

MODELO, MODELACIÓN Y MODELAJE: MÉTODOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Maria Salett Biembengut / Nelson Hein
Departamento de Matemática - CCEN
Universidade Regional de Blumenau - Brasil

1. INTRODUCCIÓN

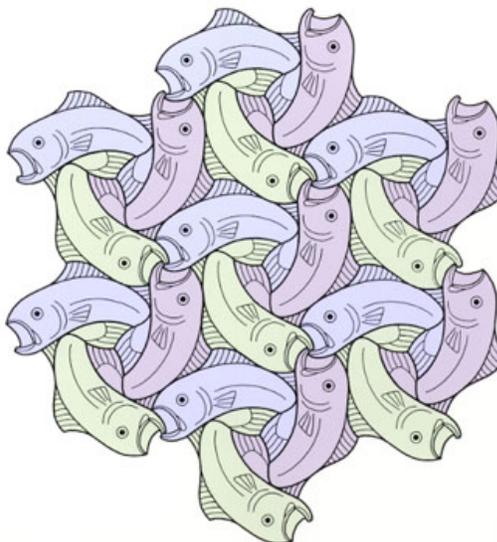
El modelaje matemático, esencia de nuestro trabajo de investigación, nos ha llevado en los últimos doce años, a resultados significativos para mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los resultados han sido contrastados a partir de trabajos experimentales que iniciamos en 1986 con un grupo de alumnos de quinta serie del primer grado de la red oficial brasileña de enseñanza. Posteriormente los extendimos a otros grupos de primer a tercer grado y adquirieron consistencia a través de un cuidadoso estudio en la bibliografía disponible sobre teorías de la enseñanza-aprendizaje.

En efecto, lo que nos motivó a extender estos resultados a comunidades de educadores matemáticos, convirtiéndolos actualmente en objeto central de nuestra investigación, fue el número de actividades de las cuales participamos por invitación de simpatizantes de nuestra propuesta.

En estas actividades, ya fuese a través de conferencias, cursos de extensión o cursos de especialización, tuvimos la oportunidad de estar con profesores de las más diversas regiones del país y del exterior. Independientemente de la región, de las condiciones socio-económicas y culturales en que viven, la mayoría de estos profesores participantes nos demostraron sus preocupaciones en relación a la poca motivación de sus alumnos en lo que se refiere al aprendizaje de la matemática. Es decir que asumieron, de forma explícita o implícita sus dificultades en responder “los porqués” de enseñar este o aquel contenido.

Estos encuentros nos permitieron identificar necesidades emergentes, supliendo lagunas de nuestra propuesta. Ésta era resultado de los trabajos experimentales hasta entonces realizados. La problemática identificada nos llevó a proponer acciones graduales para conseguir mejoras en la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, respetando las condiciones estructurales de los educadores.

En este trabajo, presentamos una síntesis sobre lo que es “Modelo y Modelaje Matemático” y “Modelos, Modelación y Modelaje en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de Matemáticas”.



2. MODELOS Y MODELAJE

2.1. Modelo Matemático

Muchas situaciones del mundo real pueden presentar problemas que requieran soluciones y decisiones. Algunos de estos problemas tienen un aspecto matemático relativamente simple, e involucran una matemática elemental, como por ejemplo:

- El tiempo necesario para recorrer una distancia de 40 kilómetros, manteniendo la velocidad promedio del vehículo a 80 kilómetros por hora;
- El interés que cobra una institución financiera por un determinado préstamo;
- El área de un terreno de forma rectangular con las respectivas medidas: $12\text{m} \times 25\text{m}$.

Otros, “camuflados” en una determinada área del conocimiento, necesitan un análisis más preciso de las variables involucradas, tales como:

- la mejor manera para reducir el “retrabajo” en una fábrica;

- la cantidad permitida y el período apropiado para la caza de un animal predador sin que esto interfiera en el ecosistema.

Sea cual sea el caso, la solución de un problema requiere una formulación matemática detallada.

Al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o un problema realista, lo denominamos Modelo Matemático.

