Índice

UTALCA

1. Actividad inicial

Determinar cuales de las siguientes funciones

a) $y_1 = 3e^x$ b) $y_2 = -e^{-2x}$ c) $y_3 = 3xe^{-2x}$ d) $y_4 = e^{2x}$

satisfacen la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\,\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \tag{1}$$

Notas:

1) Las ecuaciones del tipo (1) reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales ordinarias*.
2) Las funciones y_1, y_2 y y_3, como satisfacen la ecuación (1), reciben el nombre de *soluciones de* (1).
3) La función y_4, no es una solución de (1).

Así entonces,

2. Ecuación diferencial Ordinaria

IMAFI

Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se llama ecuación diferencial ordinaria (EDO) a una ecuación en la que intervienen al menos una de las derivadas de la función, y eventualmente la función y su variable independiente.
En general, una EDO viene dada por

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

donde F es una función de $(n+2)$ variables.
Así por ejemplo, son EDOs:

- $y'' + xy' = e^x$
- $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$
- $y' = 2y$

3. Conceptos básicos asociados a una EDO

3.1. Orden de una EDO

Es el orden de la derivada de mayor orden que interviene en la EDO.

3.2. Grado de una EDO

Es el exponente que acompaña a su derivada de mayor orden.

3.3. Solución de EDO

Es toda función que satisface la EDO.

3.3.1. Actividad

Completar la siguiente tabla:

EDO	Orden	Grado	Solución (si/no)
$y'' - 5y' + 6y = 0$			$y = -e^x$
			$y = e^{3x}$
			$y = e^{2x}$
$y^2((y')^2 + 1) = 1$			$x^2 + y^2 = 1$
			$y = -1$
			$y = 2$

4. Tipos de soluciones de una EDO

En general, una EDO puede tener 3 tipos de soluciones:

4.1. Solución general

Una solución de una EDO de orden n recibe el nombre de *solución general* en el caso que ella contenga n constantes independientes. Cada una de estas constantes recibe el nombre de *constante de integración*.

4.2. Solución particular

Una solución que se obtiene a partir de la asignación de valores particulares a las constantes independientes de la solución general de una EDO, recibe el nombre de *solución particular* de dicha ecuación.

4.3. Solución singular

Si una EDO admite una solución que no corresponde a una solución particular, ella recibe el nombre de *solución singular*.

4.3.1. Ejemplo

Para la EDO $y' = \frac{2xy-y^2}{x^2}$, se tiene que:

- Solución general: $y = \frac{x^2}{c+x}$
- Solución particular: $y = x$
- Solución singular: $y = 0$

5. Actividades

1) Completar la siguiente tabla:

EDO	Orden	Grado	Solución (si/no)
$y' = y(1-y)$			$y = \frac{e^x}{1-e^x}$
			$y = 1$
			$y = \frac{1}{2+e^x}$
$y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$			$y = \frac{8x^3}{105}\sqrt{\frac{x}{3}}$
			$y = -\frac{8x^3}{105}$
			$y = 2x + 3$

2) Para cada ecuación diferencial, verificar que la función propuesta es su solución general, y determinar el valor de la constante para encontrar la solución particular indicada.

a)	$xy' = 2y$	$y = cx^2$	$y(2) = 12$
b)	$yy' + x = 0$	$x^2 + y^2 = c$	$y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

3) Cuando la función de una ecuación diferencial es de 2 variables o más, la ecuación recibe el nombre de *ecuación diferencial parcial* (EDP).

   Chequear cuales de las siguientes funciones

   a) $z_1 = e^x e^{3t}$ b) $z_2 = \sin(3t - x)$ c) $z_3 = x^2 - 6xt + 9t^2$ d) $z_4 = \cos(t + x)$

   son o no soluciones de la siguiente EDP:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{2}$$

4) **Actividad de modelado**.

   Determinar la ecuación diferencial que modela cada una de las situaciones descritas.

   a) El radio se desintegra con una rapidez que es proporcional a la cantidad de radio, R, presente en el instante t.
   b) La población P de un pais crece a una razón que es proporcional tanto al tamaño de la población como a la diferencia entre 10 millones y la población.
   c) Determinar la ecuación de una curva sabiendo que en cada uno de sus puntos (x, y) se cumple que la pendiente de su recta tangente es proporcional a su abscisa e inversamente proporcional a cuadrado de su ordenada.
   d) Si una esfera de hielo se derrite a una razón que es proporcional al área de su superficie, hallar una ecuación diferencial para el volumen de la esfera como función de la variable tiempo.

e) La población de truchas en un estanque crece a una tasa que es proporcional a la cantidad de truchas existentes en el instante t, $T(t)$, y a la diferencia entre su tamaño máximo M y $T(t)$ (hasta aquí, el modelo es el mismo de (b)). Determinar la ecuación de la población de truchas, sabiendo que en el estanque se pescan truchas a un ritmo proporcional al número de truchas existentes en cada instante.

f) Una partícula se mueve a lo largo de un camino rectilíneo de tal mare a que su aceleración en cada instante t viene dada por $a = 20 - 5t$. Encontrar una ecuación diferencial para la posición $s = s(t)$.

g) Familia de curvas que intersectan perpendicularmente a la parábola $y = x^2$.

h) Si $P(t)$ representa la fracción de una lista de palabras aleatorias que memoriza una determinada persona en un tiempo t ($P = 0$ corresponde a no saber ninguna palabra de la lista y $P = 1$ corresponde a recordarlas todas). El aprendizaje de un listado de palabras crece a una tasa que es proporcional a la fracción de palabras que le faltan por memorizar.

Solución: (a) $\frac{dR}{dt} = kR$, con $k < 0$. (b) $\frac{dP}{dt} = kP(10000000 - P)$. (c) $\frac{dy}{dx} = k\frac{x}{y^2}$ (d) $\frac{dV}{dt} = k(4\pi)^{1/3}(3V)^{2/3}$ (e) $T' = aT(M - T) - bT$ (f) $s'' = 20 - 5t$ (g) $y' = -\frac{1}{2x}$ (h) $\frac{dP}{dt} = k(1 - P)$