Título: **“EL PROCESO DE MODELACIÓN EN EL DISEÑO DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS”**

Autores: Nélida Aguirre, Cecilia Elguero, Fabiana Rosso
Institución: Universidad Nacional de Río Cuarto – Provincia de Códoba – República Argentina
Teléfono: 0358- 4676228 ; e-mail: nvaguirre@exa.unrc.edu.ar
Informe de Investigación – Nivel universitario

INTRODUCCION

Consideramos que una currícula con un marcado formalismo y una formación excesivamente abstracta, no favorece la capacidad de un alumno de aplicar conocimientos matemáticos a situaciones del mundo real. Por otra parte, los alumnos pueden descubrir relaciones más significativas entre ideas abstractas y aplicaciones prácticas cuando se les estimula su interés, se eleva el grado de motivación por aquello a aprender, y ello se acompaña de una enseñanza interactiva, con oportunidad para discutir, consultar y trabajar cooperativamente.

Es nuestro desafío, como formadores, crear ámbitos de aprendizaje más eficientes en los cuales los conceptos sean internalizados por los alumnos con una metodología que les permita descubrir, interactuar, experimentar e investigar.

En este sentido, consideramos que la modelación matemática constituye una de las herramientas instruccionales que permitirá crear las condiciones necesarias para formar profesores de matemática con una mayor capacidad para reconocer, aplicar y validar el uso de las matemáticas en el mundo real. Pero, si bien es reconocida la relevancia de la modelación matemática, ella es muchas veces considerada simplemente como una aplicación de la matemática y no como un proceso que implica acciones tales como: identificar el problema en el mundo real, generar el modelo matemático, resolverlo, validar su solución en la situación original, analizar limitaciones, realizar simulaciones y predicciones.

Las autoras de este trabajo integramos un equipo de investigación que ha presentado un proyecto con temática referida a la modelación en el currículo de la carrera de Profesor en Matemática. Dicho proyecto, que fue aprobado por la Agencia Córdoba Ciencia, de Argentina, en el marco del Programa de Apoyo a grupos de investigación de reciente formación, se desarrollará durante los años 2006 y 2007.

Como asumimos que la modelación debe estar presente como un proceso en la formación del profesor, impulsamos su inserción en los planes de estudio como una transformación curricular importante a realizar. Por esta razón, consideramos que deberían incluirse actividades especiales de aprendizaje para que los alumnos adquieran conocimientos teóricos, prácticos y metodológicos acerca de las componentes generales del proceso de modelación.

Es nuestra intención difundir los avances obtenidos. Por esta razón en este trabajo presentamos propuestas de actividades de aprendizaje que, si bien se encuentran planteadas como aplicaciones en la literatura, permitirán a los alumnos completar el ciclo del proceso de modelación, extrayendo los datos a partir de una actividad real de laboratorio para formular el modelo. A partir de situaciones sencillas, los alumnos deberán seleccionar los aspectos más relevantes, formular conjeturas que finalmente deben ser validadas y establecer conclusiones. Al hacer sus propias pruebas los alumnos consolidarán los conocimientos adquiridos e incorporarán nuevos con un mayor nivel de significatividad.

Para cada actividad explicitamos objetivos, conocimientos previos para afrontarla, requerimientos de instrumentación y secuenciación de las tareas a realizar. Incluimos, además, actividades adicionales que implican al alumno ya sea extender, profundizar o realizar enfoques alternativos de un modelo que haya sido discutido con anterioridad o estudiar un nuevo modelo. Esperamos con este trabajo contribuir a generar una reflexión acerca de la importancia de incluir la modelación matemática como objeto de estudio en los diseños curriculares del Profesorado en Matemática.

ACTIVIDAD 1

**Objetivo:** *que los alumnos descubran de manera experimental la relación lineal existente entre dos variables, entiendan el significado de la razón de cambio y que la misma es constante para funciones lineales.*

**Conocimientos previos:** *Funciones lineales - Proporcionalidad - Regresión Lineal.*

**Materiales:** *Un recipiente cilíndrico de vidrio o plástico transparente de aproximadamente 50 cm. de alto y 45 cm. de diámetro - Agua - Regla o cinta métrica - Cronómetro.*

**I) Identificación del problema:** *Hallar un modelo que permita describir la distancia existente entre el borde de un recipiente cilíndrico y el nivel alcanzado por el agua que ingresa al mismo con velocidad constante, en función del tiempo. ¿Cómo es la razón de cambio?*

**II) Formulación del modelo**

**A) Procedimiento para recolectar datos:**

- *Fijar la regla o la cinta métrica en la parte externa del recipiente.*
- *Permitir que el agua ingrese en el recipiente desde una canilla, regulando desde el inicio el flujo de la misma para verterla a razón constante.*
- *A medida que el agua llena el recipiente, hacer lecturas de la distancia entre el borde del recipiente y la superficie del agua (h), para diferentes valores de tiempo (t) y anotarlos en una tabla.*