En la ciencia, la noción de modelo es fundamental para la constitución y expresión del conocimiento. En especial, la matemática, con su arquitectura, permite la elaboración de modelos matemáticos, lo que posibilita una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno estudiado.

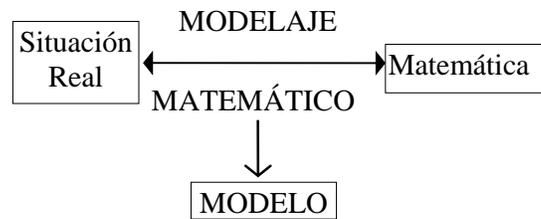
Un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etc.

Por otro lado, cuando se propone un modelo, éste proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor un fenómeno. Sin embargo, no siempre tales aproximaciones están de acuerdo con la realidad. Sea como sea, un modelo matemático retrata, aunque con una visión simplificada, aspectos de la situación investigada.

2.2. Modelaje Matemático

Modelaje Matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas. El modelador debe ser un artista al formular, resolver y elaborar expresiones que sirvan no sólo para una solución particular, sino también, posteriormente, como soporte para otras aplicaciones y teorías.

A *grosso modo*, podríamos decir que **matemáticas y realidad** son dos conjuntos disjuntos y el modelaje es un medio de conjugarlos. El siguiente esquema representa esta propuesta:



figural: Esquema del proceso

Actualmente, este proceso se utiliza en toda ciencia, de modo que contribuye en forma especial en la evolución del conocimiento humano. Sabemos que la matemática se está usando en los fenómenos microscópicos en tecnobiología, y también en los macroscópicos cuando se pretende conquistar el universo. El modelaje matemático, ciertamente, no es una idea nueva. Su esencia siempre estuvo presente en la creación de las teorías científicas y, en especial, en la creación de las teorías matemáticas. A inicios del siglo XX fue muy utilizada en la solución de problemas de biología y economía. Durante la Segunda Guerra Mundial, intentos de resolver cuestiones de defensa y ataque, propiciaron el desarrollo de otra rama de la matemática : la investigación operativa , que posee, hoy en día, extensa aplicación en la industria.

Representar una situación “real” con “instrumental” matemático - modelo matemático - involucra una serie de procedimientos. Identificamos el proceso en tres etapas, divididas en cinco subetapas, a saber:

1ª) Interacción con el asunto

- Reconocimiento de la situación problema;
- Familiarización con el asunto que va a ser modelo-investigación.

2ª) Contrucción matemática

- (i) Formulación del problema-hipótesis;
- (ii) Resolución del problema en términos del modelo.

3ª) Modelo matemático

- (i) interpretación de la solución-convalidación.

El siguiente diagrama, representa el proceso:

1ª) Interacción con el asunto

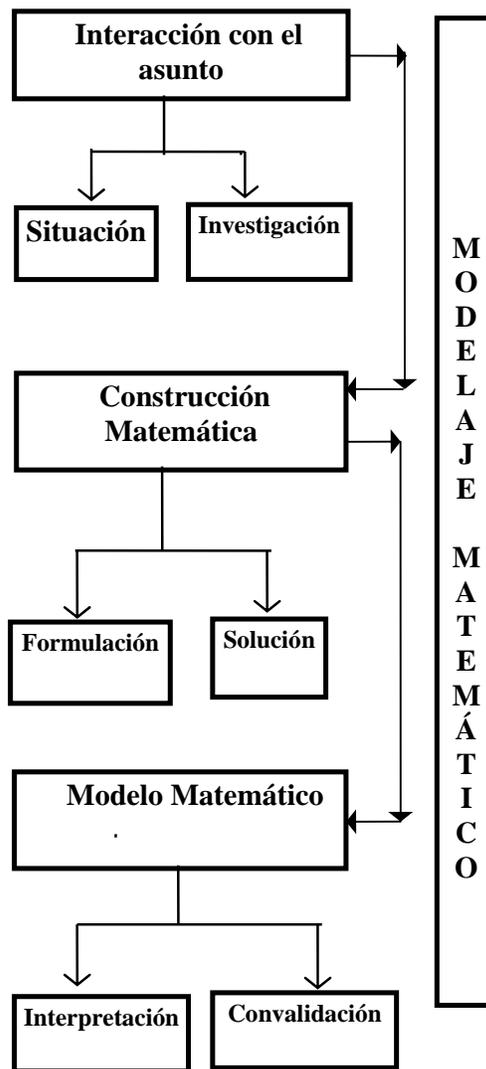
Una vez delineada la **situación** que se pretende estudiar, debe hacerse una **investigación** sobre el asunto. Tanto indirectamente (a través de libros y revistas especializadas) como directamente *in situ* (a través de datos experimentales obtenidos con especialistas del área). Aunque hayamos dividido esta etapa en dos subetapas, los límites entre ambas no son tajantes : el reconocimiento de la situación-problema se torna cada vez más claro, a medida que se van conociendo los datos.

