Una propuesta para favorecer la comprensión del concepto de función en la formación de profesores

Marcela Evangelina **Götte**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina
marcelagotte@gmail.com
María Susana **Dal Maso**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina
mariasusanadalmaso@gmail.com

Resumen

A pesar de que al concepto de función se lo incluye desde los primeros años de escolaridad en el currículo de matemática, y de que se implementan en el aula variadas actividades para trabajarlo, distintas investigaciones en educación matemática y los profesores de secundaria lo distinguen como una noción compleja. Presentamos una propuesta para trabajar el concepto de función y sus diferentes representaciones utilizando GeoGebra. El uso de las TIC plantea un reto para los profesores de matemática en el diseño de tareas que no signifiquen hacer lo mismo con el añadido de las tecnologías o simplemente convertir el contenido para encajar en las mismas. Las tareas presentadas responden a ese desafío y pretende acercar a los futuros profesores a un uso reflexivo de las TIC donde la necesidad de validar las conjeturas halladas con un software sea un eslabón necesario para el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras clave: función, representación, decisiones didácticas, conjeturas con GeoGebra, formación.

Introducción

A pesar de que al concepto de función se lo incluye desde los primeros años de escolaridad en el currículo de matemática, y de que se implementan, en el aula, variadas actividades para trabajar dicho concepto, el profesor de matemática lo distingue como una noción compleja. Una de las dificultades más notorias que ponen de manifiesto los alumnos al trabajar el concepto de función es la de reconocer y comprender la relación de dependencia entre variables.

Hoy existen software que permiten hallar la ecuación de funciones a partir de un gráfico, calcular valores de sus variables y hasta resolver sistemas que las incluyan. Pero sabemos que si bien los cambios de escenarios tradicionales de enseñanza son necesarios, el desafío es generar propuestas de trabajo que vayan más allá de un reemplazo del lápiz y papel por comandos en un sistema computacional ya que el introducir algunas variantes no es razón suficiente para esperar mejoras en el aprendizaje.

Sadovsky (2014) manifiesta que es necesario que los alumnos puedan poner a prueba lo que aprenden, que puedan validar lo que hacen y que tengan oportunidad de corregir su propia producción. Destaca que interesan las condiciones de producción y que una de las cosas a fortalecer es la idea de que el conocimiento sirve para resolver cosas, para pensar cosas, para poder contrastar soluciones y alternativas.

Creemos entonces que el desafío es pensar propuestas didácticas que permitan crear las condiciones necesarias para que los alumnos construyan conocimientos significativamente. No cabe duda que las actividades provechosas serán aquellas que permitan "construir matemática", es decir razonar, producir, argumentar, convencer, escuchar, reconocer el error, trabajar sobre el error.

Nuestra propuesta está dirigida a la formación de profesores de matemática de escuela secundaria. En ella trabajaremos el concepto de función a partir de modelizaciones geométricas y representaciones dinámicas en un software, tratando de propiciar el uso de las distintas representaciones del concepto de función. Pero nuestra propuesta pretende ser más ambiciosa adentrándonos en situaciones donde las herramientas del software no "alcanzan" para lograrlo.

Poner en juego situaciones que propicien la producción, el planteo de conjeturas, el análisis y la discusión es la intensión de nuestro trabajo.

Objetivos

Con la presentación de nuestro trabajo intentaremos mostrar algunas propuestas que creemos deben estar presentes en la formación de futuros profesores de matemática, no sólo porque permiten acercar a los alumnos un poco más al uso de las TIC, sino con la intensión de auspiciar la reflexión sobre la necesidad de validar las conjeturas halladas con el uso de un software como escalón necesario para el desarrollo del pensamiento matemático. No cabe duda que, como dice Gómez Chacón (2011), detectar y desarrollar capacidades y competencias en estudiantes universitarios de profesorado de matemática y profundizar en el conocimiento estratégico para aprender a enseñar matemática con el uso de TIC, es primordial en la actualidad.

Los objetivos específicos de las tareas aquí desarrolladas son:

- realizar conjeturas y buscar soluciones.
- utilizar el software GeoGebra como asistente para la construcción de conocimiento matemático.
- analizar potencialidades y limitaciones de las herramientas de GeoGebra para conjeturar y resolver problemas.