**B)** *Usar MatLab para realizar un gráfico con los pares (t,h) obtenidos. Conjeturar la relación entre las variables t y h, escribiendo la ecuación que mejor describe la situación experimental.*

(Los alumnos observarán que la tendencia de los puntos graficados sugiere fuertemente que los mismos se encuentran sobre la gráfica de una función lineal decreciente y llegarán a plantear, por lo tanto, una ecuación general de la forma:

$$h = a\,.t + b$$

en donde $a$ y $b$ son los parámetros a determinar).

**C)** *Encontrar la recta que mejor ajusta a los datos experimentales y observar gráficamente este ajuste.*

**III) Interpretación y validación:**

*¿Se puede afirmar que la relación entre las variables consideradas en esta actividad es lineal?. Validar el modelo.*

**IV) Resoluciones matemáticas vinculadas con el modelo.**

**A)** *Encontrar el incremento del nivel de agua entre dos valores de tiempo. Calcular la razón de cambio en ese intervalo de tiempo. Repetir el procedimiento para calcular la razón de cambio en otro intervalo de tiempo. ¿Qué conclusión se puede obtener acerca de la razón de cambio para funciones lineales?. Demostrar esta afirmación.*

**B)** *Una vez que el agua llega al tope del recipiente, ¿sigue valiendo el modelo lineal planteado? Justificar, si la respuesta es positiva y si la respuesta es negativa, plantear la nueva relación existente entre las variables.*

**V) Predicciones**

**A)** *¿En qué tiempo la distancia entre el borde del recipiente y el nivel alcanzado por el agua es 1/3 de la altura del recipiente?*

**B)** *¿Cuál es la altura alcanzada por el nivel del agua luego de transcurridos 1/5 del tiempo en que tarda en llenarse el recipiente?*

ACTIVIDAD ADICIONAL:

**A)** *Establecer al menos dos suposiciones que se hicieron para el desarrollo del modelo.*

**B)** *Reemplazar una de las suposiciones para cambiar el modelo y escribir un nuevo modelo el cual difiere del modelo original en la nueva suposición.*

**C)** *¿Cómo afecta el nuevo requerimiento?*

ACTIVIDAD 2

**Objetivo:** *que los alumnos descubran de manera experimental la ley de enfriamiento de Newton.*

**Conocimientos previos:** *Funciones exponenciales - Ecuaciones diferenciales lineales - Regresión Lineal.*

**Materiales:** *Agua - Un recipiente en donde calentar el agua - Calentador - Termómetro que pueda medir 100 ºC o más (o sensor de temperatura) - Cronómetro.*

**I) Identificación del problema:** *Hallar un modelo matemático que permita describir el enfriamiento del agua a partir de su ebullición en función del tiempo, en un ambiente con temperatura constante. ¿Es la ley de enfriamiento de Newton una buena representación de este enfriamiento?*

**II) Formulación del modelo**

**A) Procedimiento para recolectar datos:**

- *Registrar la temperatura del ambiente en donde se realiza el experimento como* $T_m$.
- *Colocar el agua en el recipiente y ponerla a calentar hasta que llegue a punto de ebullición.*
- *Sumergir el termómetro (o un sensor de temperatura conectado a una PC) en el agua hirviendo y registrar este valor como* $T_0$, *la temperatura máxima inicial del agua.*
- *Apagar el fuego y haciendo lecturas en el termómetro, tomar registros de la temperatura T (en grados centígrados) en función del tiempo t (en minutos), utilizando para ello un cronómetro. Realizar este procedimiento hasta que la temperatura que marca el termómetro sea un grado mayor que la temperatura del ambiente.*

**B)** *Realizar un gráfico con todos los pares (t,T) que fueron registrados (usar MatLab).*

**C)** *Conjeturar la relación entre las variables t y T y escribir la ecuación que mejor describe la situación experimental.*

(Los alumnos observarán que la tendencia de los puntos graficados sugiere fuertemente que los mismos se encuentran sobre la gráfica de una función exponencial decreciente y llegarán a plantear una ecuación general de la forma:

$$T = c\,.e^{at} + T_m \qquad (1)$$

en donde T es la temperatura estimada en el tiempo $t$ y $c$ y $a$ son constantes a determinar, con $a < 0$. Previamente se les hará notar que la recta $y=T_m$ es una asíntota de la función exponencial).

