1) (**20 pts**) ***Sobre derivadas parciales***

En cierta fábrica la producción P viene dada por la función:

$$P = 130K^{2/3}L^{1/3}$$

donde K viene en *unidades de capital* y L en *unidades de horas-trabajador*.

a) (**05 pts**) Calcular la producción si la inversión de capital es de 55 unidades de capital y la fuerza laboral es de 255 horas-trabajador.

b) (**15 pts**) Verificar que:

$$K\frac{\partial P}{\partial K} + L\frac{\partial P}{\partial L} = P$$

Desarrollo:

a) Sustituyendo los valores dados:

$$P = 130(55)^{2/3}(255)^{1/3} \approx 11922$$

Respuesta: La producción es, aproximadamente, de 11922 unidades

b) Es claro que

- $\dfrac{\partial P}{\partial K} = \dfrac{2}{3} \cdot 130K^{-1/3}L^{1/3}$
- $\dfrac{\partial P}{\partial L} = \dfrac{1}{3} \cdot 130K^{2/3}L^{-2/3}$

Luego:

$$\begin{aligned} K\frac{\partial P}{\partial K} + L\frac{\partial P}{\partial L} &= K \cdot \frac{2}{3} \cdot 130K^{-1/3}L^{1/3} + L \cdot \frac{1}{3} \cdot 130K^{2/3}L^{-2/3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 130K^{2/3}L^{1/3} + \frac{1}{3} \cdot 130K^{2/3}L^{1/3} \\ &= 130K^{2/3}L^{1/3} \\ &= P \end{aligned}$$

2) (**20 pts**) ***Sobre métodos del calculo diferencial de FVV para estudiar extremos relativos de una función***

Estudiar los extremos relativos de la función: $u = x^3 - y^3 - 3xy + 4$

Nota: Recordar que $A^3 + 1 = (A+1)(A^2 - A + 1)$

Desarrollo:

Paso 1: Encontrar las derivadas parciales de u: u_x y u_y.

$$\begin{aligned} u_x &= 3x^2 - 3y \\ u_y &= -3x - 3y^2 \end{aligned}$$

Paso 2: Buscar los puntos críticos de u
Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 0 \\ u_y &= 0 \end{aligned}\right|$$

En este caso, el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ -3x - 3y^2 &= 0 \end{aligned}\right|$$

Resolviendo este sistema, se obtienen los puntos críticos: $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (-1,1)$

Paso 3: Análisis de los puntos críticos

a) Calcular u_{xx}, u_{yy} y u_{xy}: $z_{xx} = 6x$, $z_{yy} = -6y$ y $z_{xy} = -3$

b) Formar $D = D(x,y) = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2$:
$D = D(x,y) = -36xy - 9$

- **Análisis del punto crítico** $P_1 = (0,0)$
  $D(0,0) < 0$. Luego, $P_1 = (0,0)$ es un punto silla.
- **Análisis del punto crítico** $P_1 = (-1,1)$
  $D(-1,1) > 0$. Luego, en $P_1 = (-1,1)$ hay extremo y como $u_{xx}(-1,0) < 0$, en $(-1,1)$ la función tiene un máximo en este punto crítico.

Respuesta: La función analizada presenta en máximo en $(-1,1)$ igual a 5 $[= u(-1,1)]$. En el punto $0,0)$ la función tiene un punto silla.

3) (**20 pts**) ***Sobre métodos del calculo diferencial de FVV para estudiar los extremos de una función con restricción***

Una caja rectangular descubierta en la parte superior debe tener un volumen de $6m^3$. El costo por m^2 de materiales es M\$30 para la base, M\$10 para el frente y la parte de atrás, y M\$5 para los otros dos lados. Determinar las dimensiones de la caja que minimizan los costos de los materiales.

Desarrollo:

Sean x el largo, y el ancho y z el alto de la caja.

Entonces, este problema viene modelado por:

$$\begin{array}{lcl} \text{Minimizar} & : & C = C(x,y,z) = 30xy + 20xz + 10yz \\ \text{Sujeto a} & : & xyz = 6 \end{array}$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange,

$$\left.\begin{array}{rcl} C_x & = & \lambda g_x \\ C_y & = & \lambda g_y \\ C_z & = & \lambda g_z \\ xyz & = & 6 \end{array}\right|$$

se obtiene el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} 30y + 20z & = & \lambda yz \\ 30x + 10z & = & \lambda xz \\ 20x + 10y & = & \lambda xy \\ xyz & = & 6 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema, se obtiene que $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

Respuesta: Las dimensiones de la caja que minimizan el costo de los materiales son largo 1m, ancho 2m y alto 3m.

UTALCA

IMAFI