

# 15

## Experiencia de modelización matemática con alumnos de 12-13 años<sup>1</sup>

María Mina  
Cristina Esteley  
Analía Cristante  
Isabel Marguet



### Resumen

El presente trabajo describe y analiza una experiencia de modelización en el aula desarrollada con alumnos de 12 o 13 años. Las distintas etapas del proceso de modelización seguido se describen a través del trabajo de un grupo de alumnos. En el análisis se señalan algunas estrategias de los alumnos en la elaboración de un problema a modelar, actividades elementales de validación, y la posibilidad de organizar una curricula adaptada a la edad de estos alumnos a partir de los temas elegidos por ellos para modelizar.

### Introducción

El presente trabajo describe y analiza una experiencia de modelización matemática en el aula involucrando a 120 alumnos de 12 – 13 años<sup>2</sup>. Esta actividad se planificó y ejecutó con la intención de, por un lado, trabajar los contenidos de la curricula desde la perspectiva de la

---

<sup>1</sup> Este trabajo fue presentado en la RELME 19. Montevideo (Uruguay), 11 al 15 de julio del 2005.

<sup>2</sup> Proyecto subsidiado por la Agencia Córdoba Ciencia en el marco del programa: “Proyectos de Transferencias de Investigaciones Educativas al Aula” (convenio de cooperación institucional firmado por el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, la Agencia Córdoba Ciencia Sociedad del Estado, la Universidad Nacional de Córdoba y la Academia Nacional de Ciencias).

modelización como estrategia de enseñanza (Bassanezi, 1994), y por el otro, implementar el desarrollo de proyectos grupales de modelización sobre temas elegidos por los mismos alumnos, es decir, desarrollar en los alumnos una competencia en modelización matemática. Esta competencia se entiende como la “capacidad de llevar a cabo en forma autónoma y significativa todas las etapas de un proceso de modelización en un contexto determinado” (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003).

Las etapas principales de este proceso, que no serán descritas en este trabajo, se muestran en la Figura N° 1.

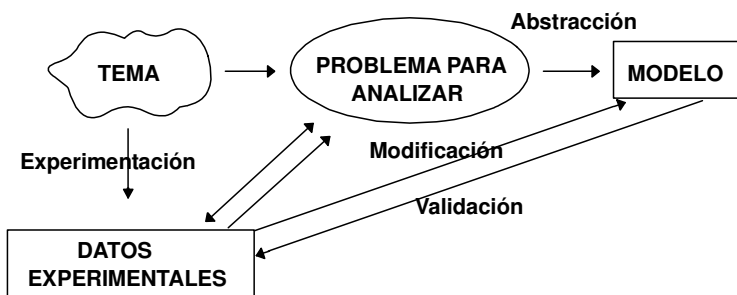


Figura N° 1: Etapas del proceso de modelización matemática.

Aunque la bibliografía consultada fue importante para definir un marco teórico sobre modelización y modelo matemático (Bassanezi, 1994; Davis y Hersh, 1988; & Ernest, 1998), y para proveer ejemplos, la misma no respondía a ciertas cuestiones que surgieron a lo largo de todo el proyecto y que fueron motivos de reflexión, de elaboración y de toma de decisiones posteriores. Estos cuestionamientos pueden resumirse en las tres preguntas siguientes: (1) ¿qué modelización podrían desarrollar alumnos de 12 – 13 años? (2) si los contenidos de la curricula se trabajaban mediante la perspectiva de la modelización como estrategia de enseñanza, ¿podrían los alumnos transferir ciertas capacidades aprendidas a un proceso autónomo sobre un tema elegido por ellos? Esto llevó al planteo de la tercera cuestión: (3) el proceso de modelización mismo, ¿no debería constituirse en objeto de reflexión para los alumnos de modo tal que puedan apropiarse del mismo? Para dar respuestas a estas preguntas se decidió tomar la perspectiva de enseñar todos los conteni-

dos de la curricula según la modelización como estrategia de enseñanza (Bassanezi, 2002; Biembengut y Hein, 1999, 2003), y trabajar con el proceso completo de modelización matemática (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003) y no con subprocesos de éste. De este modo, se asumió tentativamente que, la exposición de los alumnos a un contexto áulico en donde el proceso de modelización y todas sus etapas estaban siempre detrás de los contenidos matemáticos a aprender, favorecería la apropiación de este proceso de modo tal que pudieran luego trabajar de forma autónoma sobre un problema planteado por ellos mismos.

