1. Calcular: $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y \, dxdy$

   Respuesta.

   $$\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y \, dxdy = \left[\int_0^1 x\, e^y \Big|_{x=1-y}^{x=1} \right] dy = \int_0^1 y e^y dy$$

   [usando integración por partes, se obtiene:]

   $$= (ye^y - e^y)\Big|_0^1 = 1$$

2. Dada la integral iterada $\quad I = \displaystyle\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} e^{12x-x^3} dxdy.$

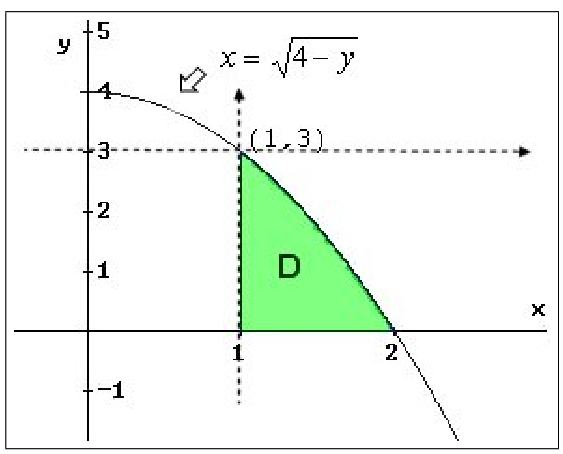
   Expresar la integral, cambiando el orden de integración, y calcular su valor.

   Respuesta.

   a) El dominio de integración está dado por:

   $$D: \quad \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{4-y} \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

   b) El dominio D, está limitado por las rectas $y = 0$, $y = 3$, $x = 1$ y la gráfica $x = \sqrt{4-y}$, representado gráficamente en la siguiente figura:

   Dominio D

   c) El dominio D también se puede describir:

   $$D: \quad \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$$

Por lo tanto: $\quad I = \displaystyle\int_1^2 \int_0^{4-x^2} e^{12x-x^3} dydx.$

d) Para calcular I usaremos su expresión anterior. Luego

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_0^{4-x^2} e^{12x-x^3} dydx \\
&= \int_1^2 \left[ye^{(12x-x^3)} \Big|_{y=0}^{y=4-x^2} \right] dx \\
&= \int_1^2 \left((4-x^2)e^{12x-x^3} \right) dx = \left. \frac{e^{12x-x^3}}{3} \right|_1^2 = \frac{e^{11}}{3}(e^5-1) \approx 2942078{,}792
\end{aligned}$$

3. Sea $z = f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ definida sobre el cuadrado unitario $R = [1,2] \times [0,1]$.

a) Calcular un valor aproximado de $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy$ mediante la suma de Riemann de f, considerando una partición de la región en 9 subcuadrados congruentes, y en cada subcuadrado se elige el vértice inferior izquierdo.

b) El valor de $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy$, usando integrales iteradas.

Respuesta.

a) 1) Se tiene que: $\Delta x = \dfrac{1}{3} = \Delta y$

En $[1,2]$ se considera la partición: $1, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad 2$, determinando los siguientes subintervalos:

$$\left[1, \frac{4}{3}\right], \quad \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right], \quad \left[\frac{5}{3}, 2\right]$$

En $[0,1]$ se considera la partición: $0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad 1$, determinando los siguientes subintervalos:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

2) Cada subcuadrado tiene un área igual a $\Delta A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

3) De la partición anterior se obtienen 9 subcuadrados. Eligiendo en cada subcuadrado el vértice inferior izquierdo, se obtiene:

