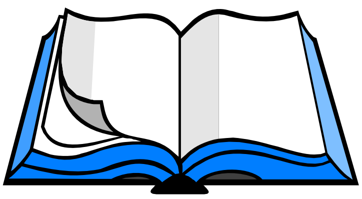
Resolución de problemas en la enseñanza de la matemática

Juana Contreras S.[12]
Claudio del Pino O.[13]
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Resolver problemas es un arte práctico, igual que nadar o jugar fútbol: se puede aprender sólo por imitación y práctica... si alguien desea aprender a nadar debe ir al agua, y si alguien desea ser un buen resolvedor de problemas debe resolver problemas.

George Polya (1961)

Introducción.



Como todos sabemos, en todas las épocas, la enseñanza de la matemática ha evidenciado dificultades en los logros de los estudiantes. Por esta razón, constantemente, se han buscado nuevas estrategias para su enseñanza, con el fin de obtener aprendizajes más efectivos. Así, por ejemplo, en los últimos 40 años, se han explorado las siguientes tendencias curriculares en la enseñanza y aprendizaje de la matemática:

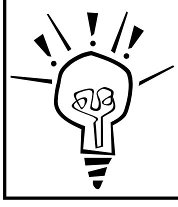
- Años 1960: La *matemática moderna*, proponía enseñar la matemática como una ciencia lógica y deductiva, unificando sus contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas, y los conceptos de relación y función.
- Años 1970: El *retorno a lo básico*, proponía retomar la práctica de algoritmos y procedimientos básicos de cálculo.
- Años 1980: Muchos educadores empiezan a dirigir su mirada, esperanzadoramente, hacia las actividades matemáticas sobre la resolución de problemas. Esto llama la atención, ya que G. Polya hace más de 45 años, publicó su famoso libro *Cómo resolverlo*, el cual sin ser el primer tratado sobre la resolución de problemas, se ha transformado en un clásico sobre esta temática.

[12] Universidad de Talca, Casilla 271, Talca, e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
[13] Universidad de Talca, Casilla 271, Talca, e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl

Es así como en los últimos años, todos los informes y estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, destacan la importancia que cumplen en ella, la resolución de problemas[14] ([2],[3],[4],[6]). Por ejemplo, en el documento *Planes de acción* del *Consejo Nacional de profesores de Matemática* de Estados Unidos, se consideran 8 recomendaciones para la enseñanza de la matemática a nivel secundario. La primera de estas recomendaciones dice: *El Consejo Nacional de Profesores de Matemática recomienda que la solución de problemas sea el principal objetivo de las matemáticas en las escuelas de los años ochenta*. En [3], Miguel de Guzmán señala: *La enseñanza (de la matemática) a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo y de inculturación*.

Las diversas miradas a la resolución de problemas ([1]), ([10]), en general, incluyen al menos, uno de los siguientes aspectos: *matemático*, propiamente tal; *pedagógico*, *cognitivo* y *sociológico*.

- En el primero, interesa conocer al problema como estructura, así como también establecer el papel que han desempeñado los problemas en el desarrollo de la matemática.
- En el segundo, preocupa definir cómo, a través de la resolución de problemas, se logran los objetivos que se pretenden alcanzar con la enseñanza de la matemática. En esta mirada, se ha propuesto esencialmente, poner atención a tres aspectos: enseñar para resolver problemas (proponer más problemas a los alumnos, emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias), enseñar sobre la resolución de problemas (heurística), y enseñar vía la resolución de problemas.
- En el tercero, los problemas son estudiados considerando las condiciones internas, subjetivas y afectivas, de la persona que se enfrenta a su resolución.
- En la última, se estudia la situación social en la cual se aborda la solución de problemas: lugar (sala de clases), actores (profesor - alumnos) y actividades desarrolladas.



Enseñar matemática debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemática no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas.

Luis Santaló (1985)

[14] Como es de suponer, actualmente, la resolución de problemas no es la única propuesta didáctica en la enseñanza de la matemática. También están, entre otras, *los procesos del pensamiento matemático, continuo apoyo en la intuición directa de lo concreto y apoyo permanente a lo real, los impactos de la nueva tecnología: calculadoras gráficas y computadores, énfasis en el rol de la historia en el proceso de formación matemática, privilegiar el trabajo grupal y colaborativo, corriente sobre la modelización en la enseñanza de la matemática, el rol del juego en la educación matemática, importancia de la motivación y presentación, y fomento por el gusto por la matemática.*

¿Qué es un problema?

A continuación se presentan algunas explicaciones, que diferentes autores han entregado, sobre qué es un problema.

