12

Cómo desarrollar clases de Matemática centradas en resolución de problemas

Fredy Enrique González

Resumen

Se examina la dinámica cognitiva y metacognitiva de un grupo de estudiantes de profesorado, participantes de un curso, diseñado para propiciar la actividad intelectual de estos sujetos mediante la búsqueda de la solución de problemas matemáticos con texto planteados por el profesor. La actividad desarrollada permitió derivar un modelo didáctico basado en la resolución de problemas, enfatizando la toma de conciencia, por parte del alumno, de su propio accionar cognitivo durante la actividad resolutoria. A su vez, se logró considerar a la Matemática como una forma especial de pensamiento y al aula de clases como una comunidad matemática donde se llevan a cabo procesos de producción y socialización del conocimiento matemático. El modelo está basado en la utilización de la resolución de problemas en clase, de acuerdo con cuatro modalidades de trabajo (individual, parejas, pequeños grupos, y grupo total) que son descritas y caracterizadas en este trabajo.

Introducción

Investigar acerca de la resolución de problemas parece ser una actividad permanente entre los educadores matemáticos que asumen este asunto como preocupación prioritaria de su quehacer investigativo. Numerosos son los hallazgos relativos a este tema, y al parecer, los problemas y su didáctica serán un tema de investigación siempre vigente en el ámbito de la Educación Matemática como campo para la producción profesional de saberes.

Dos asuntos que resultan particularmente atractivos son: (1) el uso didáctico de la resolución de problemas por parte de los profesores de Matemática; (2) la posibilidad de generar saberes matemáticos mediante la participación en actividades de resolución de problemas matemáticos en el ámbito escolar; con este propósito, el autor llevó a cabo una investigación (González, 1997), de la que se derivó el presente trabajo, el cual tuvo como sujetos a un grupo de *Estudiantes para Profesor* (EPP).

Por el modo como fue desarrollado el proyecto, permitió derivar un modelo didáctico (González, 2003a) intitulado la *Dinámica P^2MA* (Profesor-Problema, Matemática, Alumno), el cual se concibe como una manera diferente de desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática:

(a) basándolo en la resolución de problemas;

(b) enfatizando la toma de conciencia, por parte del alumno, de su propio accionar cognitivo, llevado a cabo durante la actividad resolutoria;

(c) considerando a la Matemática como una forma especial de pensamiento y al aula de clases como una Comunidad Matemática en cuyo contexto se llevan a cabo procesos de producción y socialización del conocimiento matemático; y

(d) desarrollando cuatro modalidades de trabajo que son las que se exponen en este artículo.

Planteamiento del problema

De los problemas se ha dicho que son *"el corazón de la Matemática"* (Halmos, 1980) y, casi cuatro décadas atrás, el célebre matemático George Polya había escrito su hoy clásico texto: *How to Solve it?* (Polya, 1945). Desde entonces – y seguramente desde siempre (Suárez Alemán, 2003) – los problemas y su resolución han marcado el desarrollo de la Historia de la Matemática.

De hecho, varias de las ramas de ésta han nacido, crecido y desarrollado a partir del esfuerzo por resolver algún problema que en un momento dado convocó la atención y el esfuerzo de matemáticos notablemente esclarecidos (véase, por ejemplo, los trabajos de Miguel de

Guzmán (1983, 1996) y la revista en línea *Maticias,* disponible en el web site http://www.nacho.unicauca.edu.co/Maticias/ Mati-cias.htm).

Ahora bien, existe un espacio en donde este asunto cobra particular relevancia; se trata de las instituciones encargadas de la formación de los docentes de Matemática (maestros y profesores) tales como las escuelas normales superiores, los institutos pedagógicos y los departamentos de educación de las universidades[1]. En efecto, quienes allí trabajan son *formadores de formadores;* esto, en el caso específico de los problemas de Matemática, incorpora un elemento adicional, pues ya no se trata sólo de procurar que los alumnos[2] aprendan a resolver problemas sino que, además, ellos deben *aprender a enseñar a aprender a resolver problemas*.

Esta última expresión no es un *galimatías;* al contrario, refiere a una problemática didáctica aún no del todo resuelta, donde algunas de las preguntas de respuesta pendiente son: ¿Cuál es la formación en resolución de problemas que ha de recibir un futuro profesor de Matemática? ¿Cómo debe llevarse a cabo dicha formación? ¿De qué tipo han de ser las experiencias sobre resolución de problemas en las que han de participar los futuros profesores durante su proceso de formación inicial?

En la búsqueda de respuestas a estas y otras cuestiones asociadas, se han generado varias investigaciones: Puig (1996), Callejo (1994), Blanco Nieto (1996) entre otros. El *quid* del asunto parece ser cómo incorporar estrategias para que los EPP aprendan, no sólo a resolver problemas, sino que también aprendan cómo enseñar a otros a resolver problemas. En esta dirección se orientó la investigación de la que se derivó el presente trabajo, cuya metódica se expone a continuación.

Método

En virtud de su naturaleza, orientación disciplinaria, la clase de información recabada, el tratamiento dado a ésta, y la concepción asumida en relación con las unidades de análisis, el diseño del estudio que

[1] Aquí se hace referencia al contexto de los países latinoamericanos.
[2] Quienes son vistos como estudiantes para profesor, EPP, profesores en proceso inicial de formación, *preservice mathematic´s teachers.*

sirvió de base para la elaboración del presente informe de investigación se corresponde con el de un Estudio de Caso Simple de Orientación Etnográfica Interpretativa. Tuvo como escenario una institución superior de formación docente, en una de cuyas aulas se llevó a cabo el trabajo de campo cuyos sujetos (protagonistas) fueron los alumnos participantes en un curso sobre resolución de problemas facilitado por el autor.

Las técnicas e instrumentos aplicados fueron: (a) Observación Participante Activa; (b) Entrevistas; (c) Protocolos Verbales del Alumno; (d) Hojas de trabajo; y (e) Cuaderno de Notas.

El procedimiento para la recaudación de la información de campo consistió en un curso sobre Resolución de Problemas Matemáticos, diseñado, facilitado y evaluado por el propio investigador. En cada uno de los *Encuentros Edumáticos* constitutivos de este curso, el profesor (investigador) presentaba verbalmente o por escrito, el enunciado de uno o varios problemas (de los denominados “verbales” o “de historia”) que tuviesen una alta probabilidad de ser totalmente desconocidos por todos o la mayoría de los alumnos participantes. Se instruía a los alumnos para que (individualmente, en parejas, en pequeños grupos, o en grupo total) abordaran el problema durante un lapso determinado (variable según la dificultad que presentase el problema con el cual se estuviera trabajando). Luego, se pasaba a la realización de una sesión de socialización (plenaria de trabajo en grupo total).