Aportes teóricos

Azcárate & Deulofeu (1990) sostienen que el aprendizaje de las funciones conlleva el conocimiento de cada una de sus representaciones, la traducción de una a otra y las limitaciones de cada una. Explicitan como las distintas representaciones de la función a la descripción verbal, la tabla, la gráfica y la fórmula. Sin embargo, “Una función no es: ni una tabla de valores, ni una representación gráfica, ni una serie de teclas de una calculadora, ni una fórmula. Es todo eso a la vez” (de Guzmán citado por Chemello & Díaz, 1997, p. 89)

Para Hitt (2003) las tareas de conversión de una representación a otra son las que propician y favorecen la construcción de conceptos matemáticos. Señala que las investigaciones en educación matemática muestran que el sistema algebraico es el preferido y casi en exclusividad usado por los profesores en matemática en su práctica docente.

Arcavi (2008) plantea varias razones por las cuales el modelado de situaciones geométricas a partir de gráficas dinámicas es un camino potente para el aprendizaje de conceptos matemáticos. En el caso del concepto de función, el tratamiento en un ambiente computarizado recupera su dinamismo, presentando un modelo verdadero para el cambio y la variación ya que su representación gráfica se realiza en tiempo real al describir el fenómeno que se produce. Por otro lado, sostiene que en caso de no tener este medio, muchos problemas propuestos en torno al concepto de función se resolverían casi exclusivamente en el contexto algebraico, apoyando el modelado con algunos dibujos imprecisos. En cambio, con el uso de un software dinámico, la representación gráfica prima a la algebraica y le da sentido, favoreciendo la comprensión. Otro aspecto que remarca es el reto de crear situaciones en las cuales el resultado de la actividad es inesperado o en algunos casos contra intuitivo de tal forma que entre lo conjeturado por el estudiante y lo devuelto por el software propicie la necesidad de demostrar o probar sus conjeturas utilizando argumentos matemáticos que van más allá del software.

Sierra Vázquez, González Astudillo & López Esteban (1998) afirman que distintos trabajos muestran las dificultades de los alumnos en reconocer y justificar relaciones funcionales y no funcionales dados a través de distintas representaciones. Esto los lleva a sugerir un trabajo que suministre a los alumnos de la mayor riqueza de representaciones de este concepto a la vez que se realiza la traducción de unas representaciones a otras. Consideran que la expresión algebraica del concepto de función resulta abstracto porque oculta la verdadera naturaleza de la función como relación entre variables, por lo que sugieren el trabajo con diferentes representaciones como un modo eficaz para una mejor comprensión. Además, la incorporación de un modo inteligente de las nuevas tecnologías permite que la enseñanza se centre más en los conceptos que en los procedimientos, evitando cálculos engorrosos y posibilitando el trabajo con una gama amplia de funciones, lo cual sería difícil llevarlo a cabo con lápiz y papel.

Esta última recomendación es también ofrecida por Hitt (2003) quién afirma que la tarea de visualizar una gráfica de una función demanda una actividad mental profunda que requiere el reconocimiento de subconceptos en ella representados. Recomienda centrar la atención en la comprensión de los problemas que surgen al desarrollar una tarea de conversión entre representaciones.

Propuesta

Esta propuesta consta de seis tareas, que como están dirigidas a futuros profesores en matemática de escuela secundaria, pueden ser presentadas en lo que acordamos en denominar a un *nivel resolutor*, donde el estudiante se dedica a resolver la tarea propuesta, o a un *nivel didáctico*, donde el estudiante debe colocarse en el rol de profesor. Se propone que el software GeoGebra (versión 4.2.51.0), aunque es posible utilizar otras versiones, sea el asistente utilizado. También añadimos algunos comentarios relacionados a procedimientos esperados o a decisiones didácticas consideradas en su diseño. Si bien esta propuesta no fue aún implementada, estas tareas y las anticipaciones de resolución de las mismas se realizan en base a nuestra experiencia como docentes formadores de profesores y de intercambios en cursos y talleres con colegas utilizando esta modalidad.

Tarea 1

Las consignas de esta tarea son a *nivel resolutor*.