	$\left[0,\, \frac{1}{3}\right]$	$\left[\frac{1}{3},\, \frac{2}{3}\right]$	$\left[\frac{2}{3},\, 1\right]$
$\left[1,\, \frac{4}{3}\right]$	$(1,\, 0)$	$(1,\, \frac{1}{3})$	$(1,\, \frac{2}{3})$
$\left[\frac{4}{3},\, \frac{5}{3}\right]$	$(\frac{4}{3},\, 0)$	$(\frac{4}{3},\, \frac{1}{3})$	$(\frac{4}{3},\, \frac{2}{3})$
$\left[\frac{5}{3},\, 2\right]$	$(\frac{5}{3}, 0)$	$(\frac{5}{3},\, \frac{1}{3})$	$(\frac{5}{3},\, \frac{2}{3})$

4) La suma de Riemann de f asociada a la partición es:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{3,3} &= \big[f(1,\, 0) + f(1,\, \tfrac{1}{3}) + f(1,\, \tfrac{2}{3}) + f(\tfrac{4}{3},\, 0) + f(\tfrac{4}{3},\, \tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{4}{3},\, \tfrac{2}{3}) + f(\tfrac{5}{3},\, 2)+ \\ &\qquad + f(\tfrac{5}{3},\, 2) + f(\tfrac{5}{3},\, \tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{5}{3},\, \tfrac{2}{3})\big]\, \Delta x \\ &= \frac{47}{180} \approx 0{,}2611111111\end{aligned}$$

b) $$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{x} dy\, dx = \int_1^2 \frac{1}{2x}\, dx = \frac{ln(2)}{2} \approx 0{,}3465735902$$

4. Encontrar el volumen de la región sólida del espacio, bajo el plano $z = f(x,y) = 6-x-y$

a) Sobre el dominio rectangular R : $[0,\, 3]$, $[0,\, 2]$.

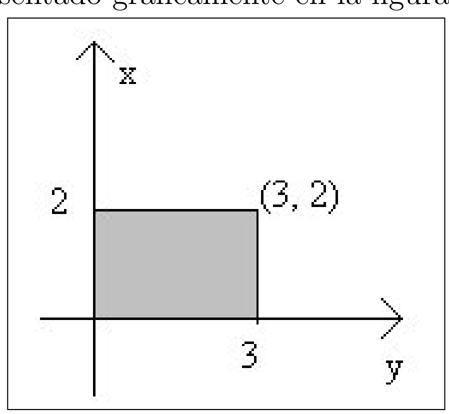
b) Sobre el dominio D limitado por:
las rectas $x = 0$, $y = 2x$, y la parábola $y = -x^2 + 3$.

Respuesta.

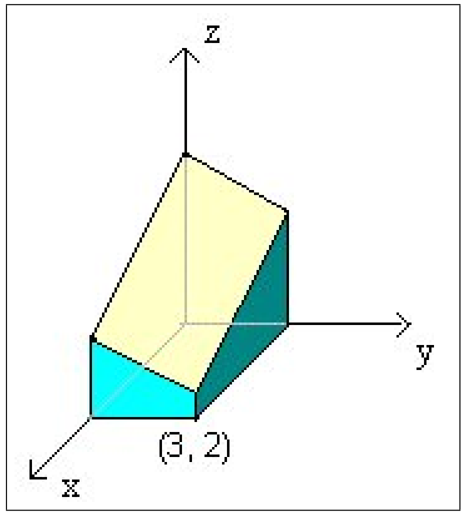
a) 1) La región de integración:

$$R: \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

es un rectángulo representado gráficamente en la figura:



2) La región sólida S del espacio bajo el plano $z = 6 - x - y$ y sobre el rectángulo R, se encuentra representada en la figura:



Sólido S

3) Describiendo la región a través de secciones verticales, el volumen V del sólido S se expresa mediante la siguiente integral iterada:

$$V = \int_0^3 \int_0^2 (6 - x - y)dydx$$

Así:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^2 (6 - x - y)dydx = \int_0^3 \left(6y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 (10 - 2x)dx = 10x - x^2 \Big|_0^3 = 21 \end{aligned}$$

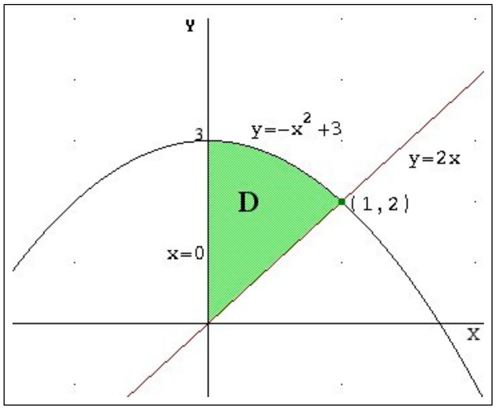
Luego, el volumen del sólido es 21.