2ª) Construcción Matemática

Ésta es la etapa más compleja y desafiante. Está subdividida en formulación del problema y solución. Es aquí que se da la “traducción” de la situación-problema al lenguaje matemático. Intuición y creatividad son elementos indispensables en esta etapa.

En la formulación del problema-hipótesis, es necesario:

- Clasificar las informaciones (relevantes y no relevantes) identificando los hechos involucrados.
- Decidir cuáles son los factores a ser perseguidos, planteando la hipótesis.
- Generalizar y seleccionar variables relevantes.
- Seleccionar símbolos apropiados para dichas variables.
- Describir las relaciones que se establezcan, en términos matemáticos.



Se debe concluir esta subetapa con un conjunto de expresiones aritméticas y fórmulas, o ecuaciones algebraicas, o gráfico, o representaciones, o programa computacional que nos lleven a la solución o nos permitan deducir una.

En la solución del problema en términos del modelo la situación pasa a ser resuelta o analizada con el “instrumental” matemático de que se dispone. Esto requiere un aguzado conocimiento sobre las entidades matemáticas usadas en la formulación.

La computadora puede ser un instrumento imprescindible: especialmente en las situaciones donde no fuese posible resolver por procesos continuos, se obtienen resultados por procesos discretos.

Cabe aquí destacar que muchos modelos matemáticos no resueltos el siglo pasado condujeron al desarrollo de otras ramificaciones de la matemática.

3ª) Modelo Matemático

Para poder concluir el modelo, se torna necesario un chequeo para así comprobar en qué nivel éste se aproxima a la situación-problema traducida y a partir de ahí, poder utilizarlo.

De esta forma, se hace primero la **interpretación** del modelo y posteriormente, se comprueba la **adecuación-convalidación**.

Para interpretar el modelo se analizan las implicaciones de la solución, derivada del modelo que está siendo investigado. Entonces, se comprueba la adecuación del mismo, volviendo a la situación-problema investigada, evaluando cuán significativa y relevante es la solución.

Si el modelo no atiende a las necesidades que lo generó, el proceso debe ser retomado en la segunda etapa cambiando hipótesis, variables, etc.

Es importante al concluir el modelo, elaborar un informe en el que se comuniquen todas las facetas del desarrollo, con el fin de propiciar su uso.

3. MODELAJE MATEMÁTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Desde hace algunos años, se están procesando reestructuraciones en el currículum y métodos de enseñanza de la matemática. El objetivo, entre otros fines, es aumentar el interés por la aplicación de ésta en las situaciones cotidianas.

Autores como Bruner [BRU87] sustentan que el aprendizaje no es un mero sumar conocimiento, y sí un “proceso de crecimiento”. “Saber es un proceso y no un producto”.

En este sentido, el sistema educativo debe proveer elementos para que el individuo desarrolle sus potencialidades, propiciándole capacidad para pensar crítica e independientemente.

La matemática no sólo contribuye sobremanera para el ejercicio intelectual, sino que también es el lenguaje de la ciencia. Adler [ADL68] destaca la importancia de esta disciplina, defendiendo que “debemos buscar maneras de desarrollar precozmente, en los alumnos, la capacidad para leer e interpretar el campo de la matemática”. Este autor pone de relieve que los símbolos no deben ser seccionados de sus raíces ya que se trata de “herramientas de pensamiento”. Y que el “divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa, priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una concha vacía de símbolos sin significados”.

