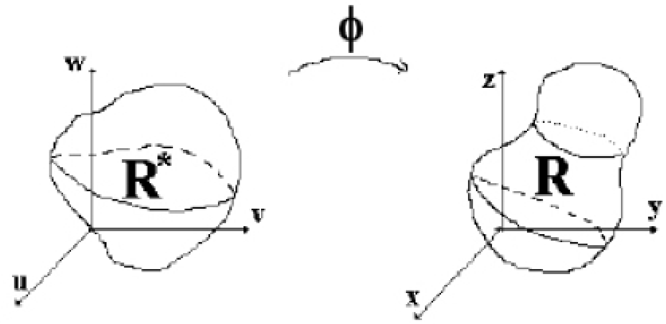
1. **Cambio de variable para integrales triples**



Sean R^* y R dos regiones en los espacios uvw y xyz, respectivamente y sea

$$\Phi = \Phi(u,v,w) = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

una transformación inyectiva de R^* en R, entonces para toda función integrable se tiene:

$$\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int\int_{R^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(x,y,w))|J|dudvdw$$

2. Actividades sobre cambio general de variables en integrales triples.

   a) Calcular
   $$\int\int\int_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}\,dxdydz$$
   donde
   $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x+y+z \leq 1\}$$
   efectuando el cambio de variables:
   $$u = x+y+z, \quad v = y+z, \quad w = z.$$

   b) Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con a, b y c números positivos.
   Sugerencia: Hacer el cambio de variable: $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.
   Respuesta: $V = \frac{4}{3}\pi abc$ u. de long.^{3}.

   c) Encontrar, usando integrales triples, el volumen del sólido limitado por los planos
   $$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 4 \\ x-2y-z &= 2 \\ x-2y-z &= 6 \\ 2x-y+z &= 0 \\ 2x-y+z &= 4 \end{cases}$$
   Respuesta: $V = 16$ u. de long.^{3}.

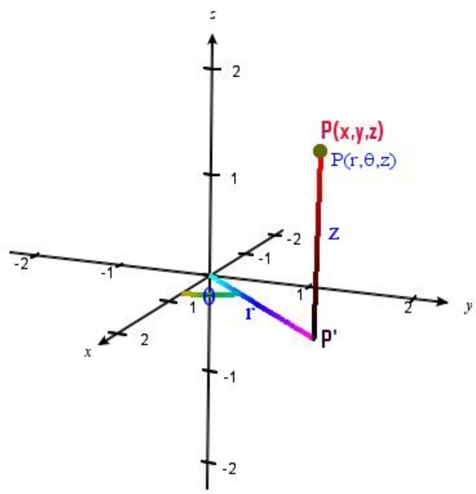
d) Calcular el volumen de la región W en el primer octante limitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, por los cilindros $xy = 1$, $xy = 4$, y por los planos $y = x$ e $y = 5x$, considerando el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} u &= xy \\ v &= \dfrac{y}{x} \\ w &= \dfrac{z}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Respuesta: $V = 18$ u. de long.^{3}.

3. Las transformaciones que usualmente se utilizan son:

- Cambio a coordenadas cilíndricas



Ya hemos visto que en el sistema de coordenadas cilíndricas la posición de un punto P en el espacio se determina por los tres valores (r, θ, z), donde r y θ, son las coordenadas polares de la proyección P' de P, sobre el plano xy.
El cambio de coordenadas cilíndricas viene dado por la siguiente función:

$$\Phi = \Phi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = x(r, \theta, z) = r\cos\theta \\ y = y(r, \theta, z) = r\sin\theta \\ z = z(r, \theta, z) = z \end{cases}$$

y

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Por lo tanto, si f es continua en R se tiene:

$$\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\underbrace{r}_{|J|}drd\theta dz$$

La expresión $dV = rdrd\theta dz$ es el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas. Estas coordenadas son especialmente útiles para trabajar con regiones limitadas por superficies cilíndricas de revolución en torno al eje z, planos que contienen a dicho eje y planos perpendiculares al mismo, esto es regiones limitadas por superficies coordenadas.

Observación: En las coordenadas cilíndricas recién comentadas, la proyección del punto$P$ del espacio, se proyecta sobre el plano XY. Análogamente, se pueden otros 2 *tipos* de coordenadas cilíndricas proyectando P tanto en el plano ZX como YZ:

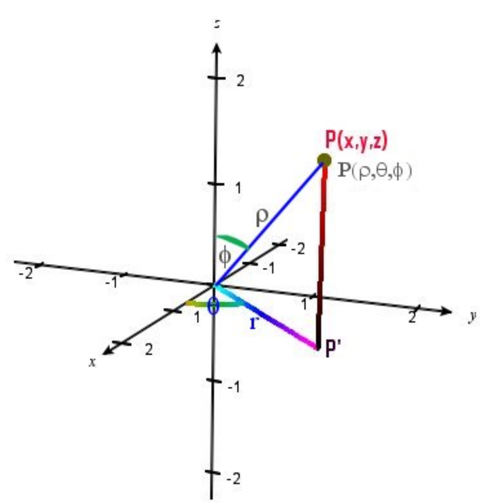
- Coordenadas cilíndricas con proyección en el plano ZX:

$$\Phi = \Phi(r,\theta,y) = \begin{cases} z = z(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ x = x(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ y = y(r,\theta,z) = y \end{cases}$$

- Coordenadas cilíndricas con proyección en el plano YZ:

$$\Phi = \Phi(r,\theta,x) = \begin{cases} y = y(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ z = z(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ x = x(r,\theta,z) = x \end{cases}$$

- Cambio a coordenadas esféricas



En las coordenadas esféricas, la posición de un punto $P = (x,y,z)$ el espacio se determina por los tres valores (ρ,θ,ϕ), donde $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.

El cambio de coordenadas esféricas viene dado por la siguiente función:

$$\Phi = \Phi(r,\theta,\phi) = \begin{cases} x = x(r,\theta,\phi) = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = y(r,\theta,\phi) = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = z(r,\theta,\phi) = \rho\cos\phi \end{cases}$$

y

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

Por lo tanto, si f es continua en R se tiene:

$$\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{R^*} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\underbrace{\rho^2\sin\phi}_{|J|}d\rho d\theta d\phi.$$

El elemento de volumen en coordenadas esféricas es: $dV = \rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$. Estas coordenadas son especialmente útiles para trabajar con regiones limitadas por superficies esféricas o cónicas, es decir para regiones limitadas por superficies coordenadas.

4. Transformar a coordenadas cilíndricas y evaluar

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 z\, dzdydx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5. Usar coordenadas esféricas para evaluar la siguiente integral triple

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$$

6. Calcular el volumen sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y bajo el plano $z = 1$.