9

La resolución de problemas como objeto de enseñanza y medio para el aprendizaje

María José Céliz
Viviana Andrea Feliziani
María Laura Zingaretti

Resumen

El propósito del siguiente artículo es discutir y reflexionar acerca de la problemática presente en muchas clases de Matemática en torno de la resolución de problemas.

Por diversas razones, la enseñanza de la resolución de problemas se ha reducido, desde hace tiempo, al aprendizaje de procesos rutinarios y de procedimientos algorítmicos que estimulan la mecanización y la memorización sin sentido, minimizando el razonamiento lógico, la búsqueda de soluciones, la crítica y la fundamentación de opiniones.

Colocar la resolución de problemas en el centro, transformarla en el eje alrededor del cual giran las clases debería ser un objetivo deseable, de este modo creemos que los alumnos podrían comprender cómo se construyen los conocimientos en la Matemática, se contribuiría a desarrollar su pensamiento reflexivo y crítico, dando la posibilidad de modificar visiones negativas que poseen algunos alumnos acerca de ésta disciplina.

Problemas: nuestra visión

Nuestra postura respecto de qué es un problema es básicamente la siguiente: creemos que un problema debe presentar una verdadera dificultad, obstáculo para la persona que lo va a resolver y por lo tanto es totalmente subjetivo, esto es que el problema no es independiente del sujeto que lo va a resolver. Esto último es muy importante puesto que los problemas que suelen presentarse en la mayoría de las clases no sólo son problemas-tipo, casi nunca diseñados por los docentes, que poseen preguntas cerradas donde la aplicación de los algoritmos dan las respuestas a los mismos sino que, además no se tiene en cuenta la diversidad de los alumnos con los que se va a trabajar, los diferentes intereses que ellos puedan poseer y que los van a llevar a estar interesados en ciertos problemas y a no estarlo en otros.

Problemas y resolución de problemas: otras visiones

Vamos a presentar algunas visiones sobre problemas o resolución de problemas de algunos autores reconocidos en el campo de la Matemática o la Didáctica de la Matemática, para, posteriormente, discutir sobre las mismas y confrontarlas con nuestra propia concepción.

Para Polya, resolver un problema es una habilidad práctica que se adquiere por imitación. Desde la perspectiva de Fridman, resolver un problema es una actividad intelectual[1], para éste autor, los problemas consisten en alguna "exigencia, requerimiento o pregunta para la cuál se necesita encontrar una respuesta, apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema"[2]. Roland Charnay, por su parte, cree que "sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una situación que hace problema para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibido por éste último como un problema). Hay, entonces una idea de obstáculo a superar."[3]

Nuestra concepción, se acerca mucho más a ésta última acepción que a las de Polya y Fridman. Es necesario aclarar que las perspectivas que poseen estos dos autores están relacionadas con el contexto para el cual trabajan sobre la resolución de problemas: ambos son ma-

[1] Fridman, L. (1985) Metodología para resolver problemas de matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
[2] Fridman, L. Op. cit. Capítulo 1: *Las partes integrantes de un problema*, p. 13.
[3] Charnay, R. (1988) Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, C. & Saiz, I. (Comp). Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidos. Cap III, pp. 51 - 63.

temáticos, piensan en alumnos universitarios interesados específicamente en la Matemática y que, probablemente van a tener que resolver problemas que representen verdaderos obstáculos.

Charnay, posee una mirada más didáctica acerca de qué es un problema debido a que su preocupación reside, básicamente en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemática en el contexto del aula.

Como ya expusimos, los problemas poseen un carácter subjetivo, y por lo tanto, es importante aclarar que no hay una única forma de dar con la solución de los mismos, pueden ser abordados con enfoques diferentes, dependiendo, por ejemplo, de los alumnos a los cuáles están dirigidos. Para aclarar ésta idea vamos a presentar el siguiente problema y lo vamos a abordar desde dos perspectivas diferentes:

Problema I: "Piense un número cualquiera, súmele 5, multiplíquelo por 2, luego réstele 4, divídalo por dos y reste el número que pensó." ¿cuál será el resultado?[4]

Anticipamos que el resultado será siempre 3, independientemente del número elegido. Procederemos a demostrarlo desde dos perspectivas distintas, una analítica (convencional) y otra utilizando figuras, que podría ser trabajada con alumnos más pequeños.

