FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Ingeriería Técnica Industrial. Especialidad en Mecánica.

Boletin 7. Integración Múltiple

Curso 2003-2004

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x+y)dydx.$ (b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dxdy.$

<u>**Solución**</u>:

(a) $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x+y)dydx=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\left(x\sqrt{1-x^2}+\frac{1-x^2}{2}\right)dx=$$
$$=\left[-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

(b) $$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dxdy=\int_0^2\left[\frac{2x}{\sqrt{4-y^2}}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}}dy=\int_0^2\frac{2\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{4-y^2}}dy=\int_0^2 2dy=4.$$

2. Dibuja la región R cuya área representa la integral iterada. Calcular dicha área, cambiando previamente el orden de integración.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}dxdy.$ (b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dydx+\int_2^4\int_0^{4-x}dydx.$

<u>**Solución**</u>:

(a) $$\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}dxdy=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dydx=\int_0^1[y]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

(b) $$\int_0^2\int_0^x dydx+\int_2^4\int_0^{4-x}dydx=\int_0^2\int_y^{4-y}dxdy=\int_0^2[x]_y^{4-y}dy=\int_0^2(4-2y)\,dy=\left[4y-y^2\right]_0^2=4.$$

3. Usar una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de $2x-3y=0,\ x+y=5,\ y=0.$

<u>**Solución**</u>:

$$A=\int_0^2\int_{\frac{3y}{2}}^{5-y}dxdy=\int_0^2[x]_{\frac{3y}{2}}^{5-y}dy=\int_0^2\left(5-y-\frac{3y}{2}\right)dy=\left[5y-\frac{5y^2}{4}\right]_0^2=5.$$

También puede hacerse integrando primero respecto de y y después respecto de x. En este caso hay que hacer dos integrales.

$$A=\int_0^3\int_0^{\frac{2x}{3}}dydx+\int_3^5\int_0^{5-x}dydx=5.$$

4. Para calcular las siguientes integrales iteradas es necesario cambiar previamente el orden de integración:

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen}x^2dxdy.$

<u>**Solución**</u>:

(a) $$\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}dydx=\int_0^2\int_0^y x\sqrt{1+y^3}dxdy=\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}\sqrt{1+y^3}\right]_0^y dy=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}dy=\left[\frac{1}{9}\sqrt{(1+y^3)^3}\right]_0^2=\frac{26}{9}.$$

(b) $\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^x \operatorname{sen} x^2 dy dx = \int_0^1 \left[y \operatorname{sen} x^2 \right]_0^x dx = \int_0^1 x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2} \left[-\cos x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$.

5. Realizar un esbozo de la región R y calcular la integral doble :

   (a) $\iint_R x dA$ y R: es el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, $y = 0$.

   (b) $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ y R: es el semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.

   Solución:

   (a) $\iint_R x dA = \int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x dx dy = \frac{1}{2} \int_0^3 \left[x^2 \right]_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(25 - y^2 - \frac{16}{9} y^2 \right) dy =$
   $= \frac{25}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{9} y^2 \right) dy = \frac{25}{2} \left(y - \frac{1}{27} y^3 \right)_0^3 = 25.$

   (b) $\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = 2 \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$
   $= 2 \int_0^2 \left(x^2 \sqrt{4 - x^2} + \frac{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}{3} \right) dx = 2 \int_0^2 \left(\frac{(4 - 2x^2)\sqrt{4 - x^2}}{3} \right) dx = \ldots$ Por este camino salen integrales complicadas. Ahora habría que hacer el cambio $x = 2 \operatorname{sen} t$. Es aconsejable hacerlo en coordenadas polares.
   $\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^\pi \int_0^2 r^2 r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^2 r^3 dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta = 4 \int_0^\pi d\theta = 4\pi.$

6. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones:

   (a) $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, primer octante.

   (b) $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$, primer octante.

