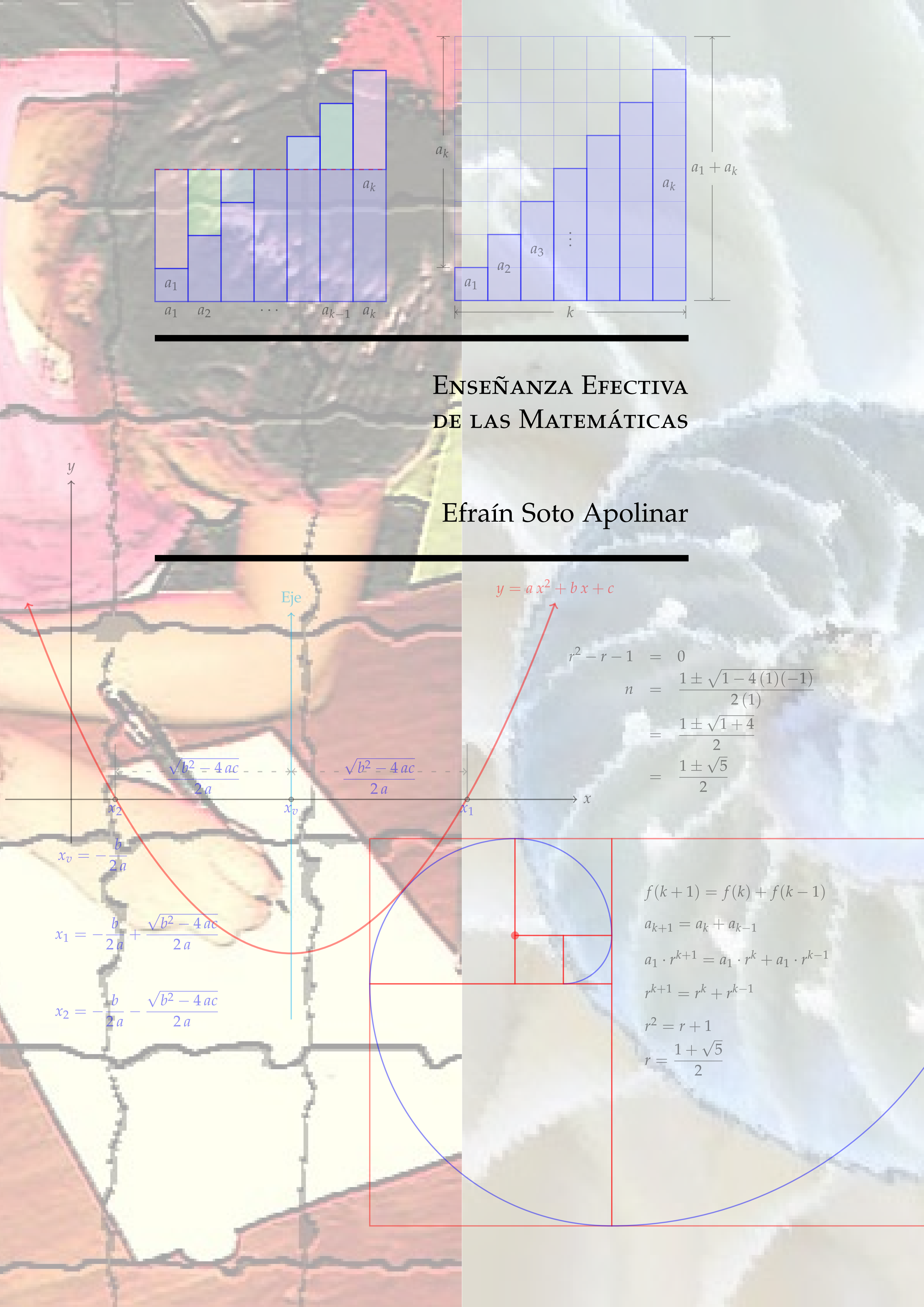


Enseñanza Efectiva de las Matemáticas

Efraín Soto Apolinar

Términos de uso

Apreciado lector, usted puede sentirse libre de utilizar la información que se encuentra en este material, bajo las siguientes condiciones:

Atribución: Debe dar crédito al autor del libro, independientemente del medio que se utilice para su divulgación (impresa, electrónica, en línea, etc.)