Para D’Ambrosio [D’AM86], aprendizaje es una relación que envuelve reflexión y acción, cuyo resultado es un permanente cambio de realidad. Según él, el individuo crea modelos que le permitirán elaborar estrategias de acción. “Esa recreación de modelos por el sujeto, que puede utilizar otros modelos que ya han sido incorporados a su realidad y que es la esencia del proceso creativo, debería constituir el punto focal de los sistemas educativos”.

Desde este punto de vista, Bassanezi [BAS90] afirma que la enseñanza debe estar enfocada en los intereses y necesidades prácticas de la comunidad. “Aunque su interés no se agote allí, no es intención hacer una apología de “para qué sirve”, y Adler [ADL68] completa, “ni tampoco querer que el alumno, en pocos años de experiencia, descubra lo que la humanidad, incluso a través de sus mejores inteligencias, descubrió a lo largo de millares de años”. Mientras que para Piaget “comprender es inventar o reconstruir a través de la reinención, y que será necesario inclinarse ante tales necesidades si lo que se pretende para el futuro es tener individuos capaces de producir o de crear y no sólo, apenas de repetir”.

Las afirmaciones de los autores anteriormente citados constituyen, según nuestro modo de ver, una fuerte defensa del proceso del modelaje matemático en la enseñanza, dado que la escuela es un ambiente indicado para la creación y evolución de modelos. De esta forma, les será dada a los alumnos la oportunidad de estudiar situaciones-problema, a través de investigaciones, desarrollando su interés y agudizando su sentido crítico.

En países como Inglaterra, educadores e industriales han estado en consonancia para la búsqueda de métodos que mejoren la eficiencia de la educación matemática.

Así, el modelaje matemático ha sido desarrollado en estos países, pues permite que se llegue primero al problema real y, a través de la solución matemática, a la interpretación e implementación de esta solución.

Actualmente, el número de experiencias en la enseñanza-aprendizaje del primer al tercer grado, en muchos países, está creciendo significativamente, generando posiciones diferenciadas sobre la implantación del proceso.

Por la literatura, podemos destacar dos posturas: los que consideran que a través del modelaje no se puede enseñar nuevos conceptos matemáticos y los que defienden dicho método como proceso ideal para enseñar matemática.

Algunos autores, tales como: Greenman, Hall, Burkhart, Oke, Clement, defienden la primera postura. por ejemplo, Greenman definió que la condición para poder hacer el modelaje de una situación es que el alumno debe tener conocimiento de la matemática que será utilizada. O sea, se debe enseñar, primero, los conceptos matemáticos

indispensables y después proseguir con el proceso de modelaje. Hall y Burkhart están de acuerdo con Greenman. Burghes y Huntley [BUR82] afirman que el modelaje no debe ser el camino utilizado para aumentar el conocimiento matemático, si no sólo para mejorar la habilidad de aplicar la matemática a situaciones prácticas.

Sin embargo, existen muchos autores que defienden la segunda postura, tales como Kaiser, Messmer, Lange, Treffers, Vern Treiliks, Barreto, Bassanezi. Mención especial merece Bassanezi por ser uno de los grandes diseminadores y defensores brasileños de la propuesta de modelaje matemático en la enseñanza-aprendizaje. Según él, “trabajar con modelaje matemático en la enseñanza no es sólo una cuestión de ampliar el conocimiento matemático, sino sobretodo, de estructurar la manera de pensar y actuar”.

Las experiencias que hemos venido realizando durante los últimos diez años muestran que, en determinadas circunstancias, se puede aprender matemática paralelamente al modelaje matemático; y en otras no. Depende de diversos factores, como el grado de escolaridad, el tiempo disponible y los objetivos del curso.

3.1. Modelaje matemático como disciplina

El modelaje matemático está siendo implantado como disciplina en los más diversos cursos, principalmente en el tercer grado (ingeniería, matemática) y en postgrado (educación matemática, ingeniería de producción).

