| **NOTA** | |
|---|---|

**DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):**

| Apellido paterno: | Apellido materno: | Nombre: |
|---|---|---|
| Número de RUT: | Número de MATRICULA: | CARRERA: |
| Firma | | |

**Instrucciones**:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Entregar, en cada actividad, la respuesta escrita con lápiz pasta.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- **A**pagar y guardar sus celulares.

**Nota**$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

**CORRECCIóN**

| | |
|---|---|
| Pregunta 1 | |
| Pregunta 2 | |
| Pregunta 3 | |
| **TOTAL PUNTOS** | |

UTALCA

IMAFI

1) **(20 ptos.)**

La pendiente de una curva en su punto $(x, y)$ viene dada por

$$m = \frac{y - x}{x}$$

Determinar la ecuación de esta curva, sabiendo que su gráfico pasa por el punto $(1, 2)$.

---

**Desarrollo**:

- Primero se chequea que la función $\dfrac{y - x}{x}$ es homogénea de grado 0.
- Haciendo el cambio de variable $y = vx$ se obtiene la ED:

$$dv = -\frac{dx}{x}$$

cuya solución general es

$$v = -\ln x + C$$

- Por lo tanto,

$$y = -x \ln x + Cx$$

- Como la curva pasa por el punto $(1, 2)$, se obtiene que $C = 2$

**Respuesta**: La ecuación de la curva buscada es $\boxed{y = -x \ln x + 2x}$

2) **(20 puntos)**

Se echa a rodar una pelota sobre un césped horizontal con velocidad inicial de 25 pies/seg. Debido al roce, su aceleración es constante e igual a $-6$ pies/seg$^2$.

a) Calcular la función velocidad $v = v(t)$.
b) Determinar la función posición $s = s(t)$
c) Determinar la distancia que recorrerá la pelota hasta detenerse.

---

**Desarrollo**:

a) $a = \dfrac{dv}{dt} = -6 \quad \Longrightarrow \quad dv = -6dt \quad \Longrightarrow \quad v = -6t + C.$
Cuando $t = 0$, $v = 25$, se obtiene $C = 25$, luego

$$\boxed{v = -6t + 25.}$$

b) $\dfrac{ds}{dt} = v \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{ds}{dt} = -6t + 25 \quad \Longrightarrow \quad ds = (-6t + 25)dt \quad \Longrightarrow \quad s = -3t^2 + 25t + C_2$
Cuando $t = 0$, $s = 0$, se obtiene $C_2 = 0$, luego

$$\boxed{s = -3t^2 + 25t.}$$

c) Cuando se detiene: $v = 0$, luego la pelota se detiene $t = \frac{25}{6}$ seg después de haber sido lanzada, luego
En este tiempo, la pelota recorre $\boxed{s = \frac{625}{12} \approx 52{,}08 \text{ pies.}}$

3) **(20 puntos)**

La *Ley de enfriamiento de Newton* afirma que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente que lo rodea.

Sabiendo que una taza de agua a temperatura de $100^o$ C se enfría en 10 minutos a $80^o$ C, en un cuarto cuya temperatura ambiente es de $25^o$ C.

a) Plantear la ecuación diferencial que modela la *Ley de enfriamiento de Newton*. Usar $T = T(t)$, donde $T$ es la temperatura del agua en grados Celsius y $t$ es el tiempo en minutos

b) Determinar la solución general de la ecuación diferencial planteada en (a).

c) Con la información entregada, encontrar la solución particular asociada.

d) Determinar la temperatura del agua después de 20 minutos.

---

**Desarrollo**:

a) $\boxed{\dfrac{dT}{dt} = k(T - 25)}$

b) $\boxed{T = 25 + Ce^{kt}}$

c) I) Usando que $T = 100$, cuando $t = 0$ se obtiene que $C = 75$

II) Usando que $T = 80$, cuando $t = 10$ se obtiene que $k \approx -0{,}03$

Luego, la solución particular es $\boxed{T = T(t) = 25 + 75e^{-0{,}3t}}$

d) Sustituyendo $t = 20$ en la solución particular, se tiene que La temperatura del agua después de 20 minutos es, aproximadamente, $\boxed{25, 2^o.}$