   Solución:

   (a) $V = \int_0^1 \int_0^x xy dy dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_o^x dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} \right] dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

   (b) $V = 2 \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2} dy dx = 2 \int_0^1 \left[y \sqrt{1 - x^2} \right]_0^x dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(1 - x^2)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

7. Calcular las siguientes integrales dobles, pasando previamente a coordenadas polares.

   (a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy dy dx$

   (b) $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$

   Solución:

   (a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$
   $= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = \left[-\frac{2\cos^6\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}.$

(b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}} d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

8. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones

   (a) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ x^2+y^2=25.$

   (b) $z=\ln(x^2+y^2),\ z=0,\ x^2+y^2\geq 1,\ x^2+y^2\leq 4.$

   Solución:

   (a) $\displaystyle V=\iint_D zdA = 4\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dydx$. En cartesianas es muy difícil. Lo calculamos utilizando coordenadas polares. $\displaystyle V=\iint_D zdA = 4\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^5 rrdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^5 d\theta = \frac{125}{3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{250\pi}{3}$.

   (b) $\displaystyle V=\iint_D zdA = 4\int_1^2\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\ln(x^2+y^2)dydx$. En cartesianas es muy difícil. Lo calculamos utilizando coordenadas polares. $\displaystyle V=\iint_D zdA = 4\int_1^2\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\ln(x^2+y^2)dydx = \int_0^{2\pi}\int_1^2\ln(r^2)rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2\ln(r)rdrd\theta =$
   $\displaystyle = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right]_1^2 d\theta = \left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right).$

9. Calcular el volumen del sólido que es interior al hemisferio $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ y al cilíndro $x^2+y^2-4y=0$.
   Solución:
   Puede hacerse utilizando integrales dobles o triples. El resultado será el mismo.

   (a) Utilizando integrales dobles.
   $\displaystyle V=\iint_D zdA = 2\int_0^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\sqrt{16-x^2-y^2}dxdy$. Es complicado hacerlo en coordenadas cartesianas. Pasamos a coordenadas polares.
   $\displaystyle V=\iint_D zdA = 2\int_0^2\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\sqrt{16-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\operatorname{sen}\theta} r\sqrt{16-r^2}drd\theta =$
   $\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-\left(16-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{4\operatorname{sen}\theta} d\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(16-16\operatorname{sen}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}-16^{\frac{3}{2}}\right]d\theta =$
   $\displaystyle = -\frac{2}{3}4^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta-1\right)d\theta = -\frac{128}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}-1\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{3}\frac{3\pi-4}{6} = \frac{64}{9}(3\pi-4)$

   (b) Utilizando integrales triples.
   $\displaystyle V=\iiint_Q dV = 2\int_0^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dzdxdy$. Es complicado en cartesianas.
   Cambiando a coordenadas cilindricas tenemos:
   $\displaystyle V=\iiint_Q dV = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\operatorname{sen}\theta}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\operatorname{sen}\theta} r\sqrt{16-r^2}drd\theta$. a partir de aquí salen las mismas cuentas que antes.

10. Determinar a, de modo que el volumen interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen de hemisferio.

Solución:

Llamamos V_H al volumen del hemisferio y Ve al volumen exterior.

$V_H = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{128\pi}{3}$ (Puede calcularse con integrales pero no es necesario)

$$Ve = \iiint_Q dV = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta = \frac{4}{3}\left[\left(16-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{\pi}{2}.$$

Como $Ve = \frac{1}{2}V_H$, obtenemos que

$$\frac{4}{3}\left[\left(16-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{\pi}{2} = \frac{128\pi}{6} \Rightarrow \left(16-a^2\right)^{\frac{3}{2}} = 32 \Rightarrow 16 - a^2 = (32)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow a^2 = 16 - 8\,(2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = \sqrt{16 - 8\,(2)^{\frac{2}{3}}}.$$

11. Calcular las siguientes integrales triples:

(a) $\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x\;dz\;dy\;dx$ (b) $\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\;dz\;dx\;dy.$

Solución:

(a) $$\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x\;dz\;dy\;dx = \int_0^1\int_0^x [xz]_0^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2y^2\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx = \frac{1}{10}\left[x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}.$$

(b) $$\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\;dz\;dx\;dy = \frac{1}{2}\int_0^9\int_0^{y/3}\left[z^2\right]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^9\int_0^{y/3}\left(y^2-9x^2\right)dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^9\left[y^2x - 3x^3\right]_0^{y/3} dy = \frac{1}{2}\int_0^9\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{9}\right]dy = \frac{1}{36}\left[y^4\right]_0^9 = \frac{729}{4}.$$

12. Esbozar la región sólida cuyo volumen representa la integral triple $\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{10-x-y} dz\;dy\;dx$ y reescribirla en el orden que se indica $dz\;dx\;dy$.