En los cursos de ingeniería de la FURB (Fundação Universidade Regional de Blumenau), por ejemplo, la disciplina del modelaje se ofrece en los últimos semestres, considerando que el alumno ya tiene un conocimiento significativo de matemática y de las áreas específicas del curso en cuestión.

Otro ejemplo es Inglaterra, en donde la disciplina de modelaje matemático también se ofrece al final de los cursos, aunque integrada a la industria. Oke y Bajpai [OKE81] relatan, en un artículo, el trabajo realizado en cursos de ciencias físicas y matemáticas, donde se han hecho muchas investigaciones con el objetivo de identificar elementos esenciales de cada etapa o nivel y formas de interacción de estas etapas. La finalidad es poder crear una metodología para enseñar habilidades del proceso de modelaje matemático en ciencias físicas e ingeniería.

Bassanezi ha diseminado el modelaje matemático en cursos de extensión y postgrado, realizados en diversas regiones brasileñas, con alumnos de iniciación científica y pos-graduación.

3.2. Cómo enseñar modelaje matemático

Para enseñar modelaje, es necesario saber, *a priori*, el tiempo disponible de los participantes para trabajo extra-clase, el número de horas-aula del curso en cuestión y el conocimiento matemático común a todos los participantes.

Definidas estas condiciones, el curso deberá tener dos momentos: presentación de modelos matemáticos y el proceso de modelaje. El orden no es rígido. El profesor puede optar por presentar y estudiar primero los modelos matemáticos y posteriormente, el modelaje matemático; o iniciar con el modelaje, intercalando adecuadamente, la exposición de los modelos.

Los modelos deben ser presentados en forma minuciosa, resaltando los pasos necesarios para poder obtener resultados, justificando o incluso recordando los conceptos matemáticos inferidos. Éstos facilitarán la comprensión de los procedimientos involucrados en el modelaje.

El modelaje se inicia proponiendo a los participantes que se reúnan en grupos de interés, escojan un tema por grupo y propongan cuestiones sobre el asunto. En un segundo momento, deben hacer una investigación (reunir datos), para familiarizarse con el tema escogido. Los datos reunidos propiciarán otras cuestiones. Cuanto mayor es el tiempo disponible para investigación y familiarización con el tema escogido, mejor será el resultado del curso.

A partir de esto, debe sugerirse un orden para la resolución de las cuestiones (desde la más simple a la más compleja) y definir una forma para orientar y encaminar a los grupos. Los procedimientos para llegar a la elaboración del modelo-modelaje deben seguir el orden especificado en el ítem 2.2 de este artículo.

En los cursos que estamos realizando, hemos observado una tendencia de los participantes a elaborar modelos que se restrinjan al contenido matemático conocido y que fluye de los modelos que nosotros hemos presentado. Es decir, si presentamos modelos que involucren geometría, la mayor parte de los trabajos serán hechos con geometría; si usamos funciones, programación lineal o ecuaciones diferenciales, quedan restringidos al contenido expuesto. (y aún si, y solamente si, supieran el contenido en cuestión.)

De esta forma, si queremos mejorar las condiciones propuestas, debemos guiar a los alumnos participantes para la resolución de cuestiones que los lleven a un contenido matemático sobre el cual necesiten obtener mayor conocimiento o profundización. Posteriormente deberán retornar al problema. Todo esto de alguna manera apunta hacia un importante tema: disponibilidad y duración del curso. Por otro lado, es bueno recordar que la habilidad

para hacer modelos se obtiene con la experiencia, a medida que nos colocamos en disposición de solución de situaciones reales. Un curso sobre modelaje, señala; es decir, nos da una orientación indicando la dirección que debemos proseguir.

3.3. Modelaje matemático como método de enseñanza de la matemática

El modelaje matemático, como método de enseñanza de la matemática, debe seguir el trayecto definido para el curso de modelaje con detalle: desarrollar el contenido matemático que surja no sólo de los modelos presentados, a priori, por el profesor, sino también de los modelos que se propongan hacer los alumnos.