Tabla	*Análisis*
□	n
□◆◆◆◆◆	$n+5$
□□◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆	$2n+10$
□□◆◆◆◆◆◆	$2n+6$
□◆◆◆	$n+3$
◆◆◆	3

Nota: Bajo tabla se presenta una resolución no convencional y se representa por □ al número que se pensó y con el rombito las unidades que se agregan o quitan.

[4] Extraído de Notas de Seminario de Didáctica de la Matemática I. Universidad Nacional de Villa María. Profesora a cargo: Esteley, Cristina.

Otra cuestión que creemos importante aclarar es que pensamos que los problemas que se presentan a los alumnos no deben ser de preguntas cerradas, deberían ser abiertos a investigación e indagación para posibilitar el descubrimiento, dejando siempre en claro que debe existir una instancia de institucionalización realizada por el docente que de cuenta de los contenidos trabajados por el problema presentado.

Resolución de Problemas: Profundización

Históricamente los problemas ocuparon un lugar central en el currículum de Matemática[5], no así su resolución. Generalmente, la resolución de problemas ha sido objeto de aprendizaje y no de enseñanza: profesores evalúan con problemas cuando nunca en sus clases han trabajado algo parecido. Olvidando que no debería evaluarse lo que no se ha trabajado, lo que no se ha enseñado.

Pensamos que la resolución de problemas debe ocupar un lugar central en la enseñanza, la clase debería basarse en resolución de problemas, tal como lo dice el título de éste artículo, los problemas deben ser objeto de enseñanza y así sí pueden ser un medio efectivo para producir aprendizajes.

En este apartado plantearemos un contraste entre Fridman y Polya, ambos han trabajado (como ya se ha expuesto) acerca del tema que nos ocupa y plantearon fases a seguir para resolver un problema. Si bien se ocuparon específicamente de la resolución en el ámbito universitario, podrían trabajarse las mismas con algunas modificaciones en nivel medio.

Por una parte, el modelo que creó Polya tiene como principal preocupación la siguiente pregunta: ¿cómo pensar? De ningún modo él intentó describir la resolución de un problema como un proceso lineal, sin embargo se lo ha trivializado y en muchos libros de texto sus fases aparecen de ésta manera[6]:

---

[5] Extraído de Notas de Seminario de Didáctica de la Matemática I. Universidad Nacional de Villa María. Profesora a cargo: Esteley, Cristina.

[6] Extraído de Notas de Seminario de Didáctica de la Matemática I. Universidad Nacional de Villa María. Profesora a cargo: Esteley, Cristina y del Seminario en Didáctica de la Matemática I, UNVM. Profesora: Mónica Villarreal.

Primera: Comprender el problema	Comprendiendo el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿puede satisfacerse la misma?, etc. Se pueden realizar dibujos auxiliares para que ayuden a la resolución.
Segunda: Encontrar las conexiones entre los datos y las incógnitas	Elaborar un plan: ¿lo había visto antes?, ¿o había visto el problema de una forma diferente? ¿conoce un problema relacionado? Trate de buscar un problema similar al dado. Si no es posible la resolución ¿podría resolver usted, un problema similar más accesible? Mantenga sólo una parte de las condiciones y desconsidere la otra. Cambie datos o incógnitas si lo necesita.
Tercera: Llevar a cabo el plan	Llevar a cabo el plan de resolución, chequear cada paso, ¿ puede ver claramente que el paso está correcto? ¿puede probar que está correcto?
Cuarta: Examinar la solución obtenida	Mirar retrospectivamente: ¿puede chequear el resultado, el argumento? ¿puede obtener el resultado de una forma diferente? ¿puede usar el resultado para otro problema?

Tabla Nº 01: Modelo de Polya para la resolución de problemas

Fridman, en tanto, nos presenta las siguientes etapas:

Primera etapa: Análisis del problema	Entender de qué problema se trata, ¿cuáles son sus condiciones?, ¿en qué consisten sus requerimientos?
Segunda etapa: Escritura esquemática del problema	Utilización de todo tipo de simbolizaciones: signos, literales, dibujos, gráficos, esquemas, etc. Es una forma más esquemática para fijar los resultados de la etapa anterior.
Tercera etapa: Búsqueda de un método de resolución	La búsqueda del plan para resolver un problema constituye la parte central del proceso de resolución. Una recomendación muy importante es que no es posible enseñar a ejecutar la búsqueda del plan de resolución de un problema, sino que es necesario aprender a hacerlo uno mismo.
Cuarta etapa: Aplicación del método de resolución	Un vez encontrado el método se hace necesario aplicarlo para obtener la solución del problema presentado.
Quinta etapa: Prueba de la resolución	Es necesario convencerse de que dicha resolución es correcta y que satisface los requerimientos del problema.
Sexta etapa: Análisis del problema	Se realiza una investigación del problema: se establecen las condiciones bajo las cuáles el problema tiene solución, cuántas son las resoluciones posibles, bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc.
Séptima etapa: Formulación de la respuesta al problema	Una vez convencidos de la exactitud de la solución se debe formular de manera precisa la respuesta al problema.
Octava etapa: Análisis de la resolución del problema	Se realiza un análisis de la solución obtenida con fines cognoscitivos y de aprendizaje y se sacan conclusiones a partir de dicha solución.

Tanto las fases de Polya cuánto las etapas propuestas por Fridman no son modelos lineales, no obstante presentaciones como las que hemos expuesto aquí pueden producir algunas confusiones. Éstos cuadros no están mostrando o no permiten visualizar que la resolución de problemas es verdaderamente, un proceso cíclico y dinámico y generalmente llevan a pensar que para resolver un problema hay que memorizar ciertos pasos y /o procedimientos. La actividad de resolución de problemas debe ser un proceso creativo, significativo, debe servir para que los estudiantes apliquen los conocimientos construidos en nuevas situaciones, esto es, transfieran. No es nuestra intención criticar a estos autores, sí queremos aclarar que se ha hecho mal uso de sus postulados, trataremos de resignificar lo que ellos dicen, mostrando cómo las fases de resolución de problemas se relacionan entre sí, realizaremos una síntesis de ambos autores, ya que consideramos que postulan cuestiones muy similares, sólo que Fridman desglosa en sus fases los problemas, más minuciosamente:

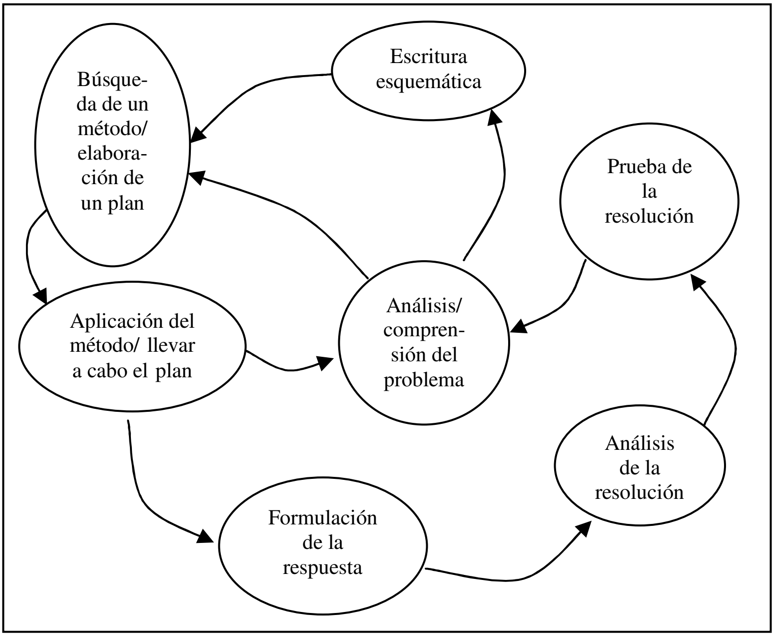


Figura Nº 1. Interrelación de fases en la resolución de un problema.

El esquema de la Figura Nº 1 muestra cómo las fases en la resolución de un problema se inter-relacionan. El análisis es una etapa muy importante y se realiza con anterioridad y con posterioridad a la resolución, lo que permite re- pensar lo que se ha realizado, intentar mejorar el método.

Es muy importante que los docentes conozcan estas etapas pues, de este modo pueden brindar algunas estrategias a los alumnos para que ellos piensen en la resolución de nuevos problemas. Los problemas aportan a las aulas de Matemática la posibilidad de formar allí una pequeña comunidad matemática, ver cómo el error es constitutivo de la creación del conocimiento, de alguna manera tener contacto indirecto con la manera en cómo se construyen los conocimientos en la disciplina, a la vez que son los que otorgan sentido a la Matemática.