- *Tener un problema significa buscar, de forma consciente, una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata.*
  Mathematical Discovery, G. Polya, 1961

- *Para que una situación constituya un problema para una persona, ésta debe estar enterada de la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación,*
  Teaching and Learning Mathematics, F. Bell, 1978

- *Un problema es una situación cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.*
  Problem Solving, a handbook for teachers, S. Krulik y K. Stacey, 1980

- *Una situación constituye un problema para una persona, cuando dicha situación no es familiar para ella, es decir, cuando la novedad es la característica fundamental de la misma y cuando requiere un tratamiento distinto de una simple aplicación rutinaria. Dicho en términos de ejecución, cuando su resolución necesita de una deliberación, identificación de posibles hipótesis y comprobación de factibilidad, teniendo el individuo que elaborar conductas propias que pongan a prueba sus capacidades de razonamiento autónomo.*
  La resolución de problemas: ¿una panacea metodológica?, L. Contreras, 1987

- *Un problema constituye primeramente una situación objetiva que se presenta y evidencia como dificultades cognitivas, carencias de información, contradicciones ideativas, o necesidades diversas, no solucionables espontánea y trivialmente, sino superables sólo mediante un reflexivo estudio o investigación teórica, empírica o aplicada, que se efectúe oportunamente.*
  Problema, Problemática, Problematización; A. Becerra, 1989

- *Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra.*
  Tendencias innovadoras en educación matemática, M. de Guzmán, 1993

- *Un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos..*

Resolución de problemas, J. Escudero [5]

Aspectos que influyen en la capacidad de resolver problemas:


Alan Schoenfeld

Desde el punto de vista de los diferentes aspectos que influyen en la resolución de problemas, Alan Schoenfeld propone cinco dimensiones que intervienen directa, dinámica e interrelacionadamente:

- **Dimensión cognitiva**: La base de conocimientos.
- **Heurísticas**: Estrategias en la resolución de problemas.
- **Dimensión metacognitiva**: Monitoreo y control (auto-regulación).
- **Dimensión afectiva**: Creencias y afectos.
- **Práctica matemática**: Experiencia en la resolución de problemas.

Los conocimientos que *el resolvedor* tenga en el ambiente matemático donde se ha planteado el problema (resultados, definiciones, procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios, fórmulas, reglas, etc.) tienen una incidencia directa en la factibilidad de acceder a una solución del problema.

Por su parte, con respecto a las estrategias en la resolución de problemas (heurísticas), que *el resolvedor* tenga incorporadas naturalmente, tales como: analogía, elementos auxiliares, descomponer y recombinar, inducción, particularización, generalización, variación, trabajando hacia atrás, etc.; diversas investigaciones han demostrado que también juegan un rol fundamental a la hora de intentar resolver un problema.

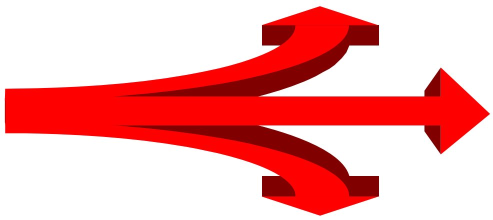
La auto-regulación en el trabajo (monitoreo y control), es decir la capacidad del *resolvedor* para decidir qué, cuándo y cómo usar una determinada estrategia o resultado matemático; cuando abandonar (al menos temporalmente) un camino de solución, son capacidades metacognitivas que influyen fuertemente en la resolución de problemas.

Con respecto a la dimensión afectiva, las creencias que *el resolvedor* tenga acerca de la naturaleza de la matemática, por ejemplo*: los problemas matemáticos tienen solamente una solución correcta*; *hay solamente una manera correcta de resolver un problema*; *si uno entiende el contexto matemático, todo problema puede ser resuelto en diez minutos o menos*, etc. enmarcarán el quehacer del estudiante durante el proceso de resolver un problema[15]. Por su parte, el grado en que el resolvedor disfruta el proceso de resolución de problemas y su capacidad para superar la frustración del fracaso en obtener la solución de algunos problemas, son aspectos afectivos que inciden en la actitud del resolvedor.

Finalmente, la práctica matemática a que ha sido expuesto un estudiante en la escuela, es un factor que afectará su capacidad para resolver problemas. Diversos estudios y experiencias muestran que cuando el profesor diseña ambientes donde se privilegia la interacción de los estudiantes y se promueve el pensamiento matemático, el alumno adquiere una actitud favorable hacia la actividad de resolver problemas.

