1. Usando la definición correspondiente demostrar que la función

$$z = f(x, y) = 3x - xy^2$$

es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución: Se debe verificar que para todo (a, b) en $\mathbb{R}^2$, existen funciones, de $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$, ϵ_1 y ϵ_2, tal que:

$$\Delta f(a, b) = f_x(a, b)\, h + f_y(a, b)\, k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

o bien

$$\Delta f(a, b) - f_x(a, b)\, h - f_y(a, b)\, k = \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $(h, k) \to (0, 0)$. Ahora bien:

- Calculo de $\Delta f(a, b)$:
$$\begin{aligned} \Delta f(a, b) &= f(a + h, b + k) - f(a, b) \\ &= 3(a + h) - (a + h)(b + k)^2 - (3a - ab^2) \\ &= 5h - b^2 h - 2abk - 2bhk - ak^2 - hk^2 \end{aligned}$$
- Calculo de las derivadas parciales:
$f_x(a, b) = 5 - b^2$ y $f_y(a, b) = -2ab$

Luego,

$$\Delta f(a, b) - f_x(a, b)\, h - f_y(a, b)\, k = -ak^2 - 2bhk - hk^2 = \underbrace{(-2bk - k^2)}_{\epsilon_1} h + \underbrace{(-bk)}_{\epsilon_2} k$$

y claramente $\epsilon_1 = -2bk - k^2 \to 0$ y $\epsilon_2 = -bk \to 0$, cuando $(h, k) \to (0, 0)$.

Notas:

- La elección de ϵ_1 y ϵ_2 no son únicas. Elegir, al menos otras 3 posibilidades.
- Si no se hubiera exigido usar la definición de función diferenciable, se podría haber usado el teorema que establece que *si una función tiene primeras derivadas continuas, entonces es diferenciable*, ya que en este caso, evidentemente $f_x(x, y) = 3 - y^2$ y $f_y(x, y) = -2xy$ son continuas en todo el plano.

2. Un envase cilíndrico cerrado tiene la forma de cilíndro circular recto de 6cm de altura y 2cm de radio interior y 1mm de grosor. Si el costo del metal es de US$0.4 por cm^3, calcular aproximadamente usando diferenciales el costo total del metal empleado en la construcción del envase.

Solución:

Como se sabe el volumen V de un cilíndro, viene dado por $V = V(r, h) = \pi r^r h$, donde r es su radio y h su altura.

El volumen exacto del metal usado viene dado por $\Delta V = V(2{,}1,\ 6{,}2) - V(2,6)$. Un valor aproximado se encuentra calculado dV:

$$dV = V_r\, dr + V_h\, dh = 2\pi r h\, dr + \pi r^3\, dh$$

con $r = 2$, $h = 6$, $dr = 0{,}1$ y $dh = 0{,}2$:

$$dV = 2\pi(2)(6)(0{,}1) + \pi(2)^2(0{,}2) = 3{,}2\pi$$

Luego, $\Delta V \approx 3{,}2\pi$. Por lo tanto, el material empleado en la construcción del cilindro es aproximadamente $3{,}2\pi$. Como el costo del metal es de US\$0.4 por cm^3, entonces el costo aproximado es $3{,}2\pi \cdot 0{,}4 \approx 4{,}02$ dólares.

3. Verificar que la función

$$u = f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1/2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es

a) diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

b) sus derivadas parciales existen en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

c) sus derivadas parciales no son continuas en el origen.

Solución:

a) Para cada $(x,y) \neq (0,0)$, las derivadas parciales vienen dadas por:

$$u_x(x,y) = 2x\sin(x^2+y^2)^{-1/2} - \cos(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$u_y(x,y) = 2y\sin(x^2+y^2)^{-1/2} - \cos(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

las cuales son continuas para cada $(x,y) \neq (0,0)$.
Por lo tanto u es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad (*)$.
Veamos ahora que u es diferenciable en $(0,0)$.

En primer lugar se deben verificar la existencia de las derivadas parciales de u en $(0,0)$. No es dificil verificar que $u_x(0,0) = 0$ y $u_y(0,0) = 0$.

Sea $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$

$$\Delta u = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = \underbrace{0}_{u_x} \cdot h + \underbrace{0}_{u_y} \cdot k + (\underbrace{h\sin(h^2+k^2)^{-1/2}}_{\epsilon_1}) \cdot h + (\underbrace{k\sin(h^2+k^2)^{-1/2}}_{\epsilon_2}) \cdot k$$

y claramente, por ser la función *seno* acotada:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} h\sin(h^2+k^2)^{-1/2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} k\sin(h^2+k^2)^{-1/2} = 0$$

luego, u es diferenciable en $(0,0)$ $\quad (**)$.

De $(*)$ y $(**)$, u es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

b) Verificado en el item precedente.

c) Para verificar que u_x no es continua en $(0,0)$, observemos que $\lim\limits_{x\to 0} u_x(x,x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} u_y(x,x)$ no existen (comprobarlo !).