1. Evaluar las siguientes integrales iteradas, de funciones de dos variables:

   a) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2 + 1)dxdy$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{cos\theta} (3r^2 sen\theta)drd\theta$

   c) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+y^2}\, dydx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} (y - \sqrt{x})\, dydx$

   Respuestas. a) $\frac{20}{3}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $-\frac{1}{10}$

2. Calcular las siguientes integrales dobles:

   a) $\displaystyle\iint_D (x^2 + 4y)dxdy$, siendo $D = [0, 2] \times [0, 3]$

   b) $\displaystyle\iint_D x^y dxdy$, siendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$

   Respuestas. a) 44 b) $\ln(2)$

3. Sea $f(x, y) = \dfrac{x}{(1 + y)^2}$.

   a) Encontrar el valor aproximado de $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$, siendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$, mediante sumas de Riemann, definiendo en el cuadrado D una partición de 9 subcuadrados congruentes, y eligiendo el vértice superior izquierdo de cada subcuadrado.

   b) Determinar el valor exacto de $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$.

4. Calcular el valor de $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\, \cos(y\sqrt{x})\, dA$, siendo R la región del plano XY limitada por los planos: $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, e $y = \sqrt{x}$.

   Respuesta. $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

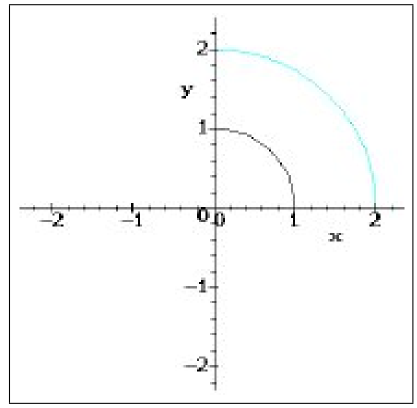
5. Para cada una de las siguientes integrales iteradas, representar gráficamente la región de integración; cambiar el orden de integración; y luego evaluar cada una de ellas:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$ b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dxdy$

   c) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\, dydx$ d) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x}\sin(x)\, dxdy$

Respuestas. a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{32}{3}$ c) $\dfrac{1-e^{-4}}{2}$ d) $\approx 1{,}85777$

6. Considerar la región D que se encuentra en el primer cuadrante, comprendida entre los dos círculos centrados en el origen, de radios 1 y 2 respectivamente, representada en la figura:



Escribir la integral doble de una función general $f(x,y)$ sobre la región D, como una integral iterada con respecto a x y a y.

7. Calcular la integral doble de la función $f(x,y) = x^3y^2 + xy$ sobre la región D limitada por las curvas $g(x) = x^2 + x$ y $h(x) = x^3 - x$, para x no-negativa.

Respuesta. $\approx 60{,}85434565$

8. Calcular el volumen de la región sólida que se encuentra en el primer octante, bajo la superficie $z = f(x,y) = 1 - y - x^2$.

Respuesta. $\frac{4}{15}$

9. Calcular el volumen del sólido en el espacio.

   a) Sólido limitado por: $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$.

   b) Sólido bajo la superficie $z = xy$ y sobre la región del triángulo del plano XY con vértices $(1,1)$, $(4,1)$ y $(1,2)$.

   c) Sólido limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

   d) Sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$, en el primer octante.

Respuesta. a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{31}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$

10. Calcular el volumen de la esfera de radio r cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, mediante integrales dobles.

Respuesta. $\frac{4}{3}\pi r^3$

11. Evaluar las siguientes integrales iteradas (de funciones de 3 variables):

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{9}\int_{0}^{y/3}\int_{y}^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\,dz\,dx\,dy$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{y/2}\int_0^{1/y} \sin y\, dz\, dx\, dy$

Respuestas: (i) $\frac{8}{27}$ (ii) $\frac{729}{4}$ (iii) $\frac{1}{2}$

12. Dibujar el sólido cuyo volumen representa la integral triple y reescribir ésta en el orden de integración que se especifica:

(i) $\displaystyle\int_0^{4}\int_0^{(4-x)/2}\int_0^{(12-3x-6y)/4} dz\, dy\, dx.$ Reescribir usando el orden $dy\, dx\, dz$.

(ii) $\displaystyle\int_0^{1}\int_y^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dx\, dy.$ Reescribir usando el orden $dz\, dy\, dx$.

Respuestas: (i) $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{(12-4z)/3}\int_0^{(12-4z-3y)/6} dy\, dx\, dz$ (ii) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{x}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$

13. Hacer la lista de los 6 órdenes posibles de integración, para la integral triple $\displaystyle\int\int\int xyz\, dV$, sobre el sólido $Q = \{\,(x,y,z) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 3\,\}$

Respuestas: $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{x}\int_0^{3} xyz\, dz\, dy\, dx$ $\displaystyle\int_0^{1}\int_y^{1}\int_0^{3} xyz\, dz\, dx\, dy$ $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{3}\int_0^{x} xyz\, dy\, dz\, dx$

$\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{1}\int_0^{x} xyz\, dy\, dx\, dz$ $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{1}\int_y^{1} xyz\, dx\, dy\, dz$ $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{3}\int_y^{1} xyz\, dx\, dz\, dy$

14. Usar una integral triple para calcular el volumen del sólido limitado por:

(i) $x = 4 - y^2$, $z = 0$, $z = x$, (ii) $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$,
(iii) $z = 9 - x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$, $z = 0$, $x \ge 0$

Resp: (i) $\frac{256}{15}$

(ii) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} dz\, dy\, dx = 4\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} dz\, dy\, dx = \frac{81\pi}{2} \approx 127{,}234$

(iii) $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{2-x}\int_0^{9-x^2} dz\, dy\, dx = \frac{50}{3}$ **Nota:** Todos los resultados son (unidades de longitud)^3

15. Cambiando a coordenadas polares, calcular las siguientes integrales dobles.

(i) $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dx\, dy$ (ii) $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ (iii) $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\, dy\, dx$

Respuestas: (i) $a^3/3$ (ii) $\approx 8{,}98462$ (iii) $2/3$

16. Calcular cada una de las siguientes integrales triples.

(i) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\cos\theta\,dr\,d\theta\,dz$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos^2\theta}\int_0^{4-r^2} r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 e^{-\rho^2}\rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ (iv) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Respuestas: (i) 8 (ii) 52/45 (iii) $\frac{\pi^2}{6}(1-e^{-8})$ (iv) 0

17. Pasar cada una de las siguientes integrales en coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y esféricas. Calcular la integral más simple.

(i) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^4 x\,dz\,dy\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\;dz\,dy\,dx$

Respuestas:

(i) Cilíndricas: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$, Esféricas: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\sec\phi}\rho^3\sin^2\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta$, 0.

(ii) Cilíndricas: $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\sqrt{r^2+z^2}\,dz\,d\theta\,dr$, Esféricas: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\rho^3\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta$, $\pi/8$.

18. Usar un cambio de variables apropiado para calcular el volumen del sólido comprendido bajo la superficie $z=f(x,y)$ y sobre la región plana R.

(i) $f(x,y)=(x+y)e^{x-y}$, R región acotada por el cuadrado de vértices $(4,0)$, $(6,2)$, $(4,4,)$ y $(2,2)$.

(ii) $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2y^2}$, R la región acotada por las gráficas de $xy=1$, $xy=4$, $x=1$, $x=4$. Sugerencia: Hacer $x=u$, $y=v/u$.

Respuestas: (i) $12(e^4-1)$ (ii) $\approx 1{,}48338$