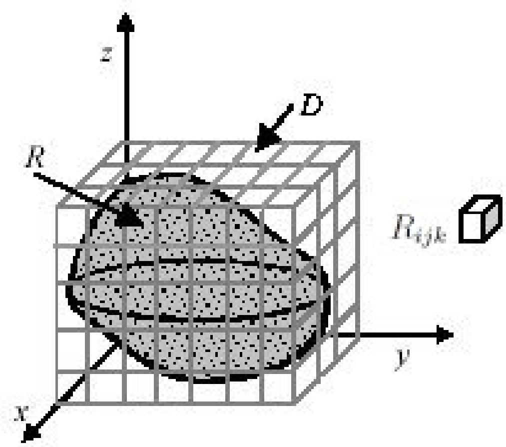
1. **Definición de integral triple**.



Es una generalización del concepto de integral doble. Consideramos ahora una función $f(x,y,z)$ definida y continua en una región regular R del espacio. Se efectúa una partición P de R en subregiones elementales (pequeños paralelepípedos) R_{ijk}, de volúmenes $\Delta V = \triangle x \, \triangle y \, \triangle z$, $i = 1,2,3,\cdots,m$, $j = 1,2,3,\cdots,n$, $k = 1,2,3,\cdots,p$,. Actuando de forma análoga a la vista para las integrales dobles, se elige un punto (x_i, y_j, z_k) en cada R_{ijk} y se consideran las sumas de Riemann de $f(x,y,z)$ en R, correspondientes a las diversas particiones P de R:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V$$

Se dice entonces que $f(x,y,z)$ es integrable en R, si existe el limite de las sumas de Riemann anteriores para $(\triangle x, \, \triangle y, \, \triangle z) \to (0,0,0)$. En este caso, dicho limite recibe el nombre de integral triple $f(x,y,z)$ en R. Se escribe:

$$\int\int\int_R f(x,y,z)dV = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x \Delta y \Delta z$$

Nota: Como en el caso de las integrales dobles, las triples cumplen también las propiedades de linealidad y aditividad respecto a la región de integración cuyos enunciados son análogos a los correspondientes para las integrales dobles.

2. **Cálculo de una integral triple**.

En general, no se calcula una integral triple a partir de su definición como el límite de sumas de Riemann. Aunque sí es posible recurrir a la definición cuando es necesario encontrar un valor aproximado. Para calcular valores exactos, se aplica la versión tridimensional del teorema de Fubini. Para calcular una integral triple, se necesitarán evaluar tres integrales simples reiteradas.

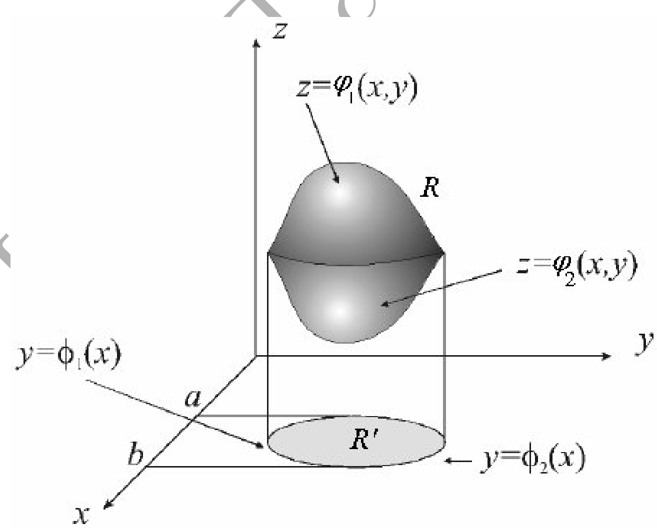
Veremos a continuación cómo se aplica el teorema de Fubini para diferentes regiones.

- *Integración sobre un paralelepípedo.*
  Si $R = \{(x, y, z) \, / \, a \leq b, c \leq d, p \leq q\} = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ y f es integrable en R, entonces:

$$\int\int\int_R f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)dzdydx$$

  pudiendo variarse el orden de integración (6 formas distintas).

- *Regiones simples tipo I (regulares con respecto al eje Z).*

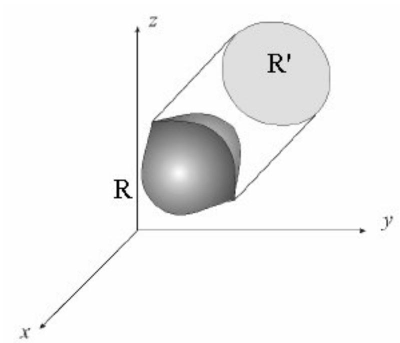


$$R = \{(x, y, z) \, / \, (x, y) \in R' \ y \ \varphi_2(x, y) \leq z \leq \varphi_1(x, y)\}$$

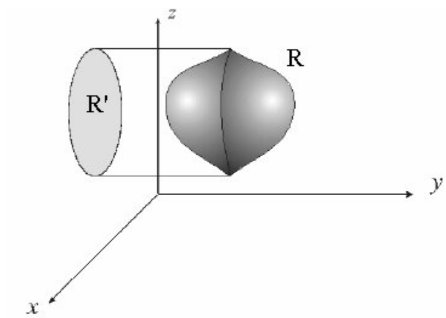
  En este caso la región R (ver figura) satisface que toda recta paralela al eje Z sólo corta a la frontera de R en dos puntos a lo sumo, o en un segmento. R' es la proyección de la región R sobre el plano XY. En este caso si $f(x, y, z)$ es una función continua sobre R, se cumple que:

$$\int\int\int_R f(x, y, z)dV = \int\int_{R'} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dydx$$

- *Regiones tipo II (regulares eje X) y III (regulares eje Y).* Lo mismo para regiones R que cumplan condiciones equivalentes respecto a los otros ejes, habría así otras dos formas posibles, proyectando sobre los planos YZ ó XZ.



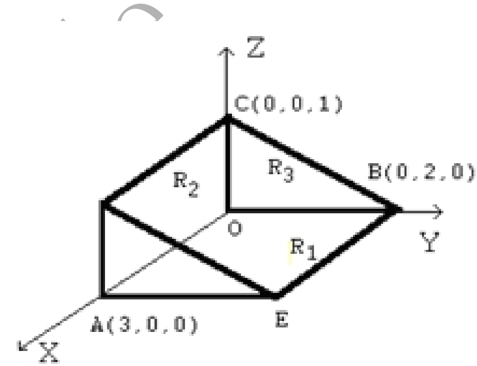
Región proyectable plano YZ



Región proyectable plano XZ

3. Calcular $I = \int\int\int_R x^2yzdV$, siendo Q la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

4. Escribir la integral $\int\int\int_R f(x, y, z)dV$, por medio de tres integrales simples iteradas en en coordenadas cartesianas, de todas las formas posibles, siendo R el prisma triangular recto de la siguiente figura:



5. El volumen de un sólido R en $\mathbb{R}^3$, viene dado por

$$\boxed{\text{Volumen de } R = \int\int\int_R dV}$$

6. Usando integrales triples calcular el volumen
   a) de una esfera de radio r.
   b) del sólido entre $x = yz$ y $x = 0$ sobre la región $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 4$.