Una vez concluida la "puesta en común" del trabajo realizado, se procedía a proporcionar indicaciones y asignaciones, sobre algún otro problema que sirviera de pretexto para iniciar la próxima clase. La información recabada mediante el uso de diferentes medios, técnicas e instrumentos de recolección, fue sometida a un proceso de análisis cualitativo de contenido, a partir de lo cual se pudieron identificar modalidades de producción de saberes matemáticos propiciadas en el contexto de los Encuentros Edumáticos, centrados en resolución de problemas, que constituyeron el curso.

Referentes conceptuales

Qué significa "Hacer Matemática" en el ámbito escolar

La posibilidad de *"Hacer Matemática"* en el aula de clases utilizando la resolución de problemas, requiere la constitución de un contexto didáctico caracterizado por:

(1) Una concepción de la Matemática que haga énfasis en los procesos propios del pensamiento matemático (González, 2003b);

(2) La creación de oportunidades para la realización de Tareas Intelectualmente Exigentes (González, 1998);

(3) La generación de un clima que propicie la libertad para pensar (Martínez, 2003; Rocerau y Colaboradores, 2002);

(4) La realización de actividades de mediación cognitiva tanto individual como socializada (González, 1995, 1996; Ruiz Bolívar, 1988, 1998);

(5) La construcción de un Repertorio de Herramientas Heurísticas (de Guzmán, 1991; González, 1997; Polya, 1975; Schoenfeld, 1985a, 1985b, 1992);

(6)La adopción de un Modelo Representativo del proceso de resolución de problemas (Polya, 1975).

Modelo representativo del proceso de resolución de problemas

En relación con la representación del proceso de resolución de problemas se han diseñado diversos modelos, entre éstos y para los efectos de este estudio, asumiéndose la proposición elaborada por Polya (1975). Esta selección se hizo sobre la base de la sencillez estructural y popularidad de este modelo y porque el mismo fue utilizado sólo como un esquema para viabilizar el manejo de un vocabulario común entre los alumnos participantes en la investigación. En la versión extensa de este trabajo se ofrecen pormenores del uso que se le dio a este modelo en el contexto de la investigación aquí reportada.

La resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor

Si se adopta el enfoque de Procesamiento de Información para interpretar la actividad cognitiva que una persona despliega cuando resuelve un problema (Wittrock, 1986), y además se concibe a la Matemática como una modalidad específica del pensamiento humano, entonces, se puede presumir la existencia de vínculos entre la actividad matemática y la cognición durante la resolución de problemas matemáticos.

La premisa sustantiva de este estudio es que los problemas y su resolución resultan un medio adecuado para hacer Matemática en el aula de clases. Para ello, es adecuado asumir un modelo representativo de la actividad resolutoria, entendida ésta como la ejercitación de procesos cognitivos y metacognitivos, concurrentemente y a posteriori de la actividad resolutoria.

De esta manera, asumiendo a la Matemática como un modo especial de pensamiento, resulta viable incorporar la perspectiva del resolutor en los procesos de formación inicial de profesores de Matemática que estén sustentados sobre la base de la formulación, planteamiento y resolución de problemas.

Modalidades de trabajo en clases de Matemática centradas en la resolución de problemas

El modelo didáctico originado en la investigación que dio lugar al estudio aquí reportado, se basa sobre la resolución de problemas realizada conforme a cuatro modalidades diferentes pero complementarias: resolución de problemas individualmente, en parejas, en pequeño grupo y en grupo total. A continuación se expondrá detalladamente cada una de ellas.

Trabajo individual

Esta modalidad corresponde al caso en el cual, todos los alumnos, cada uno trabajando por separado, se enfrentan a un mismo problema, procurando estar atentos a la actividad mental generada por el esfuerzo personal que realizan al intentar resolverlo, de modo que puedan hacerse conscientes de su propia dinámica cognitiva; es decir, de los procesos de pensamiento que desarrollan cuando llevan a cabo la actividad resolutoria. El abordaje individual de un problema es una experiencia idiosincrásica; es decir, cada alumno se enfrenta al problema desde su propia perspectiva; es así como, la representación de la situación problemática que cada sujeto construye tiene carácter personal.

Igualmente son personales tanto las trayectorias que el alumno traza y/o recorre desde el Estado Inicial hacia el Estado Meta o Solución, como las emociones, sentimientos y demás circunstancias afectivas que se generan en él cuando intenta resolver algún problema. A continuación se muestra un ejemplo.

> *Primeramente leí tres veces el enunciado del problema y lo asocié con un problema que había resuelto anteriormente. Leí nuevamente para ver qué era lo que tenía y qué me pedían; pensé que no debía dejarme influenciar por las dificultades que se me habían presentado en la resolución de otro problema y me dije a mi mismo: tengo que hacer el problema y encontrar la solución.*
>
> *Me quedó claro que tenía que trabajar con ecuaciones; se me ocurrió... El único plan que yo veía era a través de las ecuaciones y me dispuse a sacar los datos...*
> *A = edad de José   B = edad de Juan   C = edad de julio*
> *A + B + C = 17 años y 6 meses*
> *D = bolsa de ciruelas = 770 ciruelas*
> *No encontraba como hacer las otras ecuaciones. Pensé nuevamente en el anterior y leí nuevamente el enunciado para ver si me ayudaba en algo pero no lograba descifrar la relación. Pensé nuevamente en ecuaciones, es decir, en las variables que me involucraban todo esto; y se me ocurrió escribir que entre los tres recibirían 770 ciruelas...*
> *No puede ser, José no pudo tomar 11 ciruelas y en total eran 770; es algo absurdo.*
> *Vuelvo a leer el problema. Lo que necesito es la relación entre las ecuaciones. Me parece muy difícil, tengo que pensar muy bien cuáles deben ser las verdadera ecuaciones* (Cristóbal)

Se tiene entonces que la búsqueda individual de solución a un mismo problema, por parte de varias personas, aporta a cada una de éstas una perspectiva particular de la situación. Sobre la base de estas vivencias, experienciadas idiosincrásicamente por cada participante al enfrentarse con problemas específicos, se puede proceder a la *elaboración teórica de conceptos*, propiciando intercambios comunicativos cuyo contenido inicial hace referencia a la experiencia personal vivenciada por cada sujeto.