Es importante señalar, a los fines de la descripción y análisis de un trabajo de los alumnos que seguirá más adelante, que se intentó colocar en el centro de la reflexión el proceso que los alumnos habían experimentado al aprender los contenidos matemáticos. Por ejemplo, las características del proceso de abstracción, la noción de variable y el porqué de la selección de ciertas variables fueron identificados como parte de un conocimiento explícito y tácito aprendido (Ernest, 1998). Los resultados de las reflexiones de los alumnos sobre sus acciones y los aportes de la docente a cargo del curso sobre las mismas se registraron por escrito en las carpetas de los alumnos y se hicieron públicas mediante una página web diseñada para tal fin. Estos instrumentos de registro de la información fueron necesarios debido a la falta de material sobre modelización adecuada para la franja etaria de los alumnos de este proyecto, y además, por el fuerte nexo que existe entre estas ideas y el contexto social en donde surgieron.

### **Contexto en donde se realizó esta experiencia**

El proyecto se llevó a cabo con 120 alumnos (varones y mujeres) entre 12 y 13 años, divididos en tres secciones. La institución escolar, situada en la ciudad de Córdoba (Argentina) era de gestión privada y contaba con importantes recursos edilicios (laboratorios, gabinetes de informática, sala de proyecciones, etc.) y humanos (ayudantes de laboratorio). La primera autora y docente a cargo de los alumnos no contaba con experiencia previa en modelización, como tampoco la tenían los alumnos. El proyecto se implementó a lo largo de todo el año escolar 2004, contando con cinco clases semanales de 40 minutos cada una destinadas a la asignatura Matemática. Los proyectos grupales de los

alumnos comenzaron en la segunda parte del año, usando para esto dos clases semanales de 40 minutos. Al finalizar la experiencia, los alumnos expusieron sus trabajos mediante posters, salvo tres de los grupos que lo hicieron en presentaciones PowerPoint®. Todos los grupos presentaron un informe escrito.

A continuación se describe un trabajo escogido entre otros por su calidad ilustrativa de las distintas etapas de un proceso de modelización que siguieron todos los alumnos en el desarrollo de sus proyectos grupales.

### **Descripción y análisis de uno de los trabajos desarrollados por los alumnos**

El trabajo aquí descrito fue elaborado por un grupo de tres varones en el contexto y bajo las decisiones señaladas anteriormente, siguiendo las etapas clásicas de un proceso de modelización como el que muestra la Figura 1. Este grupo escogió el tema “raquetas de tenis”. A partir de la información obtenida, fue definido el problema a ser estudiado. El análisis y representación de los datos se realizó con la ayuda de la herramienta Graphmatica<sup>3</sup>, como así también la obtención del modelo. Una sencilla pero interesante estrategia de validación del modelo fue empleada por estos alumnos.

#### ***Selección del tema, búsqueda de datos y definición del problema***

Los alumnos que presentaron por escrito, un posible tema de estudio, las razones que motivaron la elección del tema y la situación en donde se les ocurrió. Este grupo elige como tema las raquetas de tenis manifestando interés en la construcción de las mismas. Uno de los integrantes señala que se le ocurrió este tópico ya que “*mientras jugaba al tenis me acordé de la tarea de Matemática*”. El grupo utilizó como fuente de información un catálogo de raquetas de la empresa Babolat<sup>TM</sup>, junto con datos proporcionados por el padre de uno de los alumnos, instructor de este deporte. El problema planteado y las variables consideradas se muestran en la Figura N° 2.