En este sentido, a medida que se está exponiendo un modelo matemático, en circunstancia adecuada, el profesor debe interrumpir temporalmente la exposición, desarrollar las matemáticas necesarias para la resolución de las cuestiones involucradas, y retornar luego al modelo inicial. El tiempo de interrupción depende de la amplitud del contenido, lo importante es no perder de vista la motivación. Lo mismo puede hacerse durante el proceso de modelaje, si la matemática requerida fuera la misma para la mayoría. En caso de que un determinado contenido fuese de interés solamente de un cierto grupo, el profesor induce a la investigación, manteniéndose como orientador.

Cabe aquí destacar que la matemática desarrollada no excede los límites del modelo que está siendo trabajado por el grupo; lo que, desde cierta perspectiva, puede ser poco amplio, dependiendo del tema y del nivel de conocimiento matemático del grupo.

Para el uso del método, el profesor debe tener un buen conocimiento de modelaje. Esto implica haber realizado un estudio sobre la respectiva metodología, haber elaborado algunos modelos y ya haber hecho experiencias de la propuesta en la enseñanza.

La enseñanza aprendizaje de matemáticas con el método de modelaje, desde nuestro punto de vista, es más gratificante, toda vez que el alumno va a aprender lo que le causa interés, tornándose así co-responsable de su aprendizaje. El profesor-orientador, a su vez, también se torna “ganador” en el sentido de que, cada tema escogido por sus alumnos, le facilita aquilatar su conocimiento.

Nuestra opinión es que el modelaje, tal como figura en la propuesta arriba citada, puede ser plenamente utilizado, si los alumnos ya han participado de experiencias con modelaje (tema que disertaremos en el próximo apartado) o en cursos de extensión o pos-graduación. Sin embargo, en cursos regulares donde hay un programa que cumplir - currículum y una estructura espacial y de organización en los moldes tradicionales (como sucede en la mayoría de las instituciones de enseñanza) - el método de modelaje sufre algunas alteraciones. En este caso, se debe tener en consideración, principalmente, lo siguiente: el grado de escolaridad de los alumnos; el tiempo disponible que tendrán para el trabajo extra-clase; el programa a cumplir; la situación en que el profesor se encuentra, tanto en relación al conocimiento del modelaje, como al apoyo por parte de la comunidad escolar para implantar cambios. Al método que utiliza la esencia del modelaje en cursos regulares, con programa, lo denominamos **modelación matemática**.

3.4. Modelación matemática como método de enseñanza-aprendizaje de la matemática

En la modelación matemática, el tema es único y de él se extrae el contenido programático. Puede ser utilizado incluso durante todo el período lectivo. Siempre que tenga el contenido suficiente para poder desarrollar el programa y que no agote la motivación de los alumnos.

Sugerimos que el método tenga la siguiente secuencia: justificación de proceso, elección del tema, desarrollo de contenido programático, ejemplos análogos - fijación de conceptos y evaluación y convalidación de los resultados.

a) Justificación del proceso

Cuando el método sea aplicado por primera vez a determinado grupo de alumnos, es de esencial importancia que el profesor justifique el proceso. No sólo para exponer su interés en el proceso de aprendizaje; sino también, para tornar a los alumnos en participantes activos y, por lo tanto, corresponsables con la enseñanza-aprendizaje.

Se inicia con un análisis crítico sobre la enseñanza convencional de las matemáticas y se muestra la posibilidad de presentar el contenido matemático a partir de situaciones reales, dándose, así, un sentido práctico. Para esto el profesor ejemplifica exponiendo un modelo matemático conocido y dirige su exposición de forma que esclarezca cuáles son los conceptos y operaciones matemáticas que se tornan necesarios para la comprensión de la situación propuesta. Por encima de todo, es necesario encontrar medios eficaces para motivar a los alumnos de manera que, voluntariamente, se decidan por un desarrollo activo del aprendizaje.

b) Elección del tema

A medida que los alumnos vayan sugiriendo temas, se hace una lista en la pizarra, para una posterior elección. El profesor también puede aprovechar para intercalar algunos temas (como sugerencia), principalmente aquéllos que ya son conocidos con relación a la amplitud de sus contenidos. La elección del tema por los alumnos hará que se sientan participantes del proceso.