Para lograr lo anterior, se les insta a que mientras están trabajando con el problema, anoten, escriban, "todo lo que pasa por su mente"; de este modo se obtiene un registro de la actividad mental contentivo de expresiones escritas relacionadas con: (a) planes elaborados para atacar el problema, (b) procedimientos utilizados para verificar la solución encontrada, y (c) cálculos derivados de las diferentes operaciones matemáticas implementadas. Además de lo anterior, también se les solicita que efectúen anotaciones relativas a los pensamientos, emociones y otros aspectos afectivos que se suscitan "mientras están enfrascados en el problema".

Estos testimonios escritos, donde los alumnos tratan de detallar todo lo que piensan cuando intentan resolver algún problema, son un elemento clave para examinar, a posteriori, su pericia como resolutores; por ello, se debe brindar el máximo de oportunidades posibles para que los alumnos pongan en práctica el registro de su actividad cognitiva personal:

> *Tuvimos todo un mes de ensayos realizando problemas individuales, no me acostumbraba a la idea de transcribir mis pensamientos en el problema pero, poco a poco, fui aumentado mi habilidad para hacerlo* (Erlinda, Resumen del Curso).

Algunas de las herramientas heurísticas que coadyuvan a la toma de conciencia acerca de la actividad cognitiva personal y su consiguiente registro son las siguientes:

1. *Hablar con el Problema*: esta es una heurística sugerida para iniciar el abordaje de un problema; consiste en establecer un "diálogo" con el enunciado, en el cual se toma en cuenta que los problemas "responden" cuando se le formulan preguntas tales como las siguientes: *¿qué me das? ¿qué me pides? ¿qué es lo que debo encontrar?* Estas interrogantes pueden ser respondidas satisfactoriamente a partir de la lectura reiterada del enunciado del problema tantas veces como sea necesario.

2. *Autointerrogatorio*: este un procedimiento para orientar la Reflexión Concurrente durante el proceso de resolución.

Mientras se está resolviendo un problema, uno debe preguntarse: ¿qué estoy haciendo? ¿para qué lo estoy haciendo? ¿adónde me lleva lo que estoy haciendo?) (José Gregorio).

> *¿Cómo es posible darse cuenta, de manera consciente, que en un momento en que se está resolviendo un problema se está dando simultáneamente al proceso cognitivo el proceso metacognitivo? Respuesta: autoformulándonos preguntas que nos hagan darnos cuenta de estos procesos: ¿Cómo, para qué, hacia dónde voy? ¿Cómo está funcionado el plan seguido? ¿Estoy tardando demasiado en resolver el problema? ¿qué conocimientos poseo que me pueden ser útiles para resolver el problema? ¿Domino correctamente este conocimiento o tengo dudas al usarlo?* (Víctor)

Además de lo anterior, con la ayuda del docente, el alumno en su condición de resolutor individual de problemas, puede darse cuenta de las exigencias cognitivas del proceso, lo cual se vincula con la adquisición de una conciencia metacognitiva.

> *Mis impresiones acerca del proceso que seguí para tratar de encontrarle una solución a este problema son las siguientes: Es necesario mantener una conducta de autocontrol de las acciones realizados para constatar o advertir cualquier irregularidad durante el desarrollo de resolución; es necesario observar detallada y concienzudamente los pasos efectuados y preguntarse a sí mismo ¿Qué se esta haciendo? ¿Por qué? y ¿Para qué? Estas preguntas pueden servir como indicadores y alertas, para detectar algún aspecto contraproducente durante la resolución del problema. Hay que oír las voces internas; las cuales constituyen indicios de meta-cognición en evolución y crecimiento. En general he aprendido sobre la necesidad de considerar en toda su extensión, la eminente importancia de los procesos meta-cognitivos en la resolución de problemas.* (Edgar, Clase Nº. 25)

Entre los rasgos de naturaleza metacognitiva que se pueden resaltar, están los siguientes:

1. *La conversión de la actividad resolutoria propia en objeto de reflexión,* en este caso la reflexión se realiza concurrentemente con la ejecución de la actividad resolutoria.
2. *El resolutor monitorea y regula su propio accionar cognitivo* mediante un procedimiento de auto-interrogatorio.

3. *Se reconoce la importancia y se aprecian los otros procesos que acompañan a la actividad de procesamiento de información propia de la resolución de problemas.*

Trabajo en parejas

Esta modalidad se genera cuando dos alumnos, en cooperación mutua, se abocan a la resolución de un mismo problema. En este caso, los intercambios comunicativos orales que se producen se van registrando por escrito, incluyéndose las operaciones matemáticas efectuadas así como también todas las incidencias propias del proceso referidas a la reflexión que ambos miembros de la pareja realizan acerca de las actividades que están llevando a cabo en búsqueda de la solución del problema que tratan de resolver.

El trabajo en Parejas constituye *"... muy buena idea ya que como se dice, dos mentes piensan más que una"* (Erlinda) y consiste en *"...revisar el trabajo o proceso de resolución de problemas pero entre dos"* (Víctor). En este caso: *"... se trabaja resolviendo un problema entre dos, y se lleva un registro secuencial. Para lograr un mejor registro se procede a usar grabadores, verbalizando todo lo que se piensa"* (Víctor).

Cuando uno de los miembros de la pareja habla mientras el otro se queda callado, el hablante hace las veces de "yo interno" de su compañero diciéndole, en voz alta, cuestiones tales como: "no te calles, qué piensas, dilo, qué tiempo llevas trabajando el problema" (Cristóbal, Resumen final del Curso).

Con esto se estimula la toma de conciencia por parte del oyente en cuanto a las peculiaridades de su propia actividad resolutoria.

A continuación se expondrán dos casos específicos de trabajo en parejas; se trata de los problemas intitulados "Confusión" y "Relojes de Arena"

Ejemplo Nº 1: El Problema "Confusión": Cuando mi sobrina nació yo tenía 10 años, hoy tengo el doble de la edad que ella tenía cuando mi edad era igual a la que ella tiene ahora. Cuando llegue a mi edad actual, yo estaré con medio siglo. ¿Qué edades tenemos mi sobrina y yo?

