Temas: Extremos (relativos/absolutos) de una función de dos variables. Puntos críticos. Criterio para estudiar puntos críticos. Extremos, gráficos y curvas de nivel.

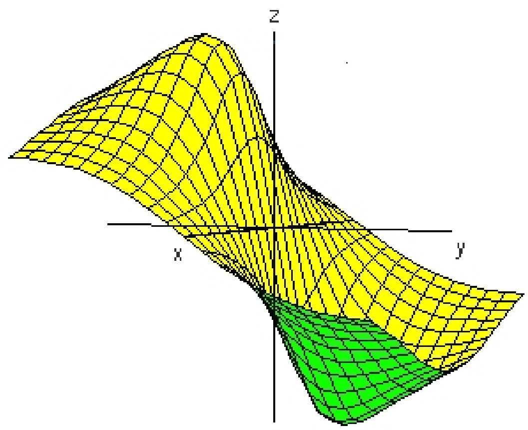


Gráfico de $z = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$

1. **Extremos de una función de dos variables.**

   Definición: Sean $f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de dos variables y (a, b) un punto en el interior de D. Se dice que f tiene en (a, b) un *máximo relativo (local)*, cuando, para todo (x, y) en las cercanías de (a, b), se cumple:
   $f(x, y) \leq f(a, b)$
   Análogamente, se dice que f tiene en (a, b) un *mínimo relativo (local)*, cuando, para todo (x, y) en las cercanías de (a, b), se cumple: $f(x, y) \geq f(a, b)$

   Observaciones.

   - En general, se usa la palabra *extremo* para referirse a un máximo o un mínimo.
   - Si las desigualdades incluídas en la definición anterior se cumplen para todos los puntos (x, y) del dominio D de f, entonces los extremos reciben el nombre de *máximo absoluto* y *mínimo absoluto*, respectivamente.

2. **Criterio de la derivadas parciales para extremos.**

   Teorema: Si f tiene un extremo relativo en (a, b), y f tiene derivadas de primer orden en (a, b), entonces:

   $$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0$$

   Observaciones:

   - Es posible que en un punto, ambas derivadas parciales de una función sean iguales a 0, y que en dicho punto la función no presente un extremo. Tales puntos reciben el nombre de *puntos sillas*. Un ejemplo de esta situación lo presenta la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ (cuya gráfica recibe el nombre de *silla de montar*) en el punto $(0, 0)$.

- Es posible que una función de dos variables, tenga en cierto punto un extremo, y en dicho punto f no tenga derivadas parciales, por ejemplo la función $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$ tiene un máximo en $(0, 0)$, y en este punto dicha función no tiene derivadas parciales.

3. Un punto (a, b) del dominio de una función se dice *punto crítico* de f, cuando

   - $f_x(a, b) = 0 \quad$ y $\quad f_y(a, b) = 0$, o bien
   - No existe $f_x(a, b)$ o no existe $f_y(a, b)$

   Los puntos críticos de una función, son los puntos donde la función puede presentar sus extremos.

4. **Criterio para analizar puntos críticos.**

   Teorema: Sea $z = f(x, y)$ una función con segundas derivadas parciales continuas en un punto crítico (a, b) para el cual $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.
   Sea
   $$D = D(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

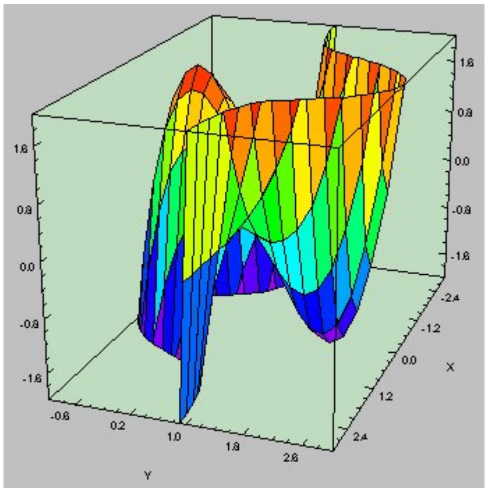
   a) Si $D(a, b) > 0$, entonces f tiene en (a, b) un extremo:
      - Si $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo igual a $f(a, b)$.
      - Si $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene en (a, b) un máximo relativo igual a $f(a, b)$.

   b) Si $D(a, b) < 0$, entonces f no tiene extremo en (a, b). En este caso, f tiene en (a, b) un punto silla.

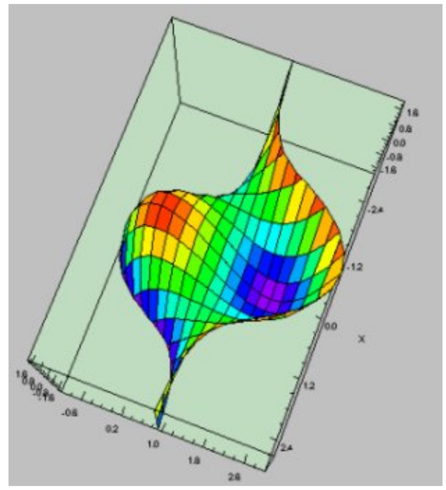
   c) Si $D(a, b) = 0$, ***este criterio no entrega información***.

   Nota: En caso que el dominio de una función continua f sea acotado y cerrado, f tiene extremos absolutos en D. En tal caso, sus extremos absolutos los puede alcanzar en puntos del interior de D o puntos de la frontera de D.

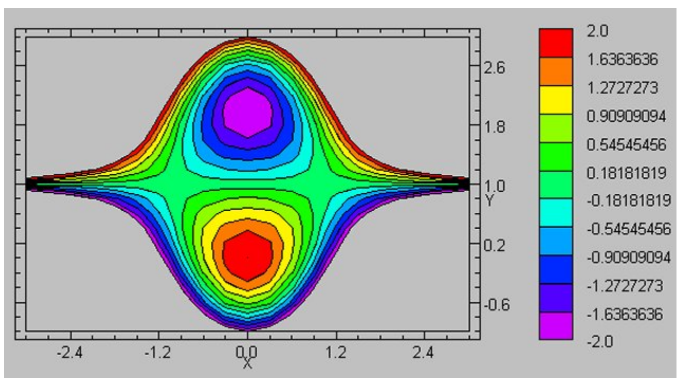
5. Estudiar extremos relativos de $z = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$. Visualizar gráficamente.



Mirada standar



Mirada desde arriba



Curvas de nivel

6. Encontrar los extremos absolutos de $z = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ en el dominio $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Visualizar gráficamente.

7. Encontrar los puntos de la superficie $z^2 = xy + 1$ que estén más cerca del origen.

8. Determinar las dimensiones de la caja rectangular con máximo volumen si el área superficial total es de 64 cm^2.