EL PAPEL DE GALILEO GALILEI EN LA CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Yadira Marcela Mesa, Jhony Alexánder Villa Ochoa
Universidad de Antioquia Colombia
yadiramarcelamesa@yahoo.es; javo@une.net.co
Campo de investigación: Epistemología e historia de las matemáticas Nivel: Superior

Resumen. *En los últimos años, numerosas investigaciones entre ellas las de Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989), Sfard (1991) y Ruiz (1998) han resaltado la importancia del concepto de función en el estudio del álgebra y el análisis matemático, de igual manera, han destacado el papel de la historia de las matemáticas como una herramienta para la reflexión docente a la hora de diseñar situaciones didácticas. En este documento se muestra el resultado de una indagación documental en la cual se pudo determinar los aportes de Galileo Galilei (1564-1642) en la construcción del concepto de función cuadrática; particularmente se muestran algunas características de su pensamiento matemático en el momento de iniciar sus estudios. De este trabajo se resalta nuevamente la importancia de aproximarse al concepto de función cuadrática en contextos modelación de situaciones de variación; para tal efecto, los trabajos de Galilei (1638) pueden ser fuente de inspiración para muchas de esas situaciones.*
Palabras clave: función cuadrática, cinemática, cónicas, modelización

Introducción

El estudio de un objeto de aprendizaje matemático no debe concebirse como un producto estático y acabado; por el contrario, dicho estudio debe orientarse hacia las concepciones y obstáculos que lo originaron y consolidaron a través de la historia, Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989) y Sfard (1991) retomados por Posada & Villa (2006, p.11) coinciden en que la historia es una herramienta para la actividad educativa en la medida en que le sirve al educador fuentes de reflexión a la hora de diseñar actividades de aprendizaje de las matemáticas; además de ser una herramienta para identificar las dificultades o, incluso los obstáculos, que aparecieron en un concepto y pueden reaparecer en el aula (Tzanakis & Arcavi, 2000, p. 206).

Obedeciendo a esta premisa, en este documento se presenta un análisis histórico del papel que jugó los trabajos de modelización de situaciones de variación de Galilei en la construcción del concepto de función cuadrática. Para tal efecto, se considera *modelización* al proceso involucrado en la construcción de *modelos* que representan de alguna manera un fenómeno, situación o problema del "mundo real". Como proceso, la modelización involucra una serie de pasos, que van desde la identificación del fenómeno o problema hasta la construcción, validación y/o modificación del modelo. Dicho proceso ha sido referenciado en algunos trabajos como Fowler (1998) y Villa (2007) Algunos de ellos han sido reportados en Mesa & Villa (2007; 2008a; 2008b).

Conocimientos previos de Galilei

Éstos suponen un acumulado de saberes construidos hasta su tiempo que pondrá a su disposición para elaborar nuevo conocimiento que en este caso tiene que ver con modelización de fenómenos de variación, particularmente de la cinemática. Por ende es posible afirmar que a partir del mismo conocimiento que poseía Galileo es posible realizar un estudio del movimiento, y como se verá en este documento, de la función cuadrática aunque ésta no sea nombrada explícitamente por él su pensamiento de tipo funcional cuadrático sugería su acepción. Al respecto cabe entonces preguntarse ¿qué sabía Galileo? Y su respuesta demanda un vistazo a la historia de las matemáticas nos dará su respuesta, por ello es posible afirmar que sus saberes correspondía a 5 elementos tales como:

Geometría euclidiana

Prácticamente las primeras nociones cuadráticas estuvieron asociadas a conceptos de la geometría. Particularmente en los *Elementos* de Euclides (1999, p. 84) cuadrado se define de la siguiente manera *"… entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular"* posteriormente esta acepción cuadrática la retomarían los árabes como una aproximación al álgebra y que para la época de Galilei permanecía vigente, para ampliar la relación entre la geometría y el álgebra se sugiere consultar Vasco (1985).

Progresiones y sucesiones aritméticas

La disposición pitagórica de los números en formas visuales permite categorizar los números figurados, entre ellos los cuadrados, permitiendo establecer leyes generales que se construyen a partir de las variaciones entre una cantidad con sus anteriores y como consecuencia de ella la identificación de un patrón constante. Puertas (traductora y comentarista de Euclides 1996, p. 90) afirma que *"los pitagóricos y matemáticos griegos posteriores hablan de distintas clases de* *números según las distintas figuras geométricas que formen (números triangulares, cuadrados, planos, sólidos, etc")*. Así es posible a partir de la toma de datos observar cierta la descripción de algunas variaciones según de la distribución de los números.

Álgebra geométrica

El dominio de un *álgebra sincopada* desde la generalidad tiene fuertes raíces en la geometría. Los historiadores y matemáticos han notado una estrecha relación entre su álgebra propuesta por Al-Quaritmi con el Libro II de los Elementos, así como lo menciona Escohotado (traductor y comentarista de Newton, 1982).