La actuación del profesor deberá estar primordialmente volcada a la utilización de estrategias que faciliten a los alumnos la elección de un asunto amplio, motivador y sobre el cual, en cierta manera, sea fácil obtener datos o informaciones. Por ejemplo, temas sugeridos por alumnos: abejas, hormigas, flores, música, construcciones de casas, plantación de tabaco, de caña de azúcar, de café, etc.

c) Desarrollo del contenido programático

El proceso es semejante al del curso de Modelaje. No obstante, debe tener en cuenta, el contenido programático que deberá fluir del tema.

El profesor puede optar por hacer una primera interrogante sobre el tema y pedir que indiquen sugerencias sobre lo que se puede estudiar para entender, o proponer que ellos mismos indiquen las interrogantes.

A continuación realizaremos un ejemplo, especialmente escogido, para facilitar el entendimiento del análisis propuesto. Suponiendo que estamos tratando de la quinta serie del primer grado, y que de entre los temas sugeridos, se escogió: construcción civil.

¿Qué es necesario para hacer una casa?

Seguramente responderán: mano de obra, material de construcción, terreno, dibujo, etc. A partir de las sugerencias, el profesor debe seleccionar la que es más adecuada para desarrollar el contenido matemático programático.

Supongamos que el contenido sea geometría, se inicia por el dibujo de la planta de la casa. El profesor propone que hagan un esbozo de una planta y a partir de éste se pasa a explorar la geometría necesaria. Con el dibujo preliminar, que deberá ser hecho de acuerdo con el conocimiento o deseo de cada uno, sin ninguna interferencia, el profesor puede hacer una evaluación sobre lo que ya conocen sobre geometría. Posteriormente, pasará a desarrollar lo que aún desconocen y que es necesario para poder hacer el boceto de la planta correctamente.

Mantener un clima de cierta libertad, estimulando la participación, la tranquilidad, y la creatividad individual permitirá obtener resultados satisfactorios relacionados con el aprendizaje de las matemáticas.

Si es necesario, el profesor puede proponer que hagan una investigación sobre el asunto.

En el ejemplo de construcción civil, el profesor puede orientar a los alumnos para que busquen mayores informaciones con un profesional del área, en este caso un dibujante o ingeniero, etc. Estas informaciones podrán obtenerse, también, a través de una disertación en la escuela. En este caso, la investigación, parte de la tarea, no sólo propiciará una mejor visualización sobre la importancia de las matemáticas estudiadas, sino también el conocimiento y valorización del trabajo de un profesional.

d) Ejemplos análogos- fijación de conceptos

Después de desarrollar el contenido matemático suficiente para responder o resolver esta etapa del trabajo, proponer ejemplos análogos para que el contenido no se restrinja al modelo.

Los ejemplos análogos darán una visión más clara sobre el asunto, supliendo deficiencias, rellenando posibles lagunas en lo referente a la comprensión del contenido. Según Adler [ADL68] “Nuestro conocimiento no está limitado a las percepciones adquiridas empíricamente. Está organizado y adquiere profundidad a través de los conceptos creados por la mente humana”.

e) Evaluación y convalidación de los resultados

A partir de ahí, el profesor propone que analicen el resultado obtenido. En este ejemplo, solicita que analicen el boceto de la planta, con un doble objetivo:

- e.1) Aplicar y ejercitar el contenido propuesto;
- e.2) Comprobar si el trabajo (modelo) está de acuerdo con las condiciones exigidas (convalidación).

¡Éste es un momento adecuado para hacer una evaluación!

Si los alumnos demostraran interés en continuar con el tema propuesto (en este caso, construcción civil es muy amplio); se pasa a una segunda cuestión, siguiendo los cinco pasos definidos anteriormente. Por ejemplo, se pretende enseñar sistema de medida lineal, lo que en cierta forma da continuidad a la geometría, se puede iniciar con la siguiente cuestión:

¿Cómo sabrá el constructor el tamaño de la casa que se quiere edificar teniendo como referencia el dibujo?