1. En GeoGebra, construye el triángulo ABC con A= (0, 0); B= (8, 0); C= (0, 6). Ubica un punto L en el segmento $\overline{AB}$ y construye un rectángulo con vértices en A, en L y un tercer vértice en el segmento $\overline{BC}$. ¿Cuántos rectángulos existen con esas condiciones? Explica.
2. Responde con respecto al inciso anterior:
   a) ¿Cómo varían las coordenadas del punto L al desplazarlo en el segmento $\overline{AB}$?
   b) Nombrando N y F a los otros vértices del rectángulo ALNF, ¿cómo varían las coordenadas de N al desplazar L en $\overline{AB}$?
   c) Completa la siguiente tabla:

Longitud del segmento $\boldsymbol{AL}$	1	1,5	2	3	3,5	4,7	5	5,7	6	7	8
Perímetro de ALNF											

   d) ¿Existe proporcionalidad entre las variables de la tabla? Explica.
3. Traza una recta perpendicular al eje x por el punto L y sobre ella, un punto P en la semirrecta LN a una distancia de L igual al Perímetro de ALNF.
4. Con respecto al inciso 3, responde:
   a) ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la ordenada de P? ¿Qué representa ese valor en el rectángulo?
   b) Si la abscisa de P varía en 1 unidad, ¿cómo varía la ordenada de P? Explica.
   c) Si la ordenada de P varía en 1 unidad, ¿cómo varía la abscisa de P? Explica.
   d) Utiliza el comando "Rastro activado" en el punto P y desplaza el punto L. ¿Qué trayectoria describe ese punto? Justifica.
5. Traza dos puntos cuyas coordenadas sean pares ordenados correspondientes de la tabla 1. Traza una recta que pase por esos puntos. ¿Qué recta obtienes si eliges otro par de puntos de la tabla? Explica.
6. En la vista algebraica solicita la Ecuación y=a x +b de una recta del inciso 5. ¿Qué números aparecen en la Ecuación? ¿Qué representan en el rectángulo ALNF?

Comentarios respecto a estas consignas:

- Pensamos que al construir L en $\overline{AB}$ puede surgir la idea de que existen infinitos rectángulos con las condiciones pedidas pero para cada punto L, existe un único rectángulo.
- Consideramos que pueden completar la tabla utilizando la vista Hoja de Cálculo del software; desplazando el punto y registrando las coordenadas del mismo o que calculen analíticamente utilizando la fórmula del perímetro.
- Pueden construir P utilizando las coordenadas y el comando perímetro del software o hacer una construcción de los segmentos sobre la semirrecta dada (usando por ejemplo, las herramientas Compás o Circunferencia (centro y punto) o las herramientas de transformaciones como Simetría Central).
- Esperamos que se explicite que cuando la ordenada o la abscisa de P toman los valores extremos solicitados, la figura obtenida no es un rectángulo. Se retomará este aspecto en la puesta en común.

- Al justificar que el rastro del punto P describe un segmento de recta creemos que utilizarán la fórmula del modelo geométrico del perímetro que es una función lineal, definida como la función que tiene la forma f(x)= m x + b, con m y b reales, y por eso su representación gráfica es una recta. Otra forma es que tomen dos puntos de la tabla, hallen la ecuación de la recta y comprueben que los otros puntos de la tabla la verifican. Otra es que hagan el cociente de las diferencias comprobando que es constante.

Tarea 2

Las consignas de esta tarea son a *nivel resolutor*.

1. Realiza los incisos desde el 1 al 4 de la Tarea 1, cambiando las coordenadas de C por C= (8, 6).
2. Determina la fórmula del perímetro del rectángulo ALNF en función de AL. ¿Corta esta recta a la hallada en la Tarea 1? En caso afirmativo, ¿dónde? ¿Qué significa en el contexto del rectángulo?
3. Si en el inciso 1 de la Tarea 1, tomamos B= (6,0) y C= (0, 8). ¿Qué signo tiene la pendiente de la recta cuya ecuación modela el perímetro del rectángulo en función de AL? ¿Por qué? ¿Qué significa en el contexto del rectángulo?
4. La recta que modela el perímetro del rectángulo ALNF con B= (4, 0) y C= (0, 3), ¿corta a la recta de la Tarea 1? En caso afirmativo, ¿dónde? ¿Qué significa en el contexto del rectángulo?

Comentarios respecto a estas consignas:

- La función del inciso 1 es de proporcionalidad directa a diferencia de la tarea 1.
- En el inciso 2, pueden recurrir a las funciones del GeoGebra para hallar la intersección o hacerlo con lápiz y papel.
- En el inciso 3, la pendiente es negativa y creemos que pueden justificarlo a partir de la semejanza de los triángulos rectángulos ABC, LNB y FCN.
- El inciso 4 está planteado con la intención de trabajar las pendientes de rectas paralelas.

Tarea 3

Las consignas de esta tarea son a *nivel resolutor*.

