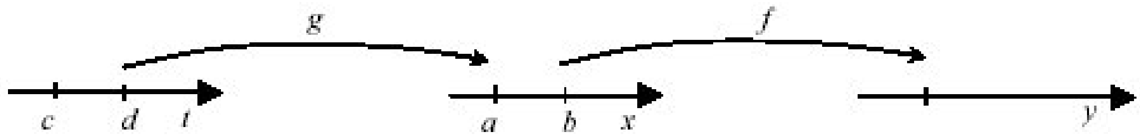
1. **Introducción**

   En Cálculo II se estudio la *fórmula de cambio de variable* en integrales *simples* (de funciones de una variable):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

   donde:

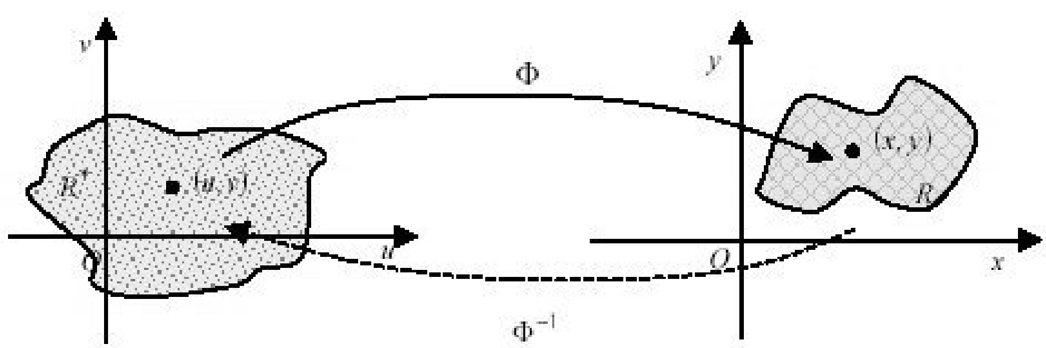
   - $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$, una función continua.
   - $g: [c,d] \to \mathbb{R}$ con $g([c,d]) = [a,b]$, y $a = g(c)$ y $b = g(d)$.



2. Se quiere efectuar un cambio de variables en la integral $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dA$ de acuerdo a la siguiente aplicación (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) :

$$\Phi = \Phi(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

   que transforma una región R^* del plano UV en la región R del plano XY:



   Si en las ecuaciones que definen la aplicación Φ es posible despejar u y v en términos de x e y, es porque existe la aplicación inversa Φ^{-1} definida por:

$$\Phi^{-1} = \Phi^{-1}(x,y) = \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = y(x,y) \end{cases}$$

   que transforma los puntos de la region R en los de R^*.

   Si se supone que:

- la aplicación Φ es inyectiva, al menos en el interior de R
- que tanto las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ como sus derivadas parciales x_u, x_v, y_u, y_v son continuas en R^* y si además
- el jacobiano J de la aplicación, definido por:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

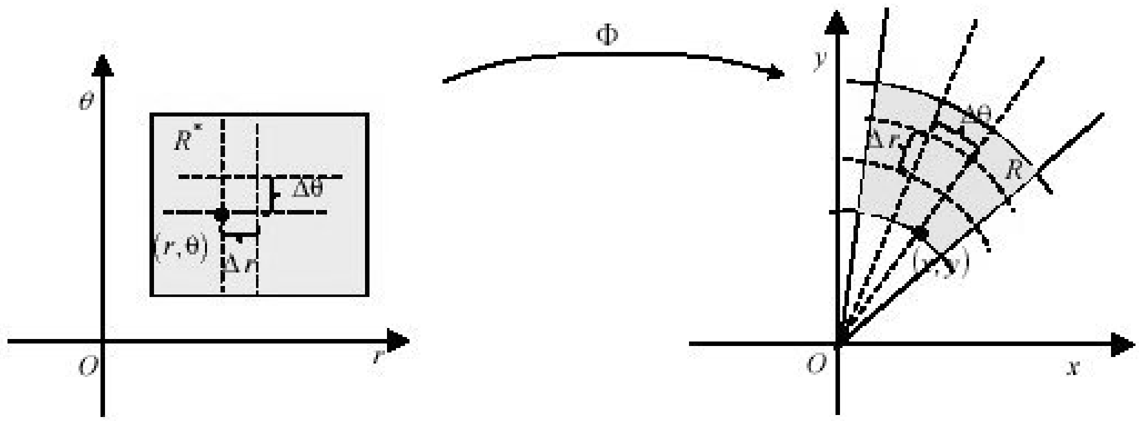
  no se anula en ningún punto de R^*.

entonces la formula del cambio de variables para integrales dobles, viene dada por:

$$\boxed{\int\int_R f(x, y) dx dy = \int\int_{R^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|J\right| du dv}$$

Nota: En los ejercicios, será útil tener presente que $J(\Phi^{-1}) = \frac{1}{J(\Phi)}$.

3. **Integrales dobles en coordenadas polares**



En este caso la función que transforma la region R^* del plano $r\,\theta$, en otra R del plano xy es:

$$\Phi = \Phi(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \textit{con } r > 0 \text{ y } 0 \le \theta < 2\pi$$

siendo el Jacobiano de esta transformación:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

entonces

$$\boxed{\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\underbrace{r}_{|J|}drd\theta}$$

4. Calcular $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le R^2\}$

5. Verificar que $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdxy = \frac{2\pi}{3}$, donde D es el circulo de radio 1 con centro en el origen de coordenadas. ¿Qué representa el valor calculado?.