Propuestas metodológicas para resolver problemas

(. . . *no hay camino, se hace camino al andar.*)



G. Polya

Con respecto a los métodos para resolver problemas, fue el matemático húngaro, George Polya quien en su libro publicado en el año 1945, *How to solve it*, sentó las bases modernas de esta línea de reflexión e investigación. Junto a Polya, diversos matemáticos y educadores han propuesto (antes y después de Polya) variadas sugerencias de estrategia para enfrentar organizadamente la resolución de problemas. A continuación se presentan resumidamente, las propuestas más relevantes en este aspecto.

[15] Como es de suponer, también en este aspecto influyen las creencias del profesor y las sociales, sobre la resolución de problemas

- **J. Dewey** (1910). Este pensador y educador, esbozó cinco etapas en la secuencia de acontecimientos en la resolución de problemas:
  1) la presentación del problema,
  2) la definición del problema en términos de, por ejemplo, los rasgos esenciales característicos,
  3) la formulación de una hipótesis,
  4) el ensayo de la hipótesis, y
  5) la comprobación de la hipótesis.

- **J. Hadamard** (1945). En la resolución de un problema intervienen cuatro etapas:
  1) preparación,
  2) incubación,
  3) iluminación, y
  4) comprobación.

  Si bien, estas etapas se referían a la creación en matemática, también ellas están presentes en el proceso de resolución de problemas a nivel escolar.

- **G. Polya** (1945). Resumidamente, la propuesta de Polya[16], contempla cuatro fases en la resolución de problemas. En cada una de ellas, Polya plantea interrogantes claves con el objetivo de guiar y orientar la acción de la persona que intenta resolver un problema:

  1) **Comprender el problema.**
     - ¿Cuál es la incógnita?.
     - ¿Cuáles son los datos?.

  2) **Concebir un plan.**
     - ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
     - ¿Conoce un problema relacionado con éste?
     - ¿Podría enunciar el problema de otra manera?
     - ¿Ha empleado todos los datos?

  3) **Ejecutar el plan.**
     - ¿Son correctos todos los pasos dados?

  4) **Examinar la solución obtenida (Mirando hacia atrás).**
     - ¿Puede verificar el resultado?
     - ¿Puede verificar los razonamientos realizados?

- **J. Mason, L. Burton y K. Stacey** (1982). Estos autores, dividen el proceso de resolución de problemas en las fases:

  1) Hacer los primeros contactos,

[16] Las ideas de Polya, tienen su antecedente más directo en el trabajo de R. Descartes: *Rules for the Direction of the Mind*.

2) Entrar en materia,
3) Fermentar,
4) Seguir avanzando,
5) Intuir,
6) Mostrarse escéptico, y
7) Contemplar.

En todas estas propuestas, las sugerencias abarcan los niveles de la toma de decisiones ejecutivas y de control, y también las heurísticas. Miguel de Guzmán, tomando como base las heurísticas de Polya, de Mason et all, junto a los estudios de Schoenfeld sobre las actividades de metacognición involucradas en la resolución de problemas, propone en el año 1991 su modelo metodológico para enfrentar problemas. Entregaremos con más detalle esta propuesta:

1) **Familiarizarse con el problema.**
   - Tratar de entender a fondo la situación.
   - Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo.
   - Jugar con la situación planteada, enmarcarla, tratar de determinar el aire del problema, perderle el miedo.

2) **Búsqueda de estrategias.**
   - Empezar por lo fácil.
   - Experimentar.
   - Hacer un esquema, una figura, un diagrama.
   - Escoger un lenguaje adecuado, una anotación apropiada.
   - Buscar un problema semejante.
   - Inducción.
   - Suponer el problema resuelto.

3) **Llevar adelante la estrategia.**
   - Seleccionar y llevar adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la etapa anterior.
   - Actuar con flexibilidad.
   - No desanimarse fácilmente.
   - No insistir demasiado con una idea.
   - Si las cosas se complican demasiado, siempre hay otra vía.
   - ¿Salió?, ¿seguro?
   - Mirar a fondo la solución encontrada.

4) **Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.**
   - Examinar a fondo el camino seguido. ¿Cómo se ha llegado a la solución?. O bien, ¿porqué no se ha llegado?.
   - Tratar de entender no sólo que la cosa funciona, sino porqué funciona.
   - Mirar si se encuentra un camino más simple.

- Mirar hasta donde llega el método.
- Reflexionar sobre tu propio proceso de pensamiento y sacar consecuencias para el futuro.

Sobre las estrategias para enfrentar problemas.

A continuación se presenta un listado de las estrategias que normalmente usamos los profesores de matemática (junto a nuestros estudiantes) cuando intentamos resolver un problema. Como es de suponer, este listado no pretende ser exhaustivo (es imposible que lo sea) ni disjunto.