Uso no comercial: No se permite el uso de este material ni de su contenido con fines comerciales y/o lucro en forma alguna. Puede utilizarlo con fines educativos o de divulgación de las ciencias. Se permite el uso por instituciones educativas públicas o privadas sin fines de lucro, con la condición de que no se aplique cargo, ni en especie ni en moneda, ni en cualquier otra forma, a los usuarios finales de este material, sean estos profesores, autoridades educativas, estudiantes o público en general interesado en la enseñanza y/o el aprendizaje de las matemáticas.

No Modificar: No se permite alterar, transformar, modificar, en forma alguna este material. Usted tiene permiso para utilizarlo "*como está y es*". No se permite ni agregar, ni eliminar, ni modificar: palabras, u oraciones, o párrafos, o páginas, o subsecciones, o secciones, o capítulos o combinaciones de las anteriores o parte alguna del libro.

Permisos: Puede contactar al autor de este material directamente a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. Si usted tiene una copia de este libro en formato PDF y desea incluirlo en algún sitio de Internet, primero **solicite permiso**. No requiere de permiso alguno para imprimir una copia de este material para uso personal.

Impreso en México.

Enseñanza Efectiva

de las Matemáticas

por

Efraín Soto Apolinar

Matemáticas Educativas

Monterrey, N.L., México. 2008

Este libro está dedicado a la memoria del
mejor profesor de matemáticas que he conocido:

Dr. Julio César Sanjuán González
(Q.E.P.D)

A quien siempre consideré un buen amigo,
mi maestro, mentor y un segundo padre...

y a quien además, le debo este texto...

que no es sino una recopilación de
algunas de las bases matemáticas
que aprendí de él
en los talleres de matemáticas
que compartimos.

El más grande no es el que ocupa más espacio,
Sino el que deja el mayor vacío cuando se va.

Índice

Prefacio

Cada día, miles de profesores en nuestro país enseñan matemáticas en miles de aulas a millones de estudiantes.

Muchos padres y tutores confían en que el sistema educativo nacional está creando en sus hijos ciudadanos mejor preparados cada día.

El papel del profesor y su impacto en nuestros niños y jóvenes estudiantes está cambiando drásticamente.

Lograr que un estudiante realmente se entusiasme por una materia tan interesante como las matemáticas, irónicamente es rara vez logrado en un grupo completo.

Este libro tiene como principal objetivo lograr que el profesor encuentre material que le pueda ayudar a entusiasmar a sus estudiantes en aprender las matemáticas.

En la sección 1.2 encontrará sugerencias para que usted, profesor, pueda crear sus propios problemas y ejercicios, de manera que sus estudiantes vean que no se requiere de un libro para "*copiar*" los ejercicios que se deben realizar en clase y esto les ayude a entender que las matemáticas no son exclusivas de pocos genios.

La sección 1.3 incluye problemas motivadores. Los problemas motivadores, como su nombre lo indica, sirven para introducir un concepto elemental de matemáticas de una manera "*natural*", interesante y motivante.

En la sección 1.4 encontrará interpretaciones geométricas de conceptos que se incluyen en algunos programas de estudio de niveles medio y medio superior para que los estudiantes puedan reconocer que las distintas ramas de las matemáticas están entrelazadas de distintas maneras. Algunas de las interpretaciones geométricas que encontrará están relacionadas con problemas específicos y su solución puede presentarse como una introducción al concepto que corresponde en cada caso. Algunas de esas interpretaciones geométricas pueden utilizarse como problemas motivadores.

