Índice

1. Problema inicial **20**

2. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (EDL) **20**

3. Método de solución de una EDL **20**
3.1. Ejercicio propuesto 21

4. Una actividad guiada de modelado: saldando una deuda **21**

5. Actividades **22**

6. Desafío **23**

UTALCA

1. Problema inicial

Resolver la ecuación
$$y' + \frac{y}{x} = x^2$$

- *Sugerencia*: Multiplicar por x.
- *Solución*: $y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

2. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (EDL)

La ecuación diferencial de la forma

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x) \tag{1}$$

es conocida como *ecuación diferencial lineal de orden uno*.

Nota: Las siguientes son ecuaciones diferenciales lineales:

1) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 1$

2) $\dfrac{dy}{dx} - e^{-2x} = 3y$

IMAFI

Nota: Las siguientes <u>no son</u> ecuaciones diferenciales lineales:

1) $y' + xy^2 = \sin x$

2) $\dfrac{dy}{dx} + 3xy = e^{-2y}$

3. Método de solución de una EDL

La solución de esta ecuación proviene de observar que:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{\alpha(x)}\right) = e^{\alpha(x)}\left\{y'(x) + p(x)\,y(x)\right\} \tag{2}$$

donde

$$\alpha(x) = \int p(x)\,dx \tag{3}$$

De (2) y (3) se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left\{y\left(x\right)e^{\alpha(x)}\right\}=q\left(x\right)\exp\left(\int p\left(x\right)dx\right) \tag{4}$$

Luego, la solución[1] de la ecuación diferencial lineal de orden uno (1) es:

$$y\left(x\right) \;=\; e^{-\alpha(x)}\left\{\int q(x)e^{\alpha(x)}dx+c\right\} \tag{5}$$

3.1. Ejercicio propuesto

Verificar que la solución de la ecuación

$$y'+2y=x-1 \tag{6}$$

que satisface $y(0)=1$, es

$$y=\frac{7}{4}e^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$$

4. Una actividad guiada de modelado: saldando una deuda

Un estudiante pide prestado 100.000 a una tasa de interés anual de 9 por ciento. El estudiante hará los pagos a una tasa mensual de $800((1+t)/120)$, donde t representa el número de meses transcurridos desde que se le hizo el préstamo.

1) ¿Cuándo saldará la deuda el estudiante?

2) Suponiendo que el estudiante pague la deuda a la misma tasa descrita anteriormente, y con la misma tasa de interés, ¿cuánto dinero puede pedir prestado para pagarlo en exactamente 20 años?

Solución: Como se pregunta cuándo se saldará la deuda, se debe encontrar una relación entre el tiempo transcurrido y la deuda actual del estudiante. Luego, consideremos la función:

$D(t) =$ "Cantidad de dinero que debe el estudiante habiendo transcurrido t años"

La tasa de interés está medida en años, luego no hay problema con ella. Sin embargo, la "velocidad a la que el estudiante paga su deuda" está dada en *dinero/meses*, y se la quiere en *dinero/años*. Esta tasa es:

$$800((1+t)/120)\ \textit{dinero/1 mes} \;=80(1+t)\ \textit{dinero/1 año}$$

[1]El factor $e^{\alpha(x)}$ recibe el nombre de *factor integrante*

Ahora se debe plantear una ecuación que involucre la derivada de la función que queremos hallar, esto es, de $D(t)$:

$$\frac{dD}{dt} = (0{,}09)D - 80(1+t)$$

Reescribiendo la ecuación precedente como

$$\frac{dD}{dt} - 0{,}09D = -80(1+t)$$

Claramente, esta ED es lineal de primer orden. Aplicando el método estudiado, para resolver ED lineales, se obtiene que

$$D(t) = -\frac{80}{0{,}09} - \frac{80}{0{,}09}t - \frac{80}{(0{,}09)^2} + Ce^{0{,}09t}$$

Para hallar el valor de la constante, utilizamos el hecho de que $D(0) = 100.000$ (deuda inicial). Queda:

$$100.000 = D(0) = -\frac{80}{0{,}09} - \frac{80}{0{,}09}(0) - \frac{80}{(0{,}09)^2} + Ce^{0{,}09(0)}$$

Entonces

$$C = 100.000 + \frac{80}{0{,}09} + \frac{80}{(0{,}09)^2}$$

Para resolver (a), se debe encontrar t tal que $D(t) = 0$. Esto puede hacerse graficando a D y mirando su corte con el eje horizontal t. Para resolver (b) también puede usarse un computador o calculadora graficadora, variando $D(0)$ (en el caso anterior era 100.000) para que la gráfica intersecte el eje t en 20.

5. Actividades

1) Encontrar las solución general o particular, según corresponda, de cada una de las siguientes ecuaciones EDL:

   a) $xy' + (2x+1)y = e^{-2x}$, $y(1) = 0$.
   b) $y' = 2x(e^{-x^2} - y)$
   c) $(6 - 2uv)dv + v^2du = 0$

   Solución: (a) $y = -\frac{e^{-2x}}{2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x}$ (b) $y = (x^2 + c)e^{-x^2}$ (c) Es lineal en la función u. *Solución general* $u = \frac{2}{v} + cv^2$.

2) Resolver la EDO $y' + ay = bx$, con a y b constantes, de dos maneras diferentes.

6. Desafío

Resolver la ecuación diferencial

$$y' + 2y = g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}5(1 - e^{-2x}) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0{,}5(e^{-2} - 1)e^{-2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Nota: Puede revisar algunos ejercicios resueltos en http://ed21d.webcindario.com/id91.htm