Solución:

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{10-x-y} dz\;dy\;dx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{16-y^2}}\int_0^{10-x-y} dz\;dx\;dy$$

13. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones:

(a) $z = 9 - x^2 - y^2,\; z = 0$ (b) $z = 4 - x^2,\; y = 4 - x^2$, primer octante.

Solución:

(a) $V = \iiint_Q dV = \int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$. La integral en coordenadas cartesianas es difícil. La hacemos en coordenadas cilíndricas.

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3\left(9r - r^3\right)dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^3 d\theta = \frac{81}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81\pi}{2}.$$

(b) $$V = \iiint_Q dV = \int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{4-x^2} dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{4-x^2}[z]_0^{4-x^2}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{4-x^2}\left(4-x^2\right)dy\,dx$$
$$= \int_0^2\left(4-x^2\right)[y]_0^{4-x^2}\,dx = \int_0^2\left(4-x^2\right)^2 dx = \int_0^2\left(16 - 8x^2 + x^4\right)dx = \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{256}{15}.$$

14. Pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas. Evaluar la que resulte más sencilla:

(a) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx.$

Solución:

(a) **a.1.)** Coordenadas cilíndricas

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} rrdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^2dzdrd\theta.$$

a.2.) Coordenadas esféricas

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \rho\operatorname{sen}\phi\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \rho^3\operatorname{sen}^2\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\phi\left[\rho^4\right]_0^4 d\phi d\theta = 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\phi d\phi d\theta =$$

$$= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\phi}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8\pi^2$$

(b) **b.1.)** Coordenadas cilíndricas

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{\sqrt{a^2-r^2}} r\cos\theta r dzdrd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta dzdrd\theta$$

b.2.) Coordenadas esféricas

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{a}{\cos\phi}}^{2a\cos\phi} \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta =$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{a}{\cos\phi}}^{2a\cos\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} k\cos\theta d\theta = k\left[-\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi} = 0.$ Donde hemos puesto $\displaystyle k = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{a}{\cos\phi}}^{2a\cos\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi d\rho d\phi$, que no depende de θ.

15. Hallar el volumen del sólido interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y por encima del cono $x^2+y^2-z^2=0$.

Solución:

(a) Coordenadas cilíndricas $\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{4-r^2}-r\right)drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{3}\sqrt{\left(4-r^2\right)^3}-\frac{1}{3}r^3\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{8}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(b) Coordenadas esféricas $\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta =$

$$\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

16. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$ e interior al cono $x^2+y^2-z^2=0$.

Solución:

$$V = \iiint_Q dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_2^3 \rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{38}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta =$$

$$\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{76\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

17. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $z = x + y,\ z = 0,\ y = x,\ x = 0$ y $x = 3$.

    Solución:

    $$V = \iiint_Q dV = \int_0^3\int_0^x\int_0^{x+y} dzdydx = \int_0^3\int_0^x (x+y)\,dydx = \int_0^3\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{3}{2}\int_0^3 x^2dx = \frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^3 = \frac{27}{2}.$$

18. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráficas $z = 0$ y $z = 3$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

    Solución:

    $$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{10}}\int_{\sqrt{r^2-1}}^3 rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{10}}\left(3r - r\sqrt{r^2-1}\right)drd\theta =$$

    $$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3r^2}{2}+\frac{\sqrt{(r^2-1)^3}}{3}\right)_1^{\sqrt{10}} d\theta = \frac{45}{2}.\int_0^{2\pi} d\theta = 45\pi.$$