---

<sup>3</sup> Software que permite la construcción de gráficos de funciones a partir de su expresión analítica o de una tabla de datos. Disponible gratuitamente en <http://www8.pair.com/ksoft/>.

En esta figura puede verse que el problema queda definido como: “¿Cuáles son las raquetas más eficientes para el crecimiento del niño? Los alumnos definen la idea de “eficientes” asignando el significado de “adecuada” en peso, longitud, longitud de la empuñadura<sup>4</sup>, etc., que se constituyeron en las variables a considerar. En esta presentación puede verse una fuerte influencia de la información contenida en el catálogo Babolat<sup>TM</sup> usado por estos alumnos, ya que entre los datos técnicos de los distintos modelos había una sección destinada a raquetas para niños de distintas edades. Vemos también que han sido descartadas otras variables como el material de construcción o la forma geométrica, que fueran intereses originales de este grupo.

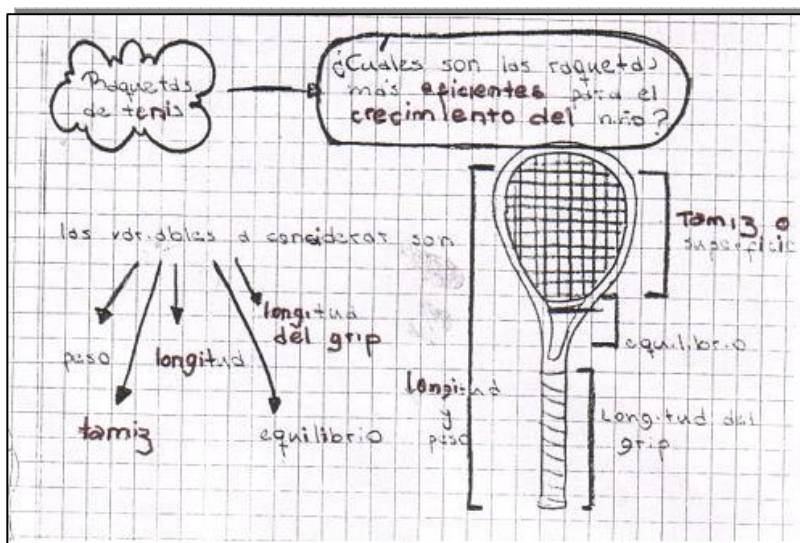


Figura N° 2: Problema y variables consideradas para el tema de las raquetas de tenis

En cambio, se incluyó la variable “equilibrio” que fue incorporada debido a la experiencia de los alumnos en este deporte y represen-

<sup>4</sup> Los alumnos utilizaban el término en inglés “grip” en lugar de empuñadura.

tada mediante una acción física sobre un objeto<sup>5</sup>. Fue importante la acotación de un alumno no perteneciente al grupo durante la presentación oral de este tema:

[Pedro<sup>6</sup>]: “*Si van a estudiar las raquetas adecuadas al crecimiento del niño, allí falta la variable edad*”

Tanto en la presentación de este grupo como en el aporte de Pedro puede observarse el reconocimiento de ciertas características percibidas de la realidad (la raqueta y sus notas estructurales, y la edad del niño) y su idealización como variables del problema (Bassanezi, 1994).

### ***Organización de los datos y representación de los mismos.***

Los datos obtenidos de la fuente de información fueron seleccionados para adaptarlos a las necesidades del problema, y organizados en una tabla como muestra la Tabla N° 1.

Nombre/variables	Edad	Peso (gr.)	Longitud (mm)	Longitud del grip (cm)	Tamiz (cm2)
Boll fighter 80	3 años	165	430	11	-----
Boll fighter 100	5 años	170	500	13	-----
Boll fighter 110	6 años	210	550	15	615
Boll fighter 125	8 años	220	600	16.5	615
Boll fighter 150	9 años	245	650	18	
Rodick junior 140	7 años	230	635	-----	680
Rodick junior 150	9 años	240	660	-----	680
Rodick junior 125	7 años	220	650	-----	645

Tabla N° 1. Tabla de datos que muestra características estructurales de las raquetas para distintas edades del usuario y para distintos modelos