Nota. Describiendo la región a través de secciones horizontales, se obtiene:

$$V = \int_0^2 \int_0^3 (6 - x - y)dxdy = 21$$

$b)$ $\left.\begin{array}{rl} y = & 2x \\ y = & -x^2 + 3 \end{array}\right| \Longrightarrow x = 1, \quad y = 2$

La región de integración D se encuentra achurada en la figura:



$$D: \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq -x^2+3 \end{cases}$$

Luego, el volumen V del sólido es:

$$V = \int_0^1 \int_{2x}^{-x^2+3} (6-x-y)dydx = \int_0^1 \left(6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{2x}^{-x^2+3} dx \approx 6{,}483$$

Luego, el volumen del sólido es 6,483.

5) Determinar el volumen V del sólido que queda debajo del plano $x+z=2$, sobre el plano $z=0$ y al interior del cilindro $x^2+y^2=4$.

Respuesta.

La proyección del cilindro sobre el plano XY es el círculo $x^2+y^2=4$, que corresponde al dominio de integración.

Luego:

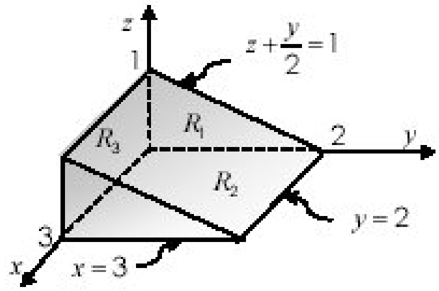
$$D: \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

Como el sólido presenta una simetría con respecto al plano XZ, se puede calcular, $\frac{1}{2}V$. En efecto:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}V &= \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2-x)dydx = \int_{-2}^{2} \left((2-x)y \,\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} \right) dx \\ &= \int_{-2}^{2} (2-x)\sqrt{4-x^2}dx \\ &= \left[x\sqrt{4-x^2} + \tfrac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 4\arcsin(\tfrac{x}{2}) \right] \Big|_{x=-2}^{x=2} = 4\pi \end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{2}V = 4\pi$, por lo tanto, $V = 8\pi$ (unidades de volumen).

6. Escribir la integral $I = \int\int\int_R f(x,y,z)dV$ por medio de tres integrales simples iteradas en coordenadas cartesianas, de todas las formas posibles, siendo R el prisma triangular recto:



Región R

Respuesta.

La intersección del prisma con los planos coordenados, se muestra en la figura y las diferentes posibilidades de resolución se muestran a continuación:

$$I = \int\int_{R_1} \left(\int_0^3 f(x,y,z)dx \right) dydz = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \int_0^{2-2z} \int_0^3 f(x,y,z)dxdydz \\ \displaystyle\int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^3 f(x,y,z)dxdzdy \end{cases}$$

$$I = \int\int_{R_2} \left(\int_0^{\frac{2-y}{2}} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} f(x,y,z)dzdydx \\ \displaystyle\int_0^2 \int_0^3 \int_0^{\frac{2-y}{2}} f(x,y,z)dzdxdy \end{cases}$$

$$I = \int\int_{R_3} \left(\int_0^{2-2z} f(x,y,z)dy \right) dxdz = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \int_0^3 \int_0^{2-2z} f(x,y,z)dydxdz \\ \displaystyle\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{2-2z} f(x,y,z)dxdzdy \end{cases}$$