1. Hacer uso de una o más fórmulas.
2. Hacer uso de uno o más teoremas.
3. Empezar por lo fácil: simplificar o buscar casos particulares (*dividir para conquistar*). Elegir valores especiales para ejemplificar el problema y, a partir de ellos, intentar obtener alguna *sugerencia* para la solución. Incorporar argumentos del tipo *sin perdida de generalidad*, por ejemplo asignar a uno de los datos un valor *cómodo*.
4. Experimentar y buscar regularidades (patrones).
5. Modificar el problema: reformularlo y buscar metas parciales.
6. Prueba y error.
7. Organizar la información: Siempre que sea posible, hacer un esquema, una tabla, una figura, un diagrama.
8. Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
9. Proceder por inducción: considerar casos particulares con la esperanza de identificar (intuir) un patrón o propiedades generales.
10. Analizar posibles simetrías y casos extremos (los casos límites, en general, permiten explorar el rango de posibilidades).
11. Suponer el problema resuelto (trabajar hacia atrás).
12. Proponer un problema semejante, lo más sencillo posible y tratar de resolverlo; luego, proceder a complicarlo hasta llegar al propuesto inicialmente.
13. Verificar la validez de la información contenida en el problema. Si las condiciones del problema no se cumplen, ¿qué pasa?.
14. Observar la incógnita y pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma (o similar) incógnita.
15. Considerar problemas equivalentes:
    a) Reemplazar las condiciones por otras equivalentes.
    b) recombinar los elementos del problema de diferentes maneras.
    c) Introducir elementos auxiliares.
    d) Reformular el problema:
        i) Cambiar la perspectiva o notación.
        ii) Intentar argumentos por contradicción (¿qué pasaría si lo que queremos verificar no se cumple?) o contrapositiva (si queremos comprobar que $A \Rightarrow B$, tratar de verificar que $\sim B \Rightarrow \sim A$).
        iii) Suponiendo que se tiene la solución, determinar sus propiedades.
16. Considerar leves modificaciones que restrinjan el problema:

   a) Elegir objetivos menores que el deseado.
   b) No considerar una o más de las condiciones del problema. Ver a que nos lleva y posteriormente tratar de re-imponerla.
   c) Descomponer el dominio del problema y trabajarlo caso a caso.

17. Considerar leves modificaciones que amplíen el problema:
    a) Construir un problema análogo con menos variables.
    b) Mantener todas las variables, excepto una (supuesta constante o fija) y tratar de determinar el impacto que dicha variable tiene en el problema.
    c) Tratar de usar cualquier problema relacionado que tenga similar:
       i) Forma.
       ii) Datos.
       iii) Conclusiones.

Para finalizar les proponemos, en la sección de problemas de esta Revista, algunos desafíos clásicos y simples, para que ponga en práctica todos los antecedentes y sugerencias que se han comentado sobre la resolución de problemas.

La enseñanza de la matemática debería equilibrar el "aprender para hacer problemas" con el "hacer problemas para aprender"

<u>Bibliografía.</u>

[1] **Antón J.,** *Taller de Matemáticas*, Narcea S.A. Ediciones, España,1994.

[2] **Dewey, J.**, *Democracy and education*. The Macmillan Company, 1916. http://140.211.62.101/dewey/contents.html

[3] **de Guzmán, M.,** *Tendencias Innovadoras en educación matemática*, Ediciones OEA,1993.

[4] **de Guzmán, M.,** *Aventuras matemáticas: una aventura hacia el caos y otros episodios*, Ediciones Pirámide, Madrid.

[5] **Escudero, J.,** *Resolución de problemas.* http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/fra_prob.htm

[6] **García, J.**, *La didáctica de las Matemáticas: una visión general.* Red Telemática Educativa Europea. http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm

[7] **Gates, J.**, (Director ejecutivo), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, 1989.

[8] **González, F.**, *El corazón de la matemática*, Copiher, 1995.

[9] **MacAllister, H.**, *Problem Solving and Learning*. http://www2.hawaii.edu/suremath/learn1.html

[8] **MacPherson, E.**, *Mathematical Problem Solving*, 1994. http://www.mbnet.mb.ca/~map/edmath2.htm

[10] **Polya, G.**, *Cómo resolverlo*, Editorial Trillas, 1970.

[11] **Schoenfeld, A.**, *Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan Publishing Company, 1992.

[12] **Selden, A. Et all.**, *What does it take to be an expert problem solver?*, 1997. http://206.4.57.253/t_and_l/sampler/rs_4.html

[13] **Steen, L.** (editor), *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*, Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1989.