UTALCA

Índice

IMAFI

1. Introducción

Iniciamos en esta sesión el estudio de las EDO's más simple: EDO's de primer orden. En general, una EDO de primer orden tiene la forma $F(x, y, y') = 0$. En caso que en esta ecuación sea posible despejar y', ella toma la forma

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

2. Actividad inicial: Crecimiento del dinero.

Cuando a un capital de C se le aplica un interés r, compuesto continuamente, se cumple que la razón a la cual cambia la cantidad de dinero presente en el instante t es proporcional (con constante proporcionalidad r) a la cantidad de dinero presente en el instante t, es decir, si $S = S(t)$ representa la cantidad de dinero en el instante t (t en años):

$$\frac{dS}{dt} = rS \tag{2}$$

Nota: En (2) r está expresado en tanto por ciento.

Ahora bien de (2), se tiene

$$\frac{dS}{S} = rdt. \tag{3}$$

De donde, integrando se obtiene que la solución general de esta ecuación es

$$S = S(t) = ke^{rt}$$

Usando el valor conocido $S(0) = C$, se obtiene que la función que representa el crecimiento del dinero es es

$$S = S(t) = Ce^{rt}$$

Nota: Las EDOs del tipo (2), en las cuales es posible *separar* sus variables, tal como muestra la relación (3), reciben justamente el nombre de:

3. EDO de variables separables

Una EDO recibe el nombre de *EDO de variables separables* cuando ella puede ser escrita de la forma

$$y' = f(x)g(y) \tag{4}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \tag{5}$$

Nota: Las siguientes <u>son</u> ecuaciones diferenciales de variables separables:

1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

2) $3x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 2)dy = 0$

3) $y' = \dfrac{x + xy^2}{4y}$

Nota: Las siguientes <u>no son</u> ecuaciones diferenciales de variables separables:

1) $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x + 2y}{x - 5y}$

3) $y' = \dfrac{x + xy^2}{x + 4y}$

3.1. Técnica de resolución de una ODE de variables separables

Para resolver una EDO de variables separables se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Cada solución, $y = y_0$, de la ecuación $g(y) = 0$ es una solución de (5).

Paso 2: Separar variables. Al hacerlo, se obtiene la EDO:

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx \tag{6}$$

Paso 3: Tomando integrales en ambos lados de (6) y luego resolviendo ambas integrales, se obtiene una relación del tipo:

$$G(y) = F(x) + C \tag{7}$$

que representa, la *solución general implícita* de (5).

Paso 4: De ser posible, despejar y, de (7) para obtener la *solución general explícita* de (5).

3.2. Ejemplos desarrollados

3.2.1. Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = x\,y$.

Solución: En este caso, la EDO es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+4} \tag{8}$$

luego ella corresponde a una EDO de variables separables donde, de acuerdo a (4), $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ y $g(y) = y$.

Paso 1: Una solución es $y = 0$.

Paso 2: Separar variables. Al hacerlo, se obtiene la EDO:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2+4}\,dx \tag{9}$$

Paso 3: Tomando integrales en ambos lados y luego resolviendo ambas integrales, se obtiene:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C \tag{10}$$

que representa, la *solución general implícita* de (8).

Paso 4: Despejando y, se tiene que la solución general explícita de (8) es

$$y = K\sqrt{x^2+4} \tag{11}$$

3.2.2. Ejemplo 2

Para la siguiente EDO:

$$y' = \frac{x + xy}{1 + x^2} \tag{12}$$

1) Encontrar su solución general.

2) Determinar una solución particular tal que $y(0) = 4$.

Solución:

1) Esta EDO es de variables separables. En efecto, ella se puede escribir así:

$$\frac{dy}{1 + y} = \frac{x\,dx}{1 + x^2}$$

integrando ambos lados, se obtiene

$$\int \frac{dy}{1 + y} = \int \frac{x\,dx}{1 + x^2}$$

de donde

$$\ln(1 + y) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

de donde

$$\ln(1 + y) = \ln\sqrt{1 + x^2} + C$$

poniendo $C = \ln D$, $D = e^C$:

$$\ln(1 + y) = \ln D\sqrt{1 + x^2}$$

de donde:

$$y = D\sqrt{1 + x^2} - 1$$

2) De $y(0) = 4$, se tiene que $4 = D - 1$, o sea $D = 5$. Luego, la solución particular buscada es $y = 5\sqrt{1 + x^2} - 1$.

4. Actividades de modelación (resueltas)

4.1. Ley de enfriamiento de Newton

La *Ley de enfriamiento de Newton* afirma que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente que lo rodea.

Suponer que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 70° y que un objeto se enfría de 350° a 150° en 45 minutos. ¿Qué tiempo se necesitará para enfriar dicho objeto hasta una temperatura de 80°?

Solución: Sean t la variable que representa el tiempo (medido en minutos) y T la variable que representa la temperatura del objeto en el instante t.