Clasificación del Problema: "Confusión" es un problema de los denominados de "traducción simple" o "compleja", éstos…

> (…) son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática. En el enunciado aparece toda la información necesaria para la resolución del mismo, y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir; el método de solución se reduce a interpretar correctamente el problema; es decir, a elegir el algoritmo adecuado. Su propósito es reforzar la comprensión de los alumnos y conseguir que éstos sean capaces de traducir situaciones del mundo real a expresiones matemáticas (Blanco Nieto, 1993; p. 52)

El trabajo de resolución de este tipo de problemas implica:

- Interpretar las situaciones a las que se refiere el enunciado, y reconocer las relaciones que se pueden establecer entre las magnitudes que son identificables en ellas.
- Traducir a enunciados simbólicos o ecuaciones numéricas, las relaciones reconocidas entre las magnitudes referidas en el enunciado.
- Resolver esas ecuaciones sucesivas aplicando las técnicas del cálculo numérico.

Ejemplo Nº 2: El Problema "Relojes de Arena": En la partida de un rally de velocidad, parten carros cada 15 minutos, y el reloj superelectrónico del director de pruebas se dañó. Un burlón aparece con dos relojes de arena de siete y once minutos, ¿será posible marcar con ellos intervalos de 15 minutos?

Clasificación del Problema "Relojes de Arena". Según Blanco Nieto (1993), este es un problema de procesos, porque en el enunciado no aparece explicitada…

> (…) la forma de cálculo, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución (…) no aparece una estructura clara en el enunciado que posibilite la traducción fácil a una expresión matemática. Esto posibilita diferentes formas de abordar el problema ya que al no disponer fácilmente de un algoritmo que lo resuelva, obliga al alumno a pensar sobre el mismo y buscar una estrategia de solución (p. 54).

Algunas estrategias para solucionar este tipo de problemas son:

1. Simular una situación real,
2. Ensayo sistemático y formulación de un modelo general que incluya como caso particular el enunciado del problema dado, y
3. Utilizar diagramas o alguna otra representación gráfica que facilite la tarea.

Las dificultades asociadas con este tipo de problemas tienen que ver con: las limitaciones para hacer representaciones gráficas y para establecer procesos de generalización; no obstante, permiten incentivar la imaginación y la creatividad y buscar caminos nuevos que lleven a la solución.

Trabajo en pequeños grupos

Esta modalidad se presenta cuando 3, 4 ó 5 alumnos se dedican a resolver, entre todos ellos, un mismo problema; en este caso, el Pequeño Grupo constituye una microcomunidad matemática en cuyo seno se llevan a cabo acciones tales como las que se mencionan a continuación:

1. Intercambio de opiniones.
2. Proposición de ideas diversas para resolver los problemas planteados.
3. Activación de procesos, tanto del pensar matemático (trabajar con propiedades y establecer relaciones con una definición), como cognitivos (visualizar).
4. Evaluación de planes de ataque propios y de sus compañeros.
5. Revisión retrospectiva de planes ejecutados y de procesos de resolución desarrollados.
6. Reflexión autocrítica en torno a su propio accionar como resolvedores de un problema en particular.
7. Identificación de contradicciones con esquemas habituales de pensamiento.

Etapas del Trabajo en Pequeños Grupos: Cuando los alumnos constituyen grupos pequeños (no más de cinco integrantes) para trabajar cooperativamente en la resolución de problemas matemáticos, son perceptibles las siguientes cuatro (4) etapas: Familiarización; Evaluación de Planes; Ejecución; y, Revisión. A continuación se detallan los pormenores de cada una de ellas.

Etapa I: Familiarización

Durante esta etapa se producen los primeros contactos con el enunciado del problema los cuales tienen como propósito identificar las relaciones que corresponden al Modelo Matemático Subyacente (MMS). Con estas acciones, los integrantes del pequeño grupo procuran formarse una idea global en torno al problema (condiciones iniciales, exigencias, conocimientos matemáticos requeridos, cursos de acción posibles, apreciación subjetiva acerca de la dificultad del problema, etc.); este esfuerzo por familiarizarse con el problema, subjetivarlo, apropiarse de él, puede lograrse a través del desarrollo de una *lluvia de ideas*; es decir, una interacción donde cada participante del grupo tiene la oportunidad de expresar libremente, sin censura alguna, todas las ideas que se le ocurran en relación con el problema, aun aquellas que puedan parecer descabelladas.

Lluvia de ideas: *"desde un principio se argumentaron* (consideraron) *varias ideas o estrategias orientadas a resolver el problema pero sin un horizonte definido"* Esta acción propicia un Intercambio de opiniones en torno al enunciado; cada miembro del grupo expresa su punto de vista en cuanto a cómo interpreta las expresiones constitutivas del enunciado y qué plan propone para intentar resolver el problema.

Sin embargo se debe tener cuidado (Conciencia de los aspectos a tener en cuenta cuando se resuelven problemas en pequeños grupos) de no desechar inmediatamente una vía de resolución sin antes evaluarla en toda su extensión.

Etapa II: Evaluación de planes

Durante la etapa de Familiarización, se espera que surjan varias opciones que se traducen en planes para enfrentar al problema; cada uno de estos planes se estudia y evalúa colectivamente; igual que en la etapa de familiarización, aquí debe haber plena libertad para pensar.

Plan 1: *"Particularmente asomé la idea de trabajar con las propiedades de los logaritmos* (Plan 1) <u>*para tratar de visualizar*</u> *una mayor información en cuanto a la estructura del problema y establecer las relaciones con respecto a la definición de progresión aritmética"* (Conciencia del propósito, el "para qué" sirve de regulador y control de la actividad).

> *Evaluación del Plan 1*: *"Admito que la idea anterior también carecía de rumbo fijo, pero* (había la expectativa) *de que a la larga podía revelar alguna pista más significativa para orientar una vía de resolución efectiva"* (El propio resolvedor tiene oportunidad de evaluar y criticar el plan que él mismo propone).

Plan 2: *"En medio de la disertación Víctor (otro compañero) asomó la idea de* <u>*expresar los logaritmos en una misma base, para luego aplicar propiedades inherentes a los mismos*</u>*"* (Plan 2)

> *Evaluación del Plan 2*: *"Esta idea no se concretó en su oportunidad* (es decir, no se la consideró totalmente y por tanto no se puso en práctica). *Sin embargo, después de realizar el proceso de resolución, nos dimos cuenta de la trascendencia de dicho comentario para resolver la situación planteada."* La visión retrospectiva del proceso, permite darse cuenta de debilidades y fortalezas, y reconocer cuál es la información o el aspecto clave que permitió enrumbarse hacia la solución del problema. En este caso hay la conciencia de que un plan, descartado al principio, al final puede ser revalorizado.

