1) (**30 puntos**) **Sobre una EDO de variables separables**

Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y}{x}$$

a) Encontrar su *solución general explícita*
b) Determinar *la solución particular* para la cual el valor de y sea 8 cuando x sea igual a 4

Desarrollo:

a) Separando variables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

integrando a ambos lados:

$$\ln(y) = \ln(x) + C$$

poniendo $C = \ln A$

$$\ln(y) = \ln(x) + \ln A = \ln(Ax)$$

Luego, la solución general es

$$\boxed{y = Ax}$$

b) Sustituyendo $y = 8$, $x = 4$, se obtiene que $A = 2$. Luego la solución particular pedida es

$$\boxed{y = 2x}$$

2) (**30 puntos**) **Sobre una situación problemática que se modela con una EDO de variables separables**

Según un estudio, una noticia importante se difunde en una población adulta de 1000 personas a una tasa proporcional al número de personas que no han escuchado la noticia. Si $y = f(t)$ representa el número de personas que han escuchado la noticia t días después de que esta se ha producido.

a) Plantear la ecuación diferencial que modela esta situación.

b) Observando que $y = 0$ cuando $t = 0$, resolver la ecuación diferencial precedente.

Desarrollo:

a) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = k(1000 - y)}$

b) Separando variables e integrando:

$$\int \frac{dy}{1000 - y} = \int k dt$$

de donde:

$$-\ln(1000 - y) = kt + C_1$$

despejando y:

$$y = 1000 - Ce^{-kt}, \quad \text{donde} \quad C = e^{-C_1}$$

Usando la condición inicial: $y = 0$ cuando $t = 0$, se tiene $C = 1000$. Por lo tanto,

$$\boxed{y = 1000 - 1000e^{-kt} = 1000(1 - e^{kt})}$$