Luego, de la Ley de enfriamiento de Newton y como la temperatura del medio ambiente es de 70°:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-70) \tag{13}$$

Esta ecuación diferencial es de variables separables. Separando variables:

$$\frac{dT}{T-70} = kdt$$

Ahora, aplicando integral:

$$\int \frac{dT}{T-70} = \int kdt$$

integrando:

$$\ln(T-70) = kt + C$$

despejando T se obtiene $T - 70 = e^{kt+C_1}$, es decir, $T = 70 + e_1^C \cdot e^{kt}$. Finalmente, poniendo $e^{C_1} = C$, se tiene que la solución de (13) es:

$$T = 70 + Ce^{kt}$$

Como en $t = 0$, T =350°, se tiene que: $350 = 70 + Ce^{k\cdot 0}$. Luego, $C = 280$. Por lo tanto:

$$T = 70 + 280e^{kt}$$

Como en $t = 45$, $T = 150°$, se tiene que : $150 = 70+280e^{k\cdot 45}$. De donde $k = \dfrac{\ln(2/7)}{45} \approx -0{,}028$. Por lo tanto:

$$T = 70 + 280e^{-0{,}028t}$$

Ahora bien, para encontrar el tiempo t en el cual el cuerpo llega a la temperatura de 80°, reemplazamos T por 80 en la relación precedente y despejamos t. Al hacerlo, se obtiene que $t \approx 119$ minutos.

Respuesta: Aproximadamente después de 119 minutos, la temperatura del cuerpo es de 80°.

4.2. Sobre el peso de una persona

Una ecuación diferencial que modela el peso de una persona es:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{K}{3500} - \frac{17,5}{3500}w$$

donde w es el peso en libras, t el tiempo en días y K el consumo diario de calorías (constante). Suponiendo que $K - 17,5w > 0$:

1) Hallar la solución general de la ecuación diferencial dada. (*En forma explícita*)

2) Una persona que pesa 180 libras y comienza una dieta de 2000 calorías diarias ¿cuánto tardará en perder 10 libras?

Solución:

a)
$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{K}{3500} - \frac{17{,}5}{3500}w\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{1}{3500}(K - 17{,}5w)\\
\frac{dw}{K-17{,}5w} &= \frac{1}{3500}dt\\
\int \frac{dw}{K-17{,}5w} &= \int \frac{1}{3500}dt\\
-\frac{1}{17{,}5}\ln(K-17{,}5w) &= \frac{1}{3500}t + C_1\\
\ln(K-17{,}5w) &= -\frac{17{,}5}{3500}t + C_2\\
K - 17{,}5w &= C_3e^{-0{,}005t}\\
17{,}5w &= K + C_4e^{-0{,}005t}\\
w &= \frac{K}{17{,}5} + Ce^{-0{,}005t}
\end{aligned}$$

b) Como $K = 2000$ y $w = 180$ en $t = 0$ entonces $C \approx 63{,}72$ Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es:

$$w = \frac{2000}{17{,}5} + 63{,}72e^{-0{,}005t}$$

Ahora debemos calcular el valor de t para $w = 170$.

$$\begin{aligned}
170 &= \frac{2000}{17{,}5} + 63{,}72e^{-0{,}005t}\\
e^{-0{,}005t} &= 1{,}8744\\
-0{,}005t &= \ln(0{,}8744)\\
t &= \frac{0{,}1342}{0{,}005}\\
t &= 26{,}84
\end{aligned}$$

Respuesta: Aproximadamente en 27 días.

5. Ejercicios propuestos

1) Dada la EDO $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$, se pide

UTALCA

IMAFI

a) Determinar su solución general explícita.

b) Encontrar, en caso de existir, una solución particular que cumpla $y(0) = \frac{1}{2}$.

Solución: (a) $y = \frac{c}{c+e^{-x}}$. (b) $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

2) Determinar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x + xy^2}{y + x^2y}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + xe^x}{y + e^{x+y}}$

Solución: (a) $(1 + x^2)(4 + y^2) = C$ (b) $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$

3) Comprobar que la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 0)$, y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a $\frac{y-1}{x^2+x}$, es $y(1 + x) = 1 - x$.

4) a) Comprobar que una EDO de la forma

$$y' = f(ax + by + c)$$

siempre se puede reducir a una EDO de variables separables, or medio de la sustitución $u = ax + by + c$.

b) Usando el procedimiento señalado en (a), resolver $\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

Solución: $4(y - 2x + 3) = (x + c)^2$

Nota: Puede revisar algunos ejercicios resueltos en http://ed21d.webcindario.com/id48.htm

6. Actividades propuestas de modelado

6.1. Modelo de crecimiento exponencial

Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una determinada población en el tiempo t. El modelo de crecimiento exponencial asume que la población crece a una tasa que es proporcional al tamaño de dicha población.

1) Determinar la EDO del modelo de crecimiento exponencial.

2) Supónga que una población experimental de moscas de la fruta aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si hay 100 moscas tras el segundo día de experimento y 300 después del cuarto día, ¿cuántas habían en la población original?

Solución: (i) $\frac{dP}{dt} = kP$ (ii) Aproximadamente, 33 moscas.

6.2. Modelo de crecimiento logístico

Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una determinada población en el tiempo t. Este modelo establece que "*la población crece a una tasa que es proporcional al producto del tamaño de dicha población con la diferencia entre el tamaño máximo M de individuos posible de la población y el tamaño de dicha población*".

1) Determinar la EDO del modelo de crecimiento logístico.

2) La población de una ciudad crece de acuerdo al modelo logístico y está limitada a 800.000 habitantes. Si la población en 1995 era de 400000 y en el 2000 de 500000, ¿cuál era la población en el año 2005?

Solución: (i) $\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$ (ii) 589000 habitantes.