1. Sean los puntos A= (0, 0); B= (b, 0); C= (0, a) y D= (b, a). Considerando los rectángulos, como en la Tarea 1, con vértice en A, en L y en el segmento BC y otro con vértices en A, en L y en el segmento AD, ¿qué relación existe entre las pendientes de las rectas que modelan los perímetros de estos rectángulos? ¿Es posible que las rectas que los modelan sean paralelas/ secantes? Explica. ¿Es posible que esas pendientes sean mayores o iguales a 2? Explica.
2. Dados los puntos A= (0, 0); B= (b, 0) y C= (0, a), determina las condiciones para que los rectángulos ALFN, construidos como en la Tarea 1, sean isoperimétricos. Justifica. ¿Cuál es la pendiente de la recta que modela el perímetro?

Comentarios respecto a estas consignas:

- Se espera que hallen que las pendientes de las rectas son $\left(2 - 2\frac{a}{b}\right)$ y $\left(2 + 2\frac{a}{b}\right)$, que concluyan que siempre serán secantes y que en el contexto del rectángulo no es posible que ambas sean mayores o iguales a 2.
- En cuanto a los rectángulos isoperimétricos, las respuestas esperadas son que ocurre cuando a=b o cuando B es homólogo de C en una simetría axial de eje la recta bisectriz del primer cuadrante o cuando ABC es un triángulo rectángulo isósceles.
- El inciso 2 se podría haber redactado usando el estilo de las tareas anteriores para trabajar la pendiente nula pero decidimos plantearlo así presentando una complejidad mayor para su

resolución.

Tarea 4

Las consignas de esta tarea son a *nivel didáctico.*

- Las instrucciones del inciso 1 de la Tarea 1, ¿son suficientes para determinar un único rectángulo para cada punto L? Explica.
- ¿Qué problemas pueden presentar los estudiantes al completar una tabla como la de la Tarea 1? ¿Cuáles pueden ser las razones para solicitarla?
- ¿Cuál crees que es la intención de preguntar sobre la proporcionalidad en las tareas 1 y 2? Fundamenta.
- ¿Qué contenidos se trabajan en las Tareas precedentes? Ubica los mismos en la escolaridad secundaria. ¿Considera que estas tareas son adecuados para iniciar, desarrollar o evaluar los mismos? Fundamenta tu respuesta.
- ¿Qué variables didácticas identificas en las Tareas 1, 2 y 3? Explica.
- Redacta el inciso 2 de la Tarea 3 de otra forma. ¿Qué conlleva esta forma distinta de redacción?

– La reflexión sobre la redacción de las instrucciones no debería estar ausente en la formación de profesores, por lo cual la solicitamos en esta tarea.

– Respecto a la tabla, consideramos que se puede poner de manifiesto la cuestión de la aproximación, que en el software se puede predeterminar.

– La cuestión de la proporcionalidad, se destaca para reflexionar sobre las creencias erróneas de los alumnos de secundaria, donde si las dos magnitudes de una tabla aumentan o disminuyen, son siempre directamente proporcionales.

– Una de las variables didácticas que pretendemos que surja en el análisis de las tareas es la elección de las coordenadas de los puntos, estudiando las consecuencias de las decisiones, lo cual se relaciona también con el lugar en la secuencia didáctica donde se plantearán las tareas (inicio, desarrollo o evaluación).

Tarea 5

Las consignas de esta tarea son a *nivel resolutor*.

1. Construye un triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB. ¿Existe una única solución? ¿Existe una única resolución? ¿Cuál es el lugar geométrico de C?
2. En un sistema de ejes coordenados, traza el punto P= (α, (ABC)), donde α es un ángulo agudo del triángulo ABC y (ABC) es su área.
3. ¿Existe un valor máximo para la ordenada de P? Explica.
4. ¿Existen distintos puntos P con ordenadas iguales? Justifica.
5. ¿Qué trayectoria describe P? Explica.
6. Traza el lugar geométrico de P cuando varía α. ¿Puedes identificar este lugar geométrico? ¿Corresponde a la gráfica de una función? Justifica.

