = f(tx, ty) - t^n f(x, y)$$