> *[En los árabes] su alta capacidad y su interés por la geometría y la aritmética-que culmina con la formulación sistemática del álgebra por el famoso Al-Quaritmi no les conduce tampoco a hacer física matemática teórica. Es como si de alguna manera Grecia hubiese dado ya el marco genérico, y a los árabes solo les interesase perfeccionar el cuadro con exactitud y sutileza. (p. 39)*

Bien es sabido que los trabajos griegos fueron traducidos al árabe, quizás sus obras fueron estudiadas por los árabes y haya repercutido en sus posteriores constructos de las magnitudes desde una perspectiva geométrica.

Cónicas

Aunque desde Platón se evidencia el interés por el estudio de los cuerpos en movimiento Kline (1972, p.77) es Galilei (1638) quien unifica lo construido por Apolonio con fenómenos naturales, con el fin de obtener una mayor comprensión del mundo que les rodea en la medida en que elabora una matematización de ese fenómeno. Con Galilei se inaugura un gran momento para la consolidación de concepto de función cuadrática estableciendo la ruptura en la concepción de parábola como figura, que tenía la siguiente propiedad: *"… de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa x y el latus rectum l"*. (Apolonio citado por González), a ser considerada como el resultado del comportamiento de fenómenos de variación. Las cónicas y en particular la parábola se consideran en la actualidad como referentes importantes para el estudio de las relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones relativas al concepto de función. Con base en esta aserción vale la pena generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o por el contrario evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos conceptos es de manera conjunta. Al identificar esta ruptura y de acuerdo con la premisa con la que se inició este documento se afirma entonces que la actividad pedagógica y didáctica debe considerarla de manera que se permita la reflexión del docente acerca de su concepción de parábola y las implicaciones que éstas tienen en el aprendizaje y construcción de este concepto por parte de los estudiantes. Es un llamado a unificar conceptos y permitirle construirse a partir de su consideración epistemológica.

Oresme 1323 – 1382

Según Ruiz (1998) uno de los objetivos de Oresme fue representar mediante una figura geométrica las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, estas intensidades estaban representadas por segmentos. Todo ésto lo explica en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuun,* (citado por Ruiz, 1998) en donde llega a afirmar que: *"Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua*" (Ruiz 1998, p. 113) de donde se puede inferir que Oresme interpretaba la noción de número como algo diferente a las magnitudes. Según Ruiz (1998) el propósito de Oresme era representar la cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica y afirmó que las propiedades de la figura podrían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad.

Los puntos anteriores pueden entenderse como el constructo de conocimientos de los que dispuso Galilei (1638) para emprender su explicación acerca de los fenómenos de movimiento presentando una ruptura en la forma de concebir y representar el mundo, por ello este hecho demanda un nuevo conocimiento y ése fue su gran aporte, el vínculo de la física con las matemáticas y partir de allí la modelización matemática.

Los aportes de Galilei

En Galilei (1638) se observa la forma en que recurre a sistemas de representación a partir de gráficas rectangulares, es una demanda además de la comprensión geométrica del *gnómon*, como dirían los griegos clásicos, o el concepto de perpendicular y ángulo recto, que representa distancia, altura, etc. Esta comprensión a su vez relaciona este segmento con la media proporcional o la raíz cuadrada, por lo que le da un valor agregado a las consideraciones de Oresme respecto a la perpendicular.

Así mismo es evidente la preocupación por el estudio y el entendimiento de los fenómenos de movimiento de caída de los cuerpos y de aquello involucrado en la experimentación (simplificación, abstracción, obtención de datos, etc.) de dichas situaciones. Algunas de las características evidentes en los trabajos de Galilei (1638) para la modelización de los experimentos (fenómenos) son:

1. Dado un cuerpo
2. Se toma un plano inclinado, éste supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido.
3. Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo.
4. Análisis de los datos recolectados
5. Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la
6. relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas.
7. Formulación de problemas en su obra en la que se plantean *ecuaciones* de carácter funcional como el de *"…hallar la distancia en el instante t*", de lo que se evidencia una relación unívoca y de dependencia entre la distancia y el tiempo.

Observando detalladamente lo anterior puede afirmase que se establecen algunas características de la modelización en Galilei, entre ellas: la experimentación y toma de datos, el establecimiento de relaciones entre cantidades, la identificación de la variación y la creación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno estudiado.

Obra de Galilei (1638)

En la obra de Galilei pueden esgrimirse ciertas bases que generaron posteriores implicaciones para el desarrollo de las matemáticas. En la siguiente situación puede observarse un cierto tratamiento de la variación cuadrática.