Plan 3: *"Tanto Víctor como Gustavo* (otros compañeros)*, propusieron* <u>*trabajar con la tesis*</u> (Plan 3) *es decir aplicar logaritmos a* x^{18}, y^{21}, z^{28} *y luego indagar algún comportamiento especial"*

> *Evaluación del Plan 3*: *"Al principio no compartí esa vía, porque no me parecía familiar con mi esquema habitual de razonamiento* (Conocimiento acerca de su propio proceso de pensamiento/ Metacognición). *Hubiera sido interesante partir de manera lineal desde la hipótesis hasta llegar a la tesis"*. Esta es la típica modalidad de abordar la resolución de un problema como si fuera la demostración de un teorema.

Plan 4: *"En últimas instancias predominó la estrategia (plan) sugerida por Gustavo, la cual consistió en expresar relaciones entre la razón r y las diversas variables involucradas (x,y,z)* (Plan 4). *Sin embargo, a pesar de concretarse varias igualdades alusivas* (es decir, de ensayarse, ejecutarse el plan -lo dicho por Gustavo-)*; no se logró dar con la solución esperada* (hacer la demostración)*"*.

> *Evaluación del Plan 4*: Es posible que este último plan no esté mal desde un punto de vista algebraico, sólo que no se consiguen los objetivos propuestos (no se llega a la demostración).

- *Etapa III: Ejecución*

Una vez que se ha logrado construir el MMS y discutido y evaluado los posibles planes de ataque, y se ha puesto en marcha alguno de ellos, se entra plenamente en la fase de ejecución, durante la cual los resolutores ejercen su accionar cognitivo, activando procesos propios del quehacer matemático que resultan aplicables al problema.

Es conveniente señalar que es probable que el plan que se esté ejecutando no conduzca a la solución. Por el contrario, se puede estar muy "ocupado con el problema" sin hacer avance alguno. En este caso se debe evitar caer en círculos viciosos así como también identificar y superar los atascos y las "trancas". Una de las opciones para lograr esto consiste en poner en duda la veracidad del enunciado, por lo cual, se debe volver a la etapa anterior realizando una relectura del planteamiento mismo del problema.

- *Etapa IV: Revisión*

Aún cuando se haya obtenido algún resultado que, posiblemente, constituya una solución del problema, resulta provechoso y conveniente realizar una visión retrospectiva de todo el trabajo realizado; ello permitirá que se tome conciencia de la dinámica del proceso, así como también, darse cuenta de posibles *círculos* viciosos, en los que haya podido incurrir.

"Haciendo una visualización general del proceso seguido, pienso que se exploraron las posibles vías de resolución (se ensayaron varios planes) *sin el resultado esperado, pero es importante destacar la*

naturaleza (tipo) *del problema* (no se logró hacer la demostración, quizás debido a la dificultad del problema)*, es evidente* (que la complejidad del problema crea) *la necesidad de articular la parte cognitiva y metacognitiva en el individuo para detectar alguna pista que resuelva la situación."*

Aspectos Sociales de la Resolución de Problemas Trabajando en Pequeños Grupos: En la resolución de problemas trabajando en pequeños grupos, son apreciables los siguientes aspectos sociales: *Comunicación, Cooperación, Control*. Conviene destacarlos con el fin de aprovechar al máximo las posibilidades de este modo de organizar la actividad didáctica en el marco de una clase de Matemática centrada en la búsqueda de solución a problemas.

1. Efecto de la Comunicación Grupal sobre cada individuo: en el grupo se crea un clima cooperativo de trabajo que permite que cada uno de los integrantes incremente su acervo de herramientas para abordar el problema, con base en la información aportada por sus compañeros.

   Es importante destacar que la comunicación grupal puede enriquecer el contexto de ideas y conceptos que sobre el problema se tiene, es decir amplía el margen de acción en cuanto a la instrumentación de estrategias convenientes y razonables. Esta pluralidad de ideas y opiniones es positiva porque ofrece una variedad de posibles vías de resolución.

2. Clima Cooperativo: cuando se trabaja en un pequeño grupo, se genera un clima que hace posible el respeto de las ideas ajenas y la evaluación de las mismas en función del propósito compartido de encontrar la solución al problema. Además, el grupo acumula un acervo colectivo de saberes que puede ser aplicado al proceso de resolución.

   Desde luego que la interacción grupal es otro factor que promueve la expansión de ideas, planes y estrategias variadas. El conocimiento de fórmulas y herramientas matemáticas puede determinar el grado de fluidez en la resolución de problemas (Edgar). Otro de los aspectos relevantes es que cada uno de los miembros del grupo se convierte en mediador del aprendizaje de sus compañeros.

a) Sugiriendo planes para abordar el problema: *Tanto Elvira como Víctor habían sugerido de manera inicial* (1^{er} plan de ataque) *el análisis del problema a través de los citados ensayos* (información clave aportada en el enunciado del problema).

b) Colaborando en la construcción del Modelo Matemático Subyacente: *Luego de realizar los particulares análisis* (es decir, después de ejecutar el plan) *se llegó a la conclusión* (se observó la siguiente regularidad) *de que se establecía una estrecha relación entre el número de recorridos y la cantidad de distancia transitada en el proceso. Se llegó a inducir la fórmula matemática que determinaba el comportamiento inmerso en el problema* (es decir, se hizo la formalización matemática, se expresó el modelo matemático subyacente en el enunciado del problema).

c) Participando en la realización de las operaciones de cálculo pertinentes: *...y luego que se calculó la distancia total recorrida, mediante un simple despeje...*

3. Control de la impulsividad: la disminución de la propensión a actuar irreflexivamente es otra de las cuestiones que se puede lograr cuando se trabaja en pequeños grupos: La proposición de planes de acción debe ser el producto de una reflexión impregnada de los diversos elementos meta-cognitivos que interaccionan con el problema en sí.

Factores que contribuyen al éxito en la Resolución de Problemas cuando se Trabaja en Pequeños Grupos: Entre los factores que contribuyen al éxito en la solución de problemas cuando se trabaja en pequeños grupos se pueden mencionar los siguientes:

1. El grupo, como equipo, posee un conocimiento acumulado que puede ser compartido cooperativamente por cada uno de los miembros individuales; esto refuerza el valor didáctico del trabajo colectivo: *"En el grupo teníamos* (los siguientes) *conoci-*

mientos (matemáticos que se requerían para hallar la solución) *progresiones y operaciones con términos de una progresión".*

2. Al trabajar en forma colectiva, se brinda la posibilidad de compartir distintas opciones y modalidades para abordar el problema, lo cual permite la superación de esquemas rígidos y bloqueos mentales, ya que se valorizan los distintos modos de enfrentar los problemas. Otro factor que ayudó a "desglosar la situación planteada" fueron las herramientas heurísticas que se aplicaron: "diagramación o traducción gráfica del enunciado del problema", "abordar casos particulares" de manera concreta y objetiva. Esto es una manifestación de la superación del enfoque algebrizante, y plantea la valorización de otros modos de abordar los problemas distinto al planteamiento de ecuaciones algebraicas.