La relación entre cada una de las variables estructurales (peso, longitud, longitud del grip, y tamiz) y la edad del niño, se representaron luego en distintos gráficos cartesianos usando el software Graphmatica<sup>®</sup> a partir

<sup>5</sup> Estos alumnos simulaban colocar el dedo índice en el punto de unión del aro y la empuñadura para analizar en qué sentido se inclinaba la raqueta, definiendo así la propiedad de equilibrio de la misma. Esta variable fue incluida debido a la experiencia de los alumnos en el tenis, pero no fue trabajada luego debido a que la fuente de información no contenía datos respecto de ella.

<sup>6</sup> Se utilizan seudónimos para identificar a los alumnos.

de pares de puntos. Por cuestiones de espacio sólo se presentará el análisis de uno de estos gráficos (ver Figura N° 3) donde se muestra la relación entre la edad del niño y la longitud de la raqueta adecuada a la misma.

### *Análisis de los datos, modelo obtenido y validación del mismo*

En el gráfico mostrado en la Figura N° 3 se puede ver que los alumnos han representado dos valores posibles de longitud para una única edad, por ejemplo, para 7 años (cf. con la Tabla N° 1), sin reconocer aquí la inclusión de una nueva variable, es decir, el modelo de la raqueta.

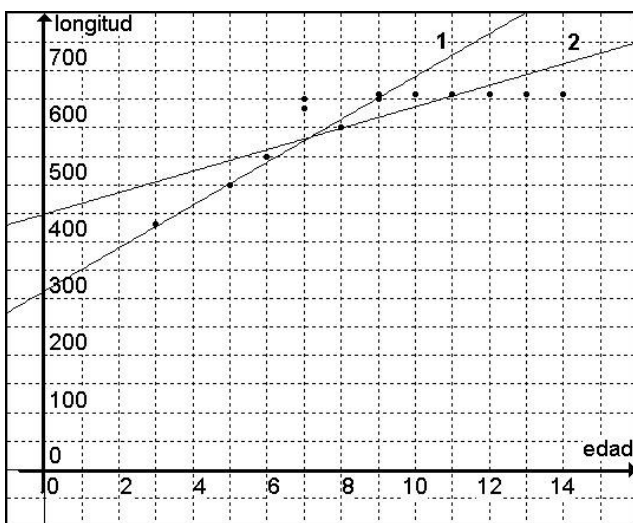


Figura N° 3: Representación de la relación entre la edad del niño y la longitud de la raqueta adecuada a la misma.

Las rectas **1** y **2** en el gráfico representan dos intentos que hicieron los alumnos, usando una propiedad del software Graphmatica<sup>®</sup> llamada “Ajuste”, por encontrar la mejor regresión lineal para los pares de datos obtenidos, acompañando esto con la siguiente expresión coloquial:

[Marcos]: “¡La recta **1** es la que pasa por la mayor cantidad de puntos!”

De este ajuste entre los datos de la longitud de la raqueta y la edad del niño, los alumnos colocaron la siguiente expresión analítica que representaba tentativamente la relación entre estas variables:

$$37,61.x + 313.56 = L, \quad L: \text{longitud en mm, } x: \text{edad del niño}^7$$

Luego de obtener este modelo, los alumnos advierten que la recta **1** marca una tendencia que no se corresponde con la realidad ya que en ella se ve que, de manera indefinida, a mayor edad mayor longitud de la raqueta. Este hecho es discutido por los alumnos frente a la pantalla de la computadora donde estaba el gráfico de la Figura N° 3, colocando uno de ellos su mano sobre la pantalla de forma paralela al eje de las abscisas y señalando:

[Marcos]: “*La recta 1 se debe quebrar acá*”, (indicando el punto representado por el par (9 años, 660 mm))

Durante esta discusión otro alumno asegura que:

[Manuel]: “*Para más de 9 años ya se debe usar raquetas de adultos*”

