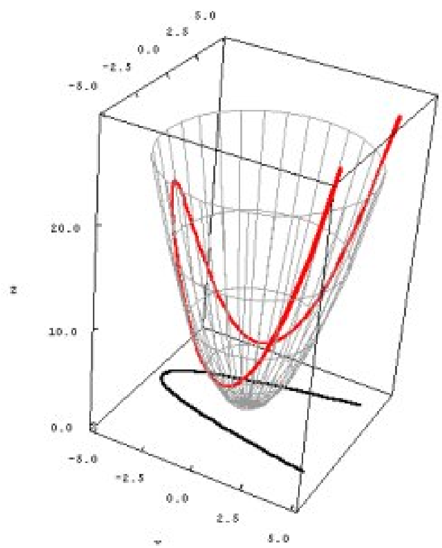
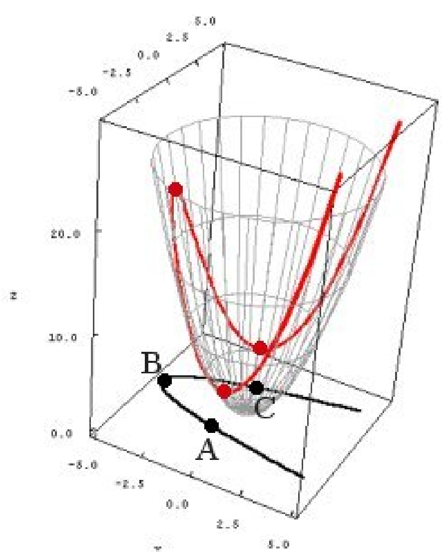
1. Determinar los extremos de $z = f(x,y)$, sujeto a la restricción $g(x,y) = 0$, consiste en buscar los extremos de $z = f(x,y)$, cuando (x,y) se mueve en la curva $g(x,y) = 0$. Tal problema se suele presentar en la forma:

$$\begin{array}{lcl} \text{Extremos} & : & z = f(x,y) \\ \text{Sujeto a} & : & g(x,y) = 0 \end{array}$$

En la siguiente figura se muestra gráficamente la situación, para el caso $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = y^2 - x - 9/2 = 0$



luego, los puntos que se deben determinar son A, B y C, indicados en la siguiente figura:



2. Un procedimiento que existe para ubicar estos puntos se llama *Método de los Multiplicadores de Lagrange*. Para una explicación de cómo funciona, sea P un punto de la curva restricción $g(x,y)=0$ (g diferenciable) en el cual la función diferenciable $z=f(x,y)$ presenta un extremo (máximo o mínimo).

   - Sea $y=\alpha(x)$ la función que viene definida implícitamente por la restricción $g(x,y)=0$. Luego,
     $$g(x,\alpha(x))=0$$
     de donde, derivando con respecto a x:
     $$\begin{aligned} g_x + g_y\cdot\alpha'(x) &= 0 \\ (g_x,g_y)\cdot(1,\alpha'(x)) &= 0 \end{aligned}$$
     Luego,
     $$\nabla g \perp (1,\alpha'(x)) \tag{1}$$
     Nota: Como el vector $(1,\alpha'(x))$ es tangente a la restricción[1] $g(x,\alpha(x))=0$, la relación (1) establece que el gradiente de g es perpendicular a la restricción.
   - Por otra parte, es claro que la función (de una variable) $z=f(x,\alpha(x))$ presenta, de acuerdo al supuesto anterior, un extremo en el punto P. Por lo tanto su derivada en P debe anularse. Como
     $$z_x = f_x + f_y\cdot\alpha'(x)$$
     en P se cumple que
     $$z_x = f_x + f_y\cdot\alpha'(x) = 0$$
     luego, en P se tiene que
     $$\nabla f \perp (1,\alpha'(x)) \tag{2}$$
   - De las relaciones (1) y (2) se puede concluir que los vectores ∇f y ∇g son paralelos. Por lo tanto existe un escalar λ tal que
     $$\nabla f = \lambda\nabla g$$
   - Luego, para determinar las coordenadas del punto P de la curva restricción donde $z=f(x,y)$ asume sus extremos, se debe resolver el siguiente sistema de 3 ecuaciones:
     $$\left.\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right|$$

[1] Este resultado se verifica, en general, en la tercera unidad de este curso.

Observaciones.

- Para recordar las ecuaciones anteriores, se suele formar la función:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

  y sus tres derivadas parciales igualadas a 0, proporcionan justamente, las ecuaciones comentadas.

- El parámetro λ recibe el nombre *multiplicador de Lagrange*.

- El método de los multiplicadores de Lagrange, solo entrega el punto donde se alcanza el extremo buscado, pero no discrimina si en él se presenta un máximo o mínimo.

- Para el caso de funciones de 3 variables, se tiene que los candidatos a extremos de $z = f(x, y, z)$ bajo la restricción $g(x, y, z) = 0$, provienen de las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & \lambda g_y \\ f_z & = & \lambda g_z \\ g(x, y, z) & = & 0 \end{array}\right|$$

- Puede suceder que un problema con restricciones, tenga más de una restricción. En tal caso, se incorpora un multiplicador de Lagrange por cada restricción. Por ejemplo, en el problema:

$$\begin{array}{lcl} \text{Maximizar} & : & z = f(x, y, z) \\ \text{Sujeto a} & : & g(x, y, z) = 0 \\ \text{y} & & h(x, y, z) = 0 \end{array}$$

  la función L es:

$$L = L(x, y, x, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z) - \mu\, h(x, y, z)$$

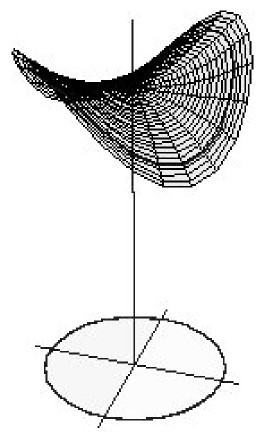
  y el sistema, de 5 ecuaciones, a resolver es:

$$\left.\begin{array}{rcl} f_x & = & \lambda\, g_x + \mu\, h_x \\ f_y & = & \lambda\, g_y + \mu\, h_y \\ f_z & = & \lambda\, g_z + \mu\, h_z \\ g(x, y, z) & = & 0 \\ h(x, y, z) & = & 0 \end{array}\right|$$

3. Actividades

   a) Determinar

   i) Extremos de $z = f(x,y) = xy + 14$
   Sujeto a $x^2 + y^2 = 18$



   (ver en sitio del curso Contenidos$-$ >Unidad 1$-$ >Extremos de FVV$-$ >Ejercicios resueltos 2$-$ >Ejemplo 4)

   ii) Extremos de $z = f(x,y) = x^2 + y^4$
   Sujeto a $x^2 + y^2 = 1$

   iii) Extremos de $z = f(x,y) = x^4 - 4xy + 4y^2$
   Sujeto a $x - 2y = 1$

   iv) Extremos de $u = f(x,y,z)xyz$
   Sujeto a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

   b) El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse E.

   i) Hacer un esbozo del los gráficos del plano, el paraboloide y la elipse.

   ii) Determinar los punto *más altos* y *más bajos* de la elipse E.

   iii) Calcular los puntos de la elipse E que se encuentran *más cerca* y *más alejados* del origen.

   c) Minimizar la expresión $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, donde a_i son constantes positivas dadas, si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$ 1