3. El trabajo grupal genera una fuerza supraindividual apoyada en el conocimiento compartido: *"Desde luego que la interacción grupal es otro factor que promueve la expansión de ideas, planes y estrategias variadas".*

4. Al compartir la información matemática que posee cada uno de los integrantes del grupo, se compensan las debilidades y deficiencias de cada integrante con las fortalezas de los otros compañeros: *"El conocimiento de fórmulas y herramientas matemáticas puede determinar el grado de fluidez en la resolución de problemas"* .

Trabajo en grupo total

Esta modalidad se presenta cuando todos los alumnos, con la mediación del profesor, se abocan a la búsqueda de la solución de un mismo problema. Todos los participantes (alumnos y profesor) se ubican de un modo tal que sus asientos estén organizados en forma circular y tengan la posibilidad de mirarse unos a otros; el docente, en su rol de facilitador, conduce una Discusión Dirigida y utiliza el Interrogatorio Guiado a fin de ir recorriendo las diferentes etapas del proceso de resolución del problema.

Etapas de Desarrollo: La resolución de problemas de acuerdo con la modalidad de "grupo total" se organiza en las siguientes etapas: 1.

Formulación del problema; 2. Lectura del Enunciado; 3: Mediación de la Comprensión; 4. Ejecución de Plan de Ataque.

A continuación se presentan detalles de cada una de estas etapas.

- Etapa 1: *Formulación del Problema*

El Trabajo en Grupo Total comienza con la selección del problema que se intentará resolver; su enunciado puede ser formulado por el profesor o por uno cualquiera de los alumnos. Una vez que se haya seleccionado el problema, se giran las correspondientes instrucciones para el trabajo. Entre éstas se destacan las siguientes: (a) cada alumno tiene derecho a opinar libremente en relación con su perspectiva acerca del problema; (b) no se debe descalificar a priori ninguna idea acerca de la posible solución del problema.

Esta modalidad de trabajo se ilustrará con el problema cuyo enunciado es el siguiente:

Considere los siguientes números: 234234, 123123, 777777, 518518. ¿Qué se puede decir de los números indicados? Enuncie y demuestre una propiedad que, en general, cumplan todos los números de la forma ABCABC, donde A, B y C son dígitos entre 1 y 9.

En este enunciado aparecen varios números que comparten una propiedad, el asunto consiste en descubrirla, formular una conjetura en torno a ella y luego demostrar dicha conjetura. Se estima que la búsqueda de la solución de este problema requiere la activación de procesos propios del quehacer matemático, tales como: analizar, particularizar, inferir, conjeturar, verificar y demostrar, entre otros.

- Etapa 2: *Lectura del Enunciado del Problema*

El soporte físico del problema considerado es un planteamiento formulado por escrito (enunciado escrito en lenguaje natural -idioma castellano). Por tanto, la primera acción que debe hacer quien intente encontrarle solución es leer dicho enunciado, lo cual supone que el potencial resolutor debe llevar a cabo una actividad decodificadora de procesamiento de información (Todos los alumnos deben hacer individualmente una lectura silenciosa del enunciado)

Así que el contacto inicial con problemas de este tipo se hace mediante una lectura de su enunciado, el cual no constituye una entidad monolítica. Por el contrario, en su estructura son perceptibles dos niveles: Superficial y Profundo (González, 1997; Stacey y Scott, 2000)

> *"En cualquier problema siempre existe lo explícito* (aparente) *y lo implícito* (profundo). *Un problema jamás se podrá resolver en tanto no sea captada su profundidad. Cuando no se comprende profundamente el problema ocurre, comúnmente, que se le agrega o se le elimina información y entonces el problema es cambiado"* (Víctor, Clase Nº 4).

El primer nivel es explícito, se le denomina *Estructura Superficial del Problema* y está conformada por los párrafos contentivos de las expresiones, oraciones o frases constitutivas del enunciado; el otro nivel está implícito, se le designa como *Estructura Profunda del Problema* y está constituida por las relaciones entre los elementos del enunciado que son expresables matemáticamente.

A la primera de esas dos estructuras se tiene acceso mediante una lectura conciente del enunciado, cuya intencionalidad es hacer explícita la Estructura Profunda del Problema. Esto significa que la lectura que se hace con la finalidad de tratar de resolver este tipo de problemas matemáticos, tiene la intención de buscar y captar el sentido y significado matemático de las relaciones expresadas en el enunciado, las cuales constituyen su Modelo Matemático Subyacente (MMS). Por esta razón, es necesario que el resolutor de un problema matemático con texto esté conciente de que, cuando lee su enunciado, lo que está procurando con ello es *acceder a su estructura profunda y, en consecuencia, establecer su MMS correspondiente*.

> *Cuando una persona lee el enunciado de un problema con la intención de solucionarlo, se activa toda su maquinaria intelectual como resolvedor, procurando capturar la estructura profunda del problema y llevando a cabo acciones en función de resolverlo* (Víctor, Clase Nº 6)

Esta etapa del trabajo con el problema constituye una Fase de Familiarización durante la cual la intervención mediadora del docente se manifiesta mediante la formulación de algunas preguntas tales como *¿Qué están haciendo?* y *¿Cómo lo están haciendo?* y luego dejar que los alumnos continúen leyendo atenta y concientemente el enunciado del problema, trabajando con suficiente autonomía, tanto individual como grupal.

Etapa 3: *Mediación de la Comprensión del Problema*

Tomando en cuenta que comprender un problema consiste en formular su Modelo Matemático Subyacente. Es decir, explicitar su Estructura Profunda, después que los alumnos han tenido tiempo suficiente para leer el enunciado, el docente enfatiza su rol como mediador y, usando la Discusión Guiada y el Interrogatorio Dirigido, procura que los alumnos identifiquen los vínculos matemáticos implícitos entre los diferentes elementos referidos en el enunciado:

> *Luego de pasar cierto tiempo, el profesor comenzó a preguntar lo que había respondido cada alumno; cada quién comenzó a decir lo que pensaba de la formación de esos números...* (Cristóbal, Clase Nº 3).