Esta situación de intentar validar el modelo obtenido llevó a los alumnos a tomar ciertas decisiones para modificar el mismo. En la Figura N° 3 puede verse que los alumnos agregaron puntos para los valores de 10 a 14 años de la variable edad, asumiendo para éstos un valor constante de 660 mm de longitud de la raqueta. De alguna manera, la recta horizontal formada por estos 5 puntos representa geoméricamente lo que el alumno quiso representar enactivamente con su mano ante la pantalla de la PC, según se relatara más arriba. En el informe escrito presentado por este grupo puede leerse que el modelo señalado más arriba es válido “*sólo hasta los 11 años*”<sup>8</sup>. Análisis similares al descrito aquí fueron realizados para las otras variables (tamiz, longitud del grip, y peso), en función de la edad del niño.

---

<sup>7</sup> Apoyando el cursor sobre la curva en cuestión, Graphmatica® devuelve la expresión analítica de esa curva.

<sup>8</sup> No hay evidencia de porqué los alumnos señalan los 11 años como edad máxima y no los 10 años (cf. con el gráfico de la Figura N° 3).



## Resultados de esta experiencia

Teniendo en cuenta el cuestionamiento planteado en la introducción sobre qué proceso de modelización podrían desarrollar alumnos de 12-13 años, en este trabajo sobre las raquetas de tenis podríamos conjeturar la apropiación de parte de los alumnos de cierta autonomía durante las distintas etapas que muestra el diagrama de la Figura 1, constituyéndose éste en herramienta de organización y de reflexión. Esta conjetura podría sustentarse en la experiencia y reflexión sobre procesos similares de modelización que los alumnos estudiaron durante el desarrollo de contenidos de la curricula previo al trabajo con sus proyectos grupales.

Con respecto al tema elegido por los alumnos, este trabajo permite observar que los alumnos pudieron definir un problema dentro de su ámbito de interés, donde aplicaron algunos conocimientos prácticos sobre su experiencia como jugadores de tenis, con una marcada influencia de la información disponible. Por otra parte, también podríamos decir que el proceso de modelización desarrollado no produjo un modelo matemático demasiado sofisticado, y que el proceso de matematización necesario para construirlo estuvo perfectamente al alcance de estos alumnos. Este hecho se repitió en trabajos presentados por otros grupos lo que permitiría afirmar que es posible construir una curricula para esta edad de alumnos a partir de problemas percibidos por ellos en su entorno. En este sentido, fueron diversas las situaciones que se presentaron a lo largo del proyecto donde los requerimientos y preguntas de los alumnos motivaron la introducción de temas en momentos que no habían sido previstos por la docente.

En el trabajo aquí descrito se pudo observar una actividad sencilla de validación y modificación del modelo obtenido. Sin embargo, en la mayoría de los proyectos grupales esta etapa apareció prácticamente ausente o poco significativa. Una explicación podría estar en el mayor tiempo destinado por la docente para las actividades de definición del problema y experimentación, frente al tiempo para la elaboración del modelo y su validación. Sin embargo, la literatura (Blomhøj, 2004; Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003) describe este fenómeno como uno de los principales obstáculos al trabajar modelización como estrategia

de enseñanza, debido a los factores afectivos y a la falta de conocimiento fáctico con que los alumnos se enfrentan a un fenómeno donde deben identificar ciertas características de la realidad que perciben.

### Referencias bibliográficas

- Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics* 14 (2), 31-35.
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. San Pablo, Brasil: Editora Contexto.
- Biembengut, M. & Hein, N. (1999). Modelización matemática: estrategia para enseñar y aprender matemática. *Educación Matemática* 11 (1), 119-134.
- Biembengut, M. & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino*. San Pablo, Brasil: Editora Contexto.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En: Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.
- Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Application* 22 (3), 123-138.
- Davis, P. & Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. (1ra. Ed.). Madrid, España: Editorial Labor.
- Lerman, S. (1999). Culturally situated knowledge and the problem of transfer in the learning of mathematics. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks* (pp. 93-106). Londres, Inglaterra: Falmer Press.
- Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, EE.UU.: State University of New York Press.