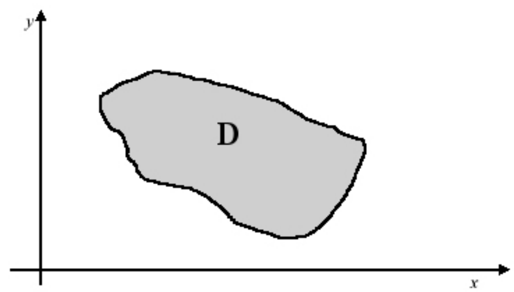
1. © *Recuerdo de la integral de Riemann.*

   Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Dividamos este intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Elijamos un punto x_i en dada uno de los n subintervalos. Se llama integral de Riemann o integral definida de $y = f(x)$ en $[a, b]$, al siguiente límite, cuando existe, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ el que se denota por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

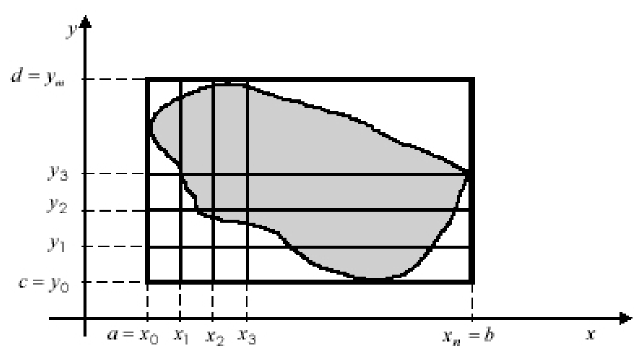
2. © *Integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en un dominio D.*

   Esta definición es completamente análoga a la definición de la integral de Riemann de una función de una variable. Consideremos una función continua $z = f(x, y)$ definida en el siguiente dominio D:



   a) Sean $[a, b]$ y $[c, d]$ las proyecciones del dominio D sobre los ejes X e Y, respectivamente.

   b) Partición del dominio. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos de igual longitud $\Delta y = \frac{d-c}{m}$. Trazando verticales (horizontales) por estos puntos de división se obtiene una partición del dominio en rectángulos de áreas $\Delta A = \Delta x \Delta y$.



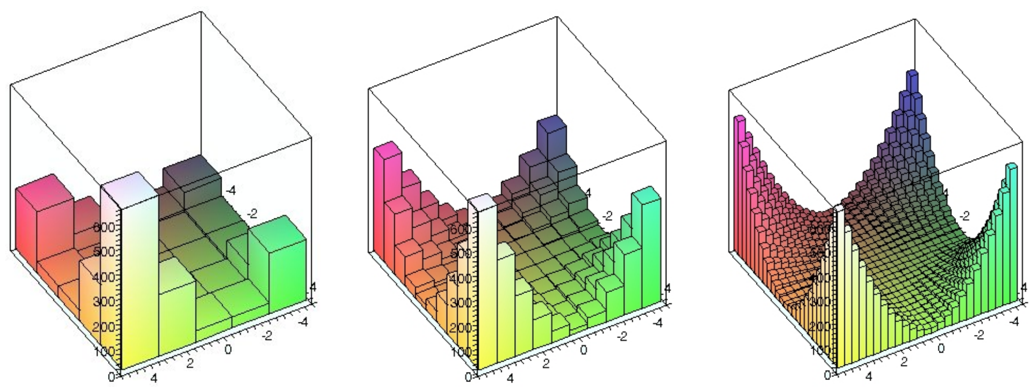
c) En cada subrectángulo se elige un punto $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$.

d) Se forma la suma de Riemann:

$$S(f, D, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta x \Delta y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta A$$

Nota: Si $(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \notin D$, se define $f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) = 0$.

Gráficos de algunas sumas de Riemann para la función $z = x^2 + y^2 + 20$ en $D = [-5, 5] \times [-5, 5]$



$n = 5$, $m = 5$ $n = 10$, $m = 10$ $n = 25$, $m = 25$

e) **Definición.** La *integral doble* de f definida en una región D del plano, se define:

$$\iint_D f(x, y)dA = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta x \Delta y$$

siempre que este límite exista.

3. © *Propiedades de las integrales dobles*

Sean f y g funciones de dos variables, continuas en un dominio cerrado D.

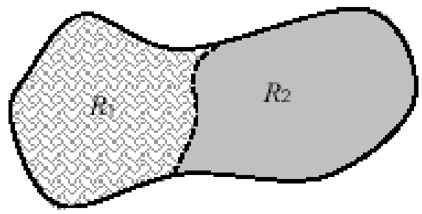
a) $\displaystyle\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dA = \iint_D f(x, y)dA \pm \iint_D g(x, y)dA$

b) $\displaystyle\iint_D cf(x, y)\, dA = c\iint_D f(x, y)dA$, donde c es una constante.

c) Si $f(x, y) \geq g(x, y)$, para todo $(x, y) \in D$, entonces: $\displaystyle\iint_D f(x, y)dA \geq \iint_D g(x, y)dA$

d) Si $D = R_1 \cup R_2$ tal que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$



4. © *Interpretación geométrica de la integral doble*. Cuando $f(x,y) \geq 0$ en su dominio D, $\iint_D f(x,y)dA$ representa el volumen del sólido bajo el gráfico de $z = f(x,y)$ y sobre el plano XY.

5. © *¿Cómo se calcula, sin usar la definición, una integral doble?*: **Teorema de Fubini**.
Sea $z = f(x,y)$ una función continua, definida en una región cerrada D del plano XY, entonces,

$$\iint_D f(x,y)dA = II(f,D)$$

es decir:

a) Si la región D se encuentra limitada por las curvas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$, con $g_1(x) \leq g_2(x)$, y por las rectas verticales $x = a$, $x = b$, siendo g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,\, b]$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

b) Si la región D se encuentra limitada por las curvas $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$, con $h_1(y) \leq h_2(y)$, y por las rectas horizontales $y = c$, $y = d$, siendo h_1 y h_2 continuas en $[c,\, d]$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

6. ✓ *Cálculos de integrales dobles.*

   a) Calcular $\displaystyle\iint_D (2y-4x)dA$, siendo D la región acotada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$.

   b) Calcular $\displaystyle\iint_D e^x e^{3y} dA$ donde D es la región delimitada por el cuadrado $|x|+|y| = 1$.

   c) Hallar el volumen del sólido dado:

      1) limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.
      2) limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.