Otro aspecto que nos parece muy inportante destacar es que los problemas interesantes no trabajan con un único contenido matemático, sino que se requiere para dar con su resolución un cúmulo importante de conocimientos, esto posibilitaría la integración de los contenidos que generalmente se dan en forma fragmentada y parecen no poseer relación unos con otros.

En el siguiente apartado vamos a trabajar con un problema[7], intentaremos mostrar cómo pensamos el problema a través de las etapas que propone Fridman y cómo puede resolverse de diferentes maneras para trabajarlo de distintos modos.

Un problema con dos abordajes

Una de las diagonales de un trapecio, es perpendicular a sus bases, el ángulo obtuso de la base mayor es de 120º, el lado adyacente a este tiene una longitud de 7 cm., mientras que la base mayor mide 12 cm. Encontrar la longitud de la línea media. [8]

Vamos a analizar el problema presentado, siguiendo algunos de los pasos que propone Fridman para la resolución y propondremos una forma alternativa para tratarlo con alumnos más pequeños.

[7] Extraído de Fridman, L. Op. cit.
[8] Extraído de Fridman, L. Op. cit. Capítulo 1, p. 26.

Análisis del problema:

- Se trata de un trapecio.
- Una de las diagonales es perpendicular a las bases.
- El ángulo obtuso en la base mayor es de 120°.
- El lado no paralelo y adyacente a dicho ángulo mide 7 cm.
- La base mayor mide 12 cm.
- El requerimiento es encontrar la longitud de la línea media del trapecio.

Escritura esquemática del problema:

$\overline{DC} \perp \overline{AC}$

$\overline{AB} \perp \overline{AC}$

$\angle BAD = 120^{o}$

$\overline{AB} \,//\, \overline{\mathrm{DC}}$

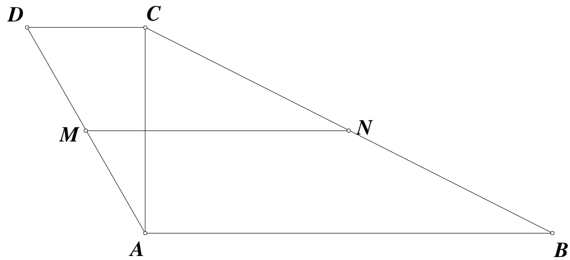
$\overline{\mathrm{AB}} = 12cm.$

$\overline{AD} = 7cm.$

$\overline{AM} = \overline{MD}$

$\overline{CN} = \overline{BN}$

$Encontrar: \overline{MN}$



Búsqueda del método de resolución del problema:

Para resolver este problema, puede apelarse a lo siguiente: *"la base media de un trapecio es igual a la semisuma de las bases de dicho trapecio"*, además vamos a hacer uso de las funciones trigonométricas para obtener datos útiles. Como $\overline{AB}$ es conocida, sólo nos resta conocer $\overline{\mathrm{DC}}$ y aplicar lo antes señalado.

Ahora tenemos otro dato que es muy útil, esto es que $\overline{DC} \perp \overline{AC}$, por lo tanto el triángulo *ACD* es un triángulo rectángulo en *C*.

Conocemos la hipotenusa que es $\overline{DA}=7$ y el ángulo $\angle CAD=\angle BAD-90^{\circ}$ (puesto que también sabemos que la diagonal es perpendicular a la base mayor y que el ángulo BAD es 120º).

Así, $\angle CAD=120^{\circ}-90^{\circ}$. $\angle CAD=30^{\circ}$. Ahora conocemos la hipotenusa y un ángulo (además del ángulo recto) del triángulo rectángulo. Aplicando la regla "sen(30º)= cateto opuesto/ hipotenusa", tenemos que $sen(30^{\circ})=\dfrac{\overline{DC}}{7}$. Despejando *DC*:

$$\overline{DC}=sen(30^{\circ})\times 7\ .\ \overline{DC}=\frac{7}{2}.$$

Ahora conocemos la base mayor y la base menor, y con la información señalada, obtenemos la resolución del problema.

$$\overline{MN}=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)}{2}$$

$$\overline{MN}=\frac{12+\frac{7}{2}}{2}$$

$$\overline{MN}=\frac{31}{4}$$

$$\overline{MN}=7{,}75\ cm.$$

<u>*Prueba de la solución*</u>*:*

Con todos los datos dados y obtenidos vamos a ver la suma de las áreas de los triángulos *ACD* y *CAB* es igual al área del trapecio *ABCD*, si llegamos a una igualdad, podríamos afirmar que la solución hallada es la correcta.