Creemos que tanto alumnos como profesores tendrán más entusiasmo en la posibilidad de transformar la escuela si participan de un trabajo con modelación donde el contenido no está dissociado de la realidad. Si conectan lo que se ha aprendido con lo que se ha elaborado. Si se estimula su creatividad. Éstas son condiciones esenciales para obtener éxito en la sociedad futura. No importa si dicha transformación escolar es lenta y gradual, lo central es que la escuela llegue a ejercer el papel que le corresponde: preparar al individuo para actuar en el medio circundante.

Lo que proponemos no es tarea fácil y lo sabemos por propia experiencia. Un curso, una conferencia o un artículo que contengan definiciones y/o resultados positivos de trabajos realizados, no son suficientes para iniciar un trabajo aplicando modelación, y mucho menos modelaje. La habilidad y seguridad sólo se adquieren con la experiencia. Es una experiencia que debe hacerse de forma gradual en consonancia con el tiempo disponible que se tiene para planificar. No importa el tiempo de trabajo que tenemos como profesores, cuando vamos a enseñar algún contenido por primera vez, sentimos menos recelo si lo hacemos por el camino que ya conocemos.

Ante las diversas variables que muchas veces dificultan introducir un método como los que hemos presentado anteriormente, sugerimos que se haga un trabajo previo que denominaremos modelos matemáticos en la enseñanza o pre - modelación.

3.5. Pre-modelación

Aquéllos que quieren hacer un trabajo con modelación, pero no se sienten debidamente seguros, pueden empezar por un trabajo de pre-modelación, esto significa:

- Presentar cada uno de los contenidos del programa a partir de modelos matemáticos ya conocidos;
- Aplicar trabajos o proyectos realizados por colegas, por un tiempo corto, con un único grupo y de preferencia aquél que tiene mejor dominio de matemáticas.
- Como trabajo extra-clase, para los alumnos, se solicita que busquen ejemplos o intenten crear sus propios modelos, siempre a partir de la realidad.

Estamos seguros de que el resultado será satisfactorio y servirá como incentivo para su aplicación en otros grupos.

4. CONSIDERACIONES FINALES

La adopción de modelos matemáticos, ya sea en forma de presentación o bien en el proceso de creación, adecuadamente dimensionados a la realidad de las comunidades escolares, incorporando nuevas tecnologías, sin dejar de preservar identidades culturales es un medio por el cual el alumno alcanza un mejor desempeño, y logra convertirse en uno de los principales agentes de cambios.

Para esto, el profesor tendrá que ser ambicioso, abierto, dispuesto a conocer y aprender una vez que esta propuesta abre el camino para descubrimientos significativos. Lo que proponemos no es un manual de reglas, sino, un resultado de una vivencia práctica, considerando diversos factores sobre la institución de la enseñanza frente a las necesidades del medio en que vivimos, en creciente y constante desarrollo tecnológico.

Aquéllos que quieran hacer un trabajo con Modelaje o Modelación, pero que no se sientan debidamente seguros, pueden empezar con uno de pre - modelación.

A pesar de las dificultades encontradas, los resultados positivos nos han llevado, a creer y apostar, cada vez más, en este trabajo que tiene como punto central estimular la creatividad: para que el individuo se desarrolle y enfrente con éxito el tercer milenio.

5. BIBLIOGRAFÍA

ADLER, Irving. *Mathematics and Mental Growth*. New York, National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

BASSANEZI, R. C. *Modelagem e Aprendizagem*, Boletín Sociedad Brasileira de Matemática Aplicada, 1990.

BASSANEZI, R. C. e BIEMBENGUT, M. S. *Modelação Matemática: Uma velha forma de pesquisa - Um novo método de ensino*. Anais do I-CIBEM-SAEM "Thales", Sevilha, 1990.

BAUM, Robert J. *Philosophy and Mathematics*. Freeman Cooper and Co., 1973.

BERRY, J. e O'SHEA, T. "Assessing Mathematical Modelling" in *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, vol 13, 6, 1982.

BURGHES, D. N., HUNTLEY, I. and McDONALD, J. *Applying Mathematics - A Course in Mathematical Modelling*, Ellis Horwood, 1982.