Se puede comenzar formulando preguntas de tipo genérico, relacionadas con el modo de abordar el problema, que hagan posible que varios alumnos compartan con el resto de sus compañeros lo que cada uno de ellos observó durante el período de lectura silenciosa individual. Esto permite conocer diversas formas de enfocar el problema y, a la vez, identificar posibles dificultades confrontadas por los alumnos.

Luego, se continúa la discusión insistiendo en que antes de proceder a efectuar los cálculos, debe pensarse en al menos dos modos para abordar el problema. Durante esta etapa se estimula a los alumnos para que, de manera libre, espontánea y sin restricciones, expongan sus ideas, las que sean positivas se alientan; sin embargo, no se descarta ni se descalifica a priori ninguna de ellas, aún cuando luzca descabellada; al contrario, todas deben ser escuchadas atentamente y ser sometidas a la consideración y evaluación por parte del grupo.

> C. Uno comenzó por allá diciendo "traté de hacerlo pero en realidad no sabía por donde empezar";
>
> C. Otro dijo "yo creo que ese número expresado de esa forma debe ser divisible por algún número".
>
> F. Tiene la idea, por ahí va.
>
> C. Otro dijo: "y si descomponemos esos números en sus factores primos"
>
> F. Buena idea.
>
> (Cristóbal, Clase Nº 3)

Después de plantear varias opciones, éstas deben ser evaluadas; para ello se sugiere que el resolutor se auto-interrogue formulándose, entre otras, preguntas tales como: ¿Qué operaciones debo ejecutar? ¿Cuál es mi grado de pericia en cuanto a su ejecución? ¿Cuánto tiempo requiero para ejecutarlas? ¿De qué clase son? Todo ello con el fin de lograr que los alumnos tomen conciencia acerca de la cantidad y calidad de las operaciones que deben efectuar así como también de la pericia que ellos poseen para llevarlas a cabo.

Siempre que sea posible, se deben escoger varios modos de abordaje (planes de ataque) para ensayar todos aquellos que luzcan plausibles. Cuando se tengan dos o más planes, el grupo total se subdivide en sendos subgrupos y a cada uno de éstos se le asigna uno de los planes.

No obstante, lo que habitualmente ocurre es que, con las intervenciones de los alumnos, se obtienen diversas ideas para "atacar" el problema, y a partir de ellas se elabora un "Plan de Ataque", el cual se construye sobre la base de las aportaciones de los estudiantes y, de hecho, se convierte en un plan compartido para enfrentar el problema.

> Así transcurrieron varios minutos y Fredy nos dijo:
>
> F. ¿y por qué no hacen lo que dijo la compañera? descompongan los números en sus factores primos, y a su vez traten de buscar otros números con la misma forma y descompónganlos para ver qué sucede, pero tomando en consideración que el mayor número de esa forma es 999999.
>
> (Cristóbal, Clase Nº 3)

Etapa 4: *Ejecución de Plan de Ataque*

Una vez que se ha construido en forma colectiva un plan de ataque se procede a ponerlo en práctica.

> F. Empiecen
>
> C. Cada quién copió un número diferente y empezó a descomponerlo. "Se identifican factores primos y se halló M.C.D."
>
> (Cristóbal, Clase Nº 3)

Con este trabajo, se aspira que cada uno de los alumnos tenga la oportunidad de encontrar las relaciones matemáticas que constituyen el MMS correspondiente al problema.

C. (...) Luego de todo esto, se formuló la primera conjetura: todo número que tiene la forma ABCABC es divisible por 11.

F. Bueno, ¿no habrá otra forma de enunciarla?

C. La mayoría dijo que sí. El mismo profesor escribió en el pizarrón. Todo número de la forma ABCABC, con A, B, C $\in S_{10}$ es divisible por 11.

(Cristóbal, Clase Nº 3)

La mediación por parte del docente ha de orientarse hacia la construcción del MMS. Para ello, el interrogatorio puede ser dirigido hacia la formulación de conjeturas basadas en el comportamiento regular de las variables implicadas en el enunciado del problema. Estas conjeturas puede ser formuladas, primero, en forma verbal y luego simbólicamente procurando diseñar o llegar a una expresión general. El proceso se conduce hasta que alguno de los alumnos enuncie de manera explícita alguna conjetura basada en las propiedades comunes compartidas por los elementos o variables referidos en el enunciado del problema.

"Todo número de la forma ABCABC es múltiplo de 11"

En este caso, aun cuando el enunciado es correcto, todavía se está en el plano del lenguaje natural, pues es necesario avanzar más para llegar al MMS. Dependiendo del nivel de pericia matemática de los alumnos, aquí podría resultar imprescindible una intervención más directa del docente para ayudarlos a dar el salto hacia la simbolización:

Después hubo otra pregunta:

F. ¿No habrá forma de generalizarla?

C. Victor dijo "sí hay"

F. bueno ¿por qué no pasas a escribirla?

Victor (dirigiéndose al pizarrón) escribió: $11/ABCABC \Leftrightarrow \exists\ n \in Z, \ni n.11 = ABCABC$

(Cristóbal, Clase Nº 3).

Esta última expresión sí constituye el Modelo Matemático Subyacente correspondiente al problema. Las próximas acciones de la actividad resolutoria no se ejecutarán sobre el enunciado original sino sobre este modelo donde: (a) están planteadas las relaciones entre los elementos del problema; (b) aparece la información no explícita en el enunciado; y (c) se complementa el conjunto de interacciones entre datos e incógnitas y los vínculos entre estos dos conjuntos de elementos de un problema.

A partir de aquí se entra en el terreno netamente matemático, manejando el lenguaje formal correspondiente.

> Luego el profesor recalcó algo:
>
> F. Recuerden que, cada vez que en una proposición aparezca un "existencial", $\exists$, la demostración exige una construcción". (Cristóbal, Clase Nº. 3).
>
> Después (el profesor) dijo, bueno como tenemos a ABCABC podemos convertirlo en forma de polinomios, pero de base 10 (Cristóbal, Clase Nº. 3).
>
> Después de todos estos comentarios (procedimos a hacer la demostración)
>
> $A10^5 + B10^4 + C10^3 + A10^2 + B10^1 + C10^0 = ABCABC$
>
> $A(10^5 + 10^2) + B(10^4 + 10^1) + C(10^3 + 10^0) = ABCABC$
>
> $A10^2(10^3 + 1) + B10(10^3 + 1) + C(10^3 + 1) = ABCABC$
>
> $(10^3 + 1)(A10^2+ B10 + C) = ABCABC$
>
> $ABC(1001) = ABC(1000 + 1) = ABC(1000) + ABC = ABCABC$
>
> (Cristóbal, Clase Nº. 3)
>
> Se trabajó en función de los casos particulares que se tenían y se llegó a la conclusión de que el valor de "n" era 1001 (Víctor, Clase Nº. 3)

Conclusiones

El estudio aquí reportado destaca las modalidades de trabajo que se pueden implementar en una clase de Matemática centrada en la Resolución de Problemas. A partir de la experiencia del autor, son dos las conclusiones principales: (a) la posibilidad de "Hacer Matemática" utilizando la resolución y problemas; y (b) el carácter del papel protagónico que debe desempeñar el docente como mediador de los procesos cognitivos y metacognitivos asociados con la actividad resolutoria. Seguidamente de desarrollará cada una de estas conclusiones.