Área del triángulo = (base **.** altura) / 2

Área del trapecio = (base mayor **+** base menor) **.** altura / 2

Necesitamos conocer la altura del trapecio. La misma puede obtenerse haciendo uso de la función trigonométrica del coseno a partir del ángulo de 30º utilizado anteriormente.

La altura es el segmento $\overline{AC}$. Usando el triángulo ACD, tenemos:

$$\overline{AC} = \overline{AD} \times \cos(30^{o})$$

$$\overline{AC} = 7\ cm. \times \cos(30^{o})$$

$$\overline{AC} = 6.06\, cm.$$

Ahora sí podemos obtener las áreas:

$$[ACD] = \frac{\left(\overline{DC} \times \overline{AC}\right)}{2} = \frac{(3{,}5\ cm. \times 6{,}06\ cm.)}{2} = 10{,}61\ cm.^2 \quad \text{(I)}$$

$$[CAB] = \frac{\left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right)}{2} = \frac{(12\ cm. \times 6{,}06\ cm.)}{2} = 36{,}37\ cm.^2 \quad \text{(II)}$$

En consecuencia, de (I) y (II):

$$[ACD] + [CAB] = 10{,}61\, cm.^2 + 36{,}37\ cm.^2$$

$$[ACD] + [CAB] = 46{,}98\ cm.^2$$

La suma de las áreas de los triángulos es 46,98 cm^2 (III)

Área del trapecio *ABCD* es 46,97 cm^2 (IV)

$$[ABCD] = \frac{\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right)}{2} \times \overline{AC} = \frac{(12\, cm. + 3{,}5\ cm.)}{2} \times 6{,}06\, cm. = 46{,}97\ cm.^2$$

De (III) y (IV) vemos que obtenemos la misma área, tanto si usamos la fórmula de áreas de un trapecio como si sumamos las áreas de los triángulos que se están formando por lo que podemos inferir que el resultado obtenido es correcto, ya que para obtener el área del trapecio utilizamos la base media: $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$.

Para probar que la solución es correcta, trabajando en los primeros años del secundario, puede pedirse a todos los estudiantes del curso que construyan el trapecio con las dimensiones dadas y que utilicen algún elemento para medir la base media (podría ser regla), así obtendrían empíricamente la solución, de este modo podemos comenzar a recuperar "alguna experimentación" como una actividad reconocida en el aula de Matemática. En una etapa posterior se puede retomar el mismo problema y buscar las justificaciones para la respuesta empírica.

Sólo falta hacer explícita la respuesta del problema:

Respuesta: La longitud de la línea media del trapecio $ABCD$ es aproximadamente 7,75 cm.

El modelo presentado anteriormente intenta mostrar cómo podría resolverse un problema, realizando un análisis más exhaustivo del mismo, lo cuál daría la posibilidad de trabajar con la resolución de problemas en el aula como un medio para producir aprendizajes de diversos contenidos y mostrar una fuerte conexión entre los mismos.

Reflexiones finales

Consideramos, basándonos en nuestra experiencia reciente como alumnas del nivel medio o los comentarios de compañeros, que la resolución de problemas no es un objetivo en sí mismo en la escuela, y confiamos que este trabajo contribuya a la concientización de tal hecho para que, de éste modo se abran las puertas de algunas aulas a la resolución de problemas y se lo recupere como un objeto necesario del conocimiento matemático o como un eficaz recurso didáctico. Sin embargo, es preciso destacar que la estructura del proceso de resolución depende del carácter del problema y de los conocimientos y habilidades que posee la persona que lo resuelve, resultando muy difícil delimitarlo en etapas aisladas, por lo que destacamos nuevamente el cuadro de la figura I, dónde se muestran las etapas interrelacionadas, como un medio para reflexionar.

Referencias bibliográficas

Charnay, R. (1988) Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, C. & Saiz, I. (Comp). Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidos.

Fridman, L. (1985) Metodología para resolver problemas de matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Notas de Seminario de Didáctica de la Matemática I. (2006). UNVM. Profesora a cargo Esteley, Cristina.