> *[…] si en tiempos iguales tomados sucesivamente desde el primer instante o comienzo del movimiento, tales como AD, DE, EF, FG, se recorrieren los espacios HL, LM, MN, NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares a partir de la unidad; es decir, como 1,3,5,7; porque ésta es la razón de los excesos de los cuadrados de las líneas que van excediendo una de otras, y cuyo exceso es igual a la menor de ellas; vale decir, es la razón de los excesos de los cuadrados consecutivos a partir de la unidad. Por consiguiente, mientras la velocidad se acrece, durante tiempos iguales, según la sucesión simple de los números, los espacios recorridos, durante estos tiempos, reciben incrementos según la sucesión de los números impares, a contar de la unidad. (Galilei, 1638, p. 236)*

Se observa un razonamiento de carácter deductivo que involucra el trabajo con las cantidades continuas, sin embargo, en el procedimiento de obtención de los datos se realiza un proceso de discretización y en su razonamiento (con el que argumenta el concepto de cuadrado) se identifica un componente aritmético como esta afirmación galileana de que la parábola es un punto en movimiento. Al respecto se aleja de la mirada sobre las cónicas como objetos matemáticos estáticos y se acerca a una visión dinámica, ya que al relacionarlas con las situaciones de movimiento permite asociarlas a las trayectorias de cuerpos que se mueven de acuerdo a una ley, patrón o causas las cuales pueden ser estudiadas con elementos de la geometría y la aritmética.

Puede evidenciarse entonces cómo la parábola se convierte en representación geométrica del movimiento de caída de los cuerpos y de esta manera se consolida como un modelo que explica las características del fenómeno. En este proceso de modelización, queda claro que la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre las cantidades, por ejemplo, una gráfica de caída libre no puede comprenderse como la vertical respecto a la horizontal, sino que considera la variación de las cantidades y la relación de dependencia que las determina. De igual manera, se evidencia cierto grado de comprensión de la variación de segundo orden, es decir, una cuantificación de la manera en cómo varía la variación, lo cual sugiere una aproximación a la noción de función cuadrática como aquella en la cual su razón de cambia varía linealmente. Lo anterior tiene cierta relación con lo que posteriormente se denomina *primera y segunda derivada de la función cuadrática*, en consecuencia, esta función, puede comprenderse y construirse a partir del concepto de función lineal y de la identificación de la razón de cambio la cual le ofrece un significado a los incrementos y permiten comprenderla en un contexto variacional.

A modo de cierre

Para finalizar Galilei (1638) presenta un acercamiento a los objetos matemáticos que estudia por medio de procesos de modelización, siendo muy significativo para la didáctica del concepto de función cuadrática, en tanto permite evidenciar algunas situaciones que provoca el estudio por parte de los estudiantes y que permite una integración con otras ramas de las matemáticas como la aritmética, la geometría y el álgebra. Una mirada a esta obra permite identificar algunos obstáculos en el proceso de formulación de las observaciones realizadas y sus inferencias a manera de reconstrucción de conceptos algunos de los cuales fueron presentados en Mesa y Villa (2008).

De una manera retrospectiva se puede identificar la presencia de un pre-concepto de función cuadrática en la medida en que se observan las relaciones cuadráticas cumpliendo ciertas características propias del concepto, a saber: el establecimiento (tal vez no consciente) de una correspondencia biunívoca y en la necesidad de hallar para cualquier punto en movimiento su correspondiente espacio, tiempo y una velocidad determinada.

La historia como herramienta para el docente, permite reflexionar sobre la construcción epistemológica de los objetos matemáticos exigiendo de su parte el abordaje de éstos atendiendo a sus dificultades y oportunidades en el aula.

Referencias bibliográficas

Euclides. (1996). *Elementos I-VI.* (M. L. Puertas, Trad.). Madrid, España: Planeta de Agostini.

Fowler, A. C. (1998). *Mathematical models in the applied sciences*. New York: Cambridge University Press.

Galilei, G. (2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

González, P. *Apolonio ¿262 a.C. - 190 a.C?.* Extraído el 2 enero, 2007 desde http://www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Mesa, Y. M., y Villa, J. A. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte 21*, 1-18

Mesa, Y. M., y Villa, J. A. (2008). Construcción histórica y epistemológica del concepto de función cuadrática: Algunas reflexiones e implicaciones didácticas. En C. Tzanakis (Ed.), *Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics.* Ciudad de México, México.

Mesa, Y. M., y Villa, J. A. (2008). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, (pp. 922-930). México: Comité Latinoamericano de matemática Educativa.

Posada, F., y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Jaén: Universidad de Jaén.

Newton, I. (1982). *Principios Matemáticos de la filosofía natural*. (A. Escohotado, Trad). Madrid: Editora Nacional

Sierpinska, A. (1992). Undertanding the notion of funtion. En G. Harel, y E. Dubinsky, *The concept of funtion . Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of American.

Tzanakis, C., y Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En J. Fauvel y J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer.

Vasco, C. (1985). *El Algebra Renacentista.* Bogotá: Empresa Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas 19*, 51-81.