Comentarios respecto a estas consignas:

– Se pretende que se analice que todo triángulo rectángulo de hipotenusa AB está inscripto en una circunferencia de diámetro AB y que por lo tanto, todo punto de dicha circunferencia es vértice de un triángulo que verifica las condiciones pedidas. Pueden surgir distintas construcciones, como por ejemplo: con las herramientas “segmento entre dos puntos” AB, “punto medio o centro” del segmento AB y con el comando “rota objeto en torno a un punto” hallar el tercer vértice rotando uno de los extremos del segmento AB un ángulo α con centro de giro punto medio de AB); construir una circunferencia de diámetro AB (hipotenusa del triángulo rectángulo) y su tercer vértice, cualquier punto de dicha circunferencia; considerando el segmento AB como una de las diagonales de un rectángulo y trazar el rectángulo utilizando propiedades de las diagonales; trazar dos rectas perpendiculares, tomar un punto en una de ellas y con centro en él construir una circunferencia de radio AB, la intersección de ésta con la otra recta (si existe) es el tercer vértice.

– Utilizando las herramientas de GeoGebra, el lugar geométrico que P describe hace pensar que la gráfica de la función buscada es una parábola. ¿Será correcta esta conclusión? Si activamos la traza del punto P y colocamos cinco puntos sobre su trayectoria o su lugar geométrico, se puede utilizar la herramienta "Cónica dado Cinco de sus Puntos" y el software graficará una cónica. Bien…parece que el problema está resuelto puesto que el software brinda la fórmula del lugar geométrico. Dos son las sorpresas: una es que la cónica devuelta por el software no es una parábola como se había conjeturado. Otra es que si se cambian algunos de los puntos tomados sobre el lugar geométrico para solicitar la cónica, ésta no es única (aparecen distintas hipérbolas y elipses).

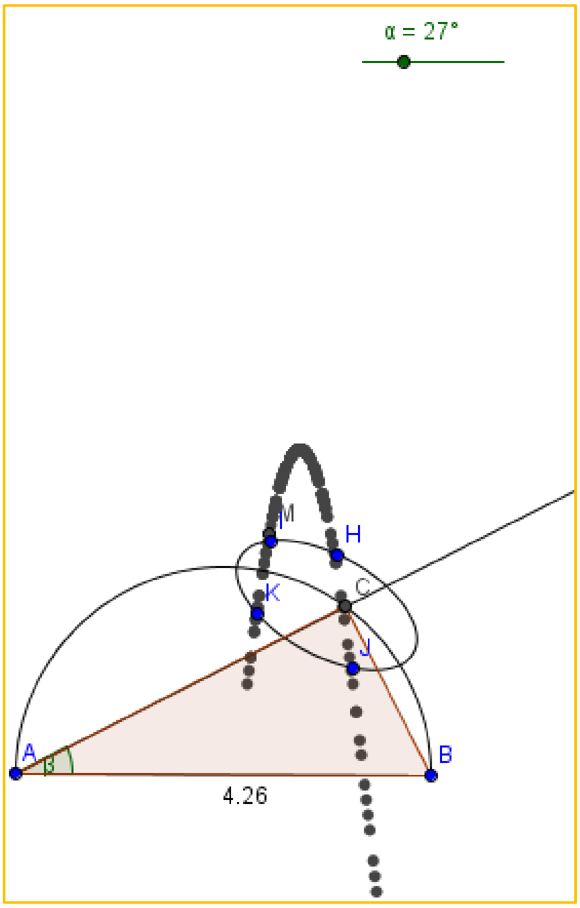

Figura 1. Traza del lugar geométrico del punto P y cónica por 5 de sus puntos.

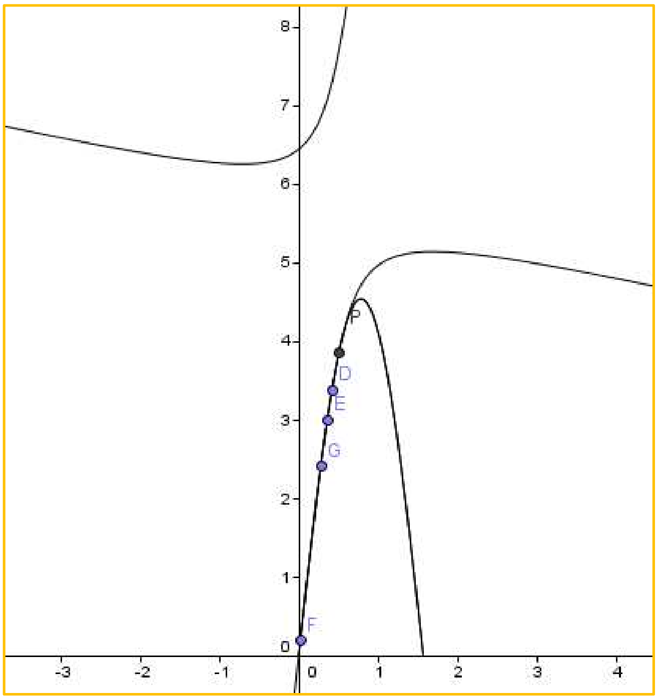

Figura 2. Lugar geométrico del punto P y cónica por 5 de sus puntos.

