UTALCA

Índice

IMAFI

1. Problema introductorio

Dado el siguiente problema con condición inicial.

$$\begin{cases} xdy = (x+y)dx \\ \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

1) Verificar que la ecuación propuesta no es de variables separables.

2) Resolver esta ED, introduciendo el cambio de variable $y = vx$, con $v = v(x)$.

Solución: $y = x(\ln x + 2)$

2. Función homogénea de grado n

Una función $z = f(x,y)$ se dice homogénea de grado n si ella satisface la relación

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

2.1. Actividades sobre funciones homogéneas

1) Verificar que $z_1 = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es homogénea de grado 1.

2) Sabiendo que la función $z_2 = \frac{xy}{x^2+y^2}$ es homogénea, determinar su grado.

3) Mostrar una función que sea homogénea de grado $\frac{3}{2}$.

4) Encontrar una función que no sea homogénea.

3. EDO homogénea

Una EDO de primer orden recibe el nombre de homogénea si tiene la forma

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

donde $f(x,y)$ es una función homogénea de grado 0.

Nota: Las siguientes son ecuaciones diferenciales homogéneas:

1) $(x^3+y^3)dx - xy^2dy = 0$

2) $(y^2-y^2)dx + 2xydy = 0$

3) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$

UTALCA

Nota: Las siguientes no son ecuaciones diferenciales homogéneas:

1) $3x(y^2+1)dx + y(x^2+2)dy = 0$
2) $xdx + y^2dy = 0$
3) $y' = \dfrac{x+xy^2}{x+4y}$

3.1. Técnica de resolución de una EDO homogénea

Para resolver una EDO homogénea (1) se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Verificar que $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

Paso 2: Transformar (1) por el cambio de variable $y = vx$, donde $v = v(x)$. La ecuación diferencial obtenida es de variables separables.

Paso 3: Resolver la EDO de variables separable obtenida en el paso (1).

Paso 4: En la solución general encontrada en (2) se sustituye v por $\frac{y}{x}$, obteniendo de esta manera la solución general de (1).

IMAFI

3.2. Ejemplo

Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{2}$$

Paso 1: Verificar que $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2+y^2)} = \frac{xy}{x^2+y^2} = \lambda^0 f(x,y)$$

Por lo tanto $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

Paso 2: Transformar (2) por el cambio de variable $y = vx$, donde $v = v(x)$.

De $y = vx$, se tiene que $y' = v + xv'$. Sustituyendo en (2):

$$\begin{aligned}
v + xv' &= \frac{x \cdot vx}{x^2 + (vx)^2} \\
v + xv' &= \frac{vx^2}{x^2(1+v^2)} \\
v + xv' &= \frac{v}{1+v^2} \\
xv' &= \frac{v}{1+v^2} - v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xv' &= -\frac{v^3}{1+v^2} \\ x\frac{dv}{dx} &= -\frac{v^3}{1+v^2} \\ -\frac{1+v^2}{v^3}dv &= \frac{dx}{x} \end{aligned} \tag{3}$$

Paso 3: Resolver la EDO de variables separable obtenida en el paso precedente.

Integrando ambos lados de (3)

$$\begin{aligned} -\frac{1+v^2}{v^3}dv &= \frac{dx}{x} \\ -\int \frac{1+v^2}{v^3}dv &= \int \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{2v^2} - \ln|v| &= \ln|x| + c \end{aligned} \tag{4}$$

Paso 4: En la solución general encontrada en (4) se sustituye v por $\frac{y}{x}$, obteniendo de esta manera la solución general de (2).

Sustituyendo en (4) v por $\frac{y}{x}$, se tiene

$$\frac{x^2}{2y^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|y| + c$$

de donde, la solución general implícita de (2) es:

$$\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y| + c$$

4. Una actividad de modelamiento

La relación entre el costo de manufactura de un artículo, M, y el número de clases de artículos fabricados, N, es tal que la tasa de incremento del costo de manufactura, a medida que aumenta el número de clases, es igual a la razón del costo por artículo más el número de clases, dividido todo entre el número de clases de artículos que se manufacturan. Obtener la relación entre el costo de frabricación por artículo, M, y el número de clases de productos fabricados, N, sabiendo que cuando $N = 1$, se tiene que $M = M_0$.

Pasos claves del desarrollo:

1) *Modelo de la situación*. Ecuación diferencial: $\frac{dM}{dN} = \frac{M+N}{N}$

2) *Solución general*: $M = N\ln N + CN$

3) *Solución particular*: $M = N(M_0 + \ln N)$

5. Actividades

1) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $xy\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 3y^2$

   b) $xy + y^2 + x^2 - x^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

   c) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2 + t\sqrt{x^2+t^2}}{tx}$

   Solución: (a) $y = \pm x\sqrt{cx^4 - 1},\ c > 0,$ (b) $y = x\tan(\ln(x) + c),$
   (c) $x = \pm t\sqrt{(\ln(x)+c)^2 - 1}$

2) Resolver el siguiente problema con condición inicial:

$$\begin{cases} (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \\ \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

   Solución: $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$

3) Encontrar la función $y = f(x)$ sabiendo que

   - $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$
   - $y(1) = 0$

4) Encontrar la función $y = f(x)$ sabiendo que

   - $x + ye^{\frac{y}{x}} - xe^{\frac{y}{x}}\dfrac{dy}{dx} = 0$
   - $y(1) = 0$

   Solución: $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

5) Haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= x - 3 \\ v &= y + 2 \end{aligned}$$

   Resolver la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{3y+2x}{y+2}$$

   Solución: $\dfrac{(y+2x-4)^2}{y+x-1} = C(x-3)^2$

Nota: Puede revisar otros ejercicios resueltos en http://ed21d.webcindario.com/id59.htm

UTALCA

6. Desafío final

Estudio de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{5}$$

Nota: Esta ecuación, también se puede presentar como:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx - (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

1) Comprobar que (5) se reduce a una EDO de variables separables por medio de la sustitución $t = a_1x + b_1y$ cuando $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

2) Resolver $(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0$.

3) Comprobar que, cuando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, (5) se reduce a una EDO homogénea por medio de la transformación $x = u + h$ e $y = v + k$, donde (h, k) es la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right|$$

4) Resolver la EDO

$$(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0.$$

5) Usando el cambio de variable $u = x^2$, $v = y^2$, resolver la EDO:

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0$$

6) Resolver la ecuación diferencial

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0$$

por medio del cambio de variables $u = \frac{1}{2}x^2$, $v = \frac{1}{2}y^2$.
Solución: $(4u + 6v - 7)du - (6u + 4v - 8)dv = 0$. $(x^2 - y^2 - 1)^{5/2} = c(x^2 + y^2 - 3)^{1/2}$.

IMAFI