**D)** *Para determinar los parámetros de la ecuación (1):*

- *Establecer la relación funcional que vincula las variables t y* $ln(T- T_m)$. *¿Cuáles son los parámetros a determinar?*
- *Usar regresión lineal para obtener la recta que mejor ajusta a la nube de puntos* $(t, ln(T- T_m))$. *Observar gráficamente el ajuste de la función (1) linealizada.*

**E)** G*raficar la función exponencial (1) sobre el gráfico de los puntos obtenidos del experimento para apreciar el ajuste.*

**III) Interpretación y validación:**

**A)** *¿Se puede afirmar que la curva exponencial obtenida a partir de la ecuación (1) y de los cálculos realizados es un buen ajuste para los puntos (t, T) registrados en el experimento?. Validar el modelo.*

**B)** *¿Qué suposiciones se hicieron para el desarrollo del modelo?*

**IV) Resoluciones matemáticas vinculadas con el modelo.**

*La ley de enfriamiento de Newton se puede describir de la siguiente manera:*
*"La razón de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea".*

**A)** *Escribir una ecuación diferencial que exprese la ley de enfriamiento de Newton.*

**B)** *Encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal planteada en el inciso* **A)** *y dar condiciones para los parámetros.*

**C)** *¿Se puede concluir que la ley de enfriamiento de Newton es una buena representación del enfriamiento del agua del problema planteado?.*

**V) Predicciones**

**A)** *¿En qué momento la temperatura del agua se encuentra a 10ªC de la temperatura del ambiente?*

**B)** *¿Cuál es la temperatura del agua después de transcurridos 12 minutos del inicio del experimento?.*

ACTIVIDAD ADICIONAL:
Una aplicación interesante de la ley de enfriamiento de Newton consiste en determinar el instante de fallecimiento de una persona, después de algunas horas de muerta. Si bien se trata de una aplicación que aparece en la literatura, nuestra propuesta concentra la atención en los supuestos del modelo y las condiciones que deben cumplir los parámetros. Por eso, el planteo de la aplicación lo hacemos de la siguiente manera:

*Un forense llega a la escena de un crimen y ve que la temperatura del cadáver es de 26,8ªC.*

**A)** *Proponer datos adicionales, pero verosímiles, necesarios para establecer una hora aproximada de la muerte de la víctima, aplicando la ley de enfriamiento de Newton. Justificar la elección de los parámetros.*

**B)** *Con los valores fijados en el inciso* **A)** *para los parámetros, formular una pregunta referida al problema planteado y responderla.*

ACTIVIDAD 3

**Objetivo:** *que los alumnos puedan obtener una estimación aceptable de la cantidad de taxis circulantes en una ciudad, utilizando el concepto de promedio.*

**Conocimientos previos:** *Progresión aritmética - Promedio - Estimación puntual y por intervalo.*

**Materiales:** *Libreta de anotaciones para llevar registros.*

**I) Identificación del problema:** *En casi todas las ciudades, las licencias de los taxis están numeradas de manera creciente, empezando en 1 y terminando en N, que es la cantidad total desconocida de taxis circulantes. ¿Cómo se puede estimar N?*

**II) Formulación del modelo y resoluciones matemáticas vinculadas con él.**

**A)** *Calcular el promedio de las licencias de los taxis cuando:*
$N = 8$, $N = 30$ *y* $N = 200$

**B)** *Obtener una expresión que de la relación entre la cantidad de taxis N en términos del promedio P de sus licencias.*
( Se obtendrá que $N = 2P - 1$)

**C)** *Si bien el valor de P es desconocido, se obtendrá una estimación de él a través de una muestra. Para ello:*

- *Llevar un registro de las 30 primeras licencias que se ven al estar parado en una esquina céntrica de la ciudad.*
- *Determinar el promedio P' de estas 30 licencias.*
- *Establecer una manera de estimar la cantidad de taxis circulantes en una ciudad. ¿Cuáles son las suposiciones que se hicieron en la construcción del modelo?.*
  ( $N \approx 2 \cdot P'$ )

**III) Interpretación y validación:**

*Encontrar un intervalo de confianza del 90% para el número total de licencias N. Interpretar los resultados.*

ACTIVIDAD ADICIONAL:

*Proponer otras situaciones de la vida real en las que se podría aplicar el modelo trabajado en la Actividad 3*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Bellomo Nicola, Preziosi Luigi (1995). Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation . (CRC Press).

Bosch Marianna, Chevallard Ives, Gascón Josep (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Horsori.

De Lange J., Huntley Id, Keitel C, and Niss m.. (1993). Innovation in Maths Education by Modelling and Applications . Ellis Horwood, Chichester.

Guzmán, Miguel de (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular-ISBN: 84-7884-092-3 - Depósito Legal: M-9207

Meerschaert Mark (1999). Mathematical Modeling. 2da. Edición. Academic Press

Pólya G. (1994). Métodos matemáticos de la ciencia. Madrid Euler Editorial