- El software no nos resuelve el problema pero sí nos permite conjeturar que una cónica no sería la solución a nuestro problema.
- Trabajando con la trigonometría en un triángulo rectángulo, analicemos los datos con los que contamos para hallar el área en función de un ángulo:

Área en función de α:

En el triángulo ABC, sen(α)= $\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AB}|}$ y cos(α)=$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}$

Reemplazando en la ecuación Área del triángulo tenemos:

Área de ABC= ½. $|\overline{AC}|.|\overline{CB}|$= ½ .$|\overline{AB}|$. sen(α). $|\overline{AB}|$. cos(α)= 1/4 $|\overline{AB}|$^2 sen(2 α), donde $|\overline{AB}|$^2 es constante.

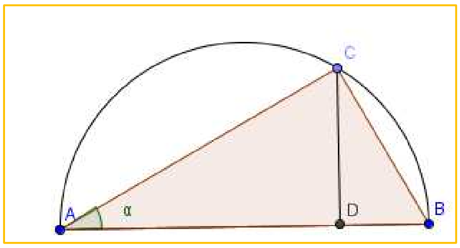

Figura 3. Triángulo rectángulo ABC.

Tarea 6

Las consignas de esta tarea son a *nivel didáctico.*

- ¿Por qué cree que en el inciso 1 de la Tarea 5 se plantea la unicidad de solución? Fundamenta.
- ¿Tendría sentido agregar otro inciso a la Tarea 5 para el otro ángulo agudo del triángulo ABC? Justifica.
- ¿Qué ventajas y limitaciones encuentras en una propuesta de trabajo como la expuesta? Fundamenta.

– Para fundamentar si tiene sentido añadir a la Tarea 5 el planteo de las relaciones para el otro ángulo agudo, es necesario resolver el problema y dependiendo del nivel en que se trabaje se atribuirá el mismo.

– La opinión fundamentada de ventajas y limitaciones de esta propuesta acerca a los estudiantes a posicionarse como futuros docentes de escuela secundaria, a hacer explícitas sus creencias y recuperar los aportes de su formación en las distintas asignaturas del plan de estudio.

Algunas conclusiones

En la propuesta se hace énfasis en relacionar las distintas representaciones del concepto de función teniendo en cuenta las recomendaciones de Arcavi (2008), Hitt (2003) y Sierra Vázquez, González Astudillo & López Esteban (1998).

Consideramos que la función del área del triángulo de la tarea 5, aparentemente una función cuadrática, puede resultar por lo menos sorpresiva y crear ese ambiente propicio que Arcavi (2008) presenta como la semilla de la prueba o demostración.

Las Tareas 4 y 6, estimamos, son indispensables para la reflexión de los futuros docentes de matemática ya que les permite involucrase adquiriendo otra mirada de análisis sobre la propuesta.

Estas prácticas pretenden invitar al estudiante a repensar tareas que encontrarán seguramente en libros de texto de escuela secundaria, transformándolas en propuestas que permitan la reflexión, con la intensión de capacitarlos para que puedan intervenir en la enseñanza transformando escenarios en sus prácticas futuras.

Con esta propuesta esperamos que los futuros docentes reflexionen sobre la perspectiva convencional de que el contenido curricular simplemente debe ser convertido para encajar en la nueva tecnología, siendo necesario considerar a los aportes de las nuevas tecnologías como componente principal en las planificaciones de las secuencias didácticas.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics, 28,* 2-10.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Chemello, G., & Díaz, A. (1997). *Matemática. Metodología de la enseñanza.* Buenos Aires: Pro Ciencia.

Gómez-Chacón, I. M. (Ed.) (2011). *Modelizaciones dinámicas en Matemáticas. Usos del GeoGebra.* Publicaciones Instituto GeoGebra de Madrid. Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense d Madrid. Cd-Rom.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en Ambientes con tecnología. *En Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 213- 223.

Sadovsky, P. (2014). Pensar en relacionar ideas y producir nuevas ideas. *El Monitor, 35,* 20- 24.

Sierra, M., González, M. T., & López C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *En Aula, 10,* 89-104.