Conclusión 1: "Hacer Matemática" utilizando la resolución de problemas es posible.

De acuerdo con el enfoque de la actividad resolutoria que se ha mostrado hasta aquí, puede afirmarse que el enfrentamiento con problemas matemáticos con texto propicia la oportunidad de poner en práctica procesos propios del quehacer matemático. De este modo, durante la búsqueda de solución a este tipo de problemas, los alumnos, desde el punto de vista del esfuerzo intelectual que deben realizar, pueden actuar como lo debe hacer un matemático (de Guzmán, 1996).

Conclusión 2: El papel del docente en las clases de Matemática centradas en la resolución de problemas es el de mediador de procesos cognitivos y metacognitivos.

El docente, como parte de la comunidad matemática que se constituye en el aula cuando ésta se convierte en escenario para la resolución de problemas, juega un papel preponderante. Gracias a su mediación, la experiencia de resolver problemas se convierte en oportunidad de aprendizaje, dándole trascendencia y posibilitando la toma de conciencia por parte de los resolutores, acerca de aspectos relevantes del proceso.

Referencias bibliográficas

Blanco Nieto, L. J. (1996). *Concepciones y Creencias sobre la "resolución de problemas" de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares.* [Disponible en: http://www.terra.es/personal/ljblaco/pag3e.html]. Consultado el 04/04/04: 18:43 PM.

Callejo, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Madrid: Narcea S. A. de Ediciones.

González, F. (1995). Algunas Ideas en Torno a la Mediación Cognitiva. *Colecciones CIEAPRO, 2*; 39-59.

González, F. (1996). El Sistema de Mediación Tutorial. *Enfoques (Revista de Investigación del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro), 1* (2, Enero-Julio): 56-71.

González, F. (1997). *Procesos Cognitivos y Metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos.* Tesis Doctoral No Publicada. Valencia (Venezuela): Universidad de Carabobo.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké*, 6(9).

González, F. (2003a). La Dinámica P^2MA: Una opción didáctica frente a la enseñanza tradicional de la Matemática. *Anais do II Congresso Internacional de Ensino da Matemática.* Universidade Luterna do Brasil (ULBRA): Canoas-RS, Br. 6 al 8 de noviembre de 2003. Conferencia de Inauguración. Entregado para publicación en la Revista Investigación y Postgrado. UPEL (Caracas, Venezuela).

González, F. (2003b). Cognición Matemática: ¿Modelo de Inteligencia o para el Desarrollo de la Inteligencia? *Acta Scientiae* (Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad Luterana del Brasil) 2003/1, 7-33.

Guzmán, M. De (1983). *Algunos Aspectos Insólitos de la Actividad Matemática*. [Disponible en: http://www.mat.ucm.es/deptos/am /guz-man/aspectosinsolitos/aspectosinsolitos.html] Consultado el 04 de Abril de 2004, a las 18:10 PM.

Guzmán, M. De (1991). *Para Pensar Mejor*. Barcelona (España): Editorial Labor, S. A.

Guzmán, M. De (1996). El Papel del Matemático en la Educación Matemática. (*Conferencia en el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8 (Sevilla 1996), publicada en las Actas del Congreso, Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla, 1998).* [Disponible en: http://usuarios. bitmailer.com/mdeguzman/guzman-pa/papeldelmatematico.htm] Consultado el 05/04/04; 09:19 AM.

Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*; 519-524.

Martínez, P. O. (2003). *El Dominio Afectivo en la Educación Matemática: aspectos teórico-referenciales a la luz de los Encuentros Edumáticos.* Trabajo de Ascenso No Publicado, presentado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro"; Turmero, Edo. Aragua, Venezuela.

Polya, G. (1975). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Editorial Trillas. [Traducción al Castellano hecha por J. Zugazagoitía del original de 1945 *How to Solve it?* editado en Princenton, NJ, por Princenton University Press].

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada (España): Editorial Comares. Colección Mathema, Nº 6.

Rocerau, Mª C., Valdez, G., Oliver, Mª, Vilanova, S. & Jolis, Mª, (2002, Octubre 23 al 27). Factores Afectivos, Socio-Culturales y Heurísticos en la Resolución de Problemas Matemáticos. Ponencia presentada en el *2do. Encuentro Latinoamericano (6to. Encuentro Argentino-Cubano) Misión Educar.* Mar del Plata. Disponible en: http://www.misionfuturo.com/www/congresos/cuba/014 Octubre2002.doc. Consultado el: 23 de Febrero de 2004. 05:51 PM

Ruiz Bolívar, C. (1988). La Estrategia Didáctica Mediadora: una alternativa para el desarrollo de procesos en el aula. *Investigación y Postgrado, 3* (2), 57 -73.

Ruiz Bolívar, C. (1998). La Estrategia Didáctica Mediadora: ocho años después. *Investigación y Postgrado, 13* (1), 15 – 37.

Schoenfeld, A. (1985a). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985b). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Assocciates, Publishers. 361-380.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition an Sense-Making in Mathematics. En D. Grows, Ed. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan; Capítulo 15, pp 334-370.

Stacey, K. & Scott, N. (2000). Orientation to deep structure when trying examples: a key to successsful problem solving. En: J. Carrillo Yáñez & L. C. Contreras González. *Resolución de Problemas en los Albores del Siglo XXI: Una visión Internacional desde Múltiples Perspectivas y Niveles Educativos*. Huelva (España): Hergué, Editora Andaluza; Capítulo 4, 119-146.

Suárez Alemán, C. (2003). Aplicaciones de la historia de las matemáticas en el aula. *Épsilon, Nº 56*, 259-285.

Wittrock, M. (1986). Student´s Thought Processes. En.M. C. Wittrock (Ed). *Handbook of Research on Teaching* (Third Edition) New York: Macmillan Publishing Company. Part 2, Chapter 10; 297 – 314.