En el capítulo III se incluyen demostraciones matemáticas. Las secciones incluidas en éste servirán como una referencia para utilizar en sesiones de entrenamiento para mostrar a aquellos estudiantes interesados en elevar su nivel matemático que las matemáticas son una ciencia perfectamente clara y sin ambigüedades.

En el capítulo VII encontrará sugerencias para la enseñanza de las matemáticas en un aula de clase. Las sugerencias que se presentan son las que el autor ha encontrado efectivas para asegurar el aprendizaje de calidad.

En el capítulo VIII podrá encontrar herramientas para preparar sus propios materiales y una pequeña guía para el uso del software con el que se elaboraron estas notas.

Finalmente en los apéndices encontrará formularios que le pueden servir de apoyo.

En resumen, este libro tiene tres fines principales:

1. Servir como una referencia para encontrar demostraciones de algunos teoremas básicos,

2. Apoyarle en la planeación de sus clases con algunas ideas sobre cómo explicar algunos conceptos básicos de las matemáticas, y

3. Motivarle, profesor, a hacer el mayor esfuerzo por presentar las matemáticas que le corresponde enseñar en el aula de clase, de la manera más atractiva que le sea posible a sus estudiantes, de manera que ellos adquieran una visión más realista de lo que éstas son.

La mayoría de las cosas que encontrará aquí son una recopilación de lo que aprendí durante los entrenamientos para la Olimpiada Matemática Mexicana del Estado de Quintana Roo, gracias a Dr. Julio César Sanjuán González (Q.E.P.D.), principalmente, quien fue un gran entusiasta de la generación de nuevos talentos matemáticos entre los jóvenes mexicanos.

Algunas partes del texto las he aprendido de lecturas y profesores de matemáticas que han compartido sus enseñanzas conmigo y creo que servirán para divulgar de una manera atractiva las matemáticas. Las incluyo en el libro porque las considero igual de importantes y bonitas.

Espero que este material sea una fuente de inspiración para sus cursos y que con las ideas plasmadas en el mismo, convenza a la mayoría de sus estudiantes a "*aventarse a las matemáticas*", como decía mi maestro.

Efraín Soto Apolinar.
Monterrey, N.L. México.
2008.

Uno

Matemáticas

> *La matemática, en general, es la ciencia de las cosas auto-evidentes.*
>
> — Klein, Felix
> Anwerdung der Differential-und Integral-renchung auf Geometrie.

1.1 ¿Qué son las matemáticas?

La matemática es... difícil de definir.

El autor prefiere no aventurarse a dar una definición formal de las matemáticas, sin embargo, aquí se muestran algunas definiciones que se han dado a lo largo de la historia [7]. En los casos conocidos se muestran los títulos de las obras en las cuales aparecieron estas definiciones.

> *La Matemática es, en su significado más amplio, el desarrollo de razonamiento deductivo, formal y necesario.*
>
> — Whitehead, A.N.
> Universal Algebra
> Cambridge.

> *La matemática, —en sentido estricto— es la ciencia abstracta que investiga deductivamente las conclusiones implícitas en las concepciones elementales de las relaciones espaciales y numéricas.*
>
> — Murray, J.A.H.
> A New English Dictionary

> *La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias.*
>
> — Pierce Benjamin
> Linear Associative Algebra
> American Journal of Mathematics
> Vol. 4.

> *Cualquier concepción que queda definitiva y completamente determinada por un número finito de especificaciones, digamos, al asignar un número finito de elementos, es una concepción matemática. Las matemáticas tienen en su ámbito de trabajo desarrollar las consecuencias envueltas en la definición de un grupo de concepciones matemáticas. La interdependencia y la consistencia lógica mutua entre los miembros del grupo es supuesta; de otra forma el grupo deberá ser tratado como varios grupos distintos o estará fuera del ámbito de trabajo de las matemáticas.*
>
> — Chrystal George
> Encyclopedia Britannica
> (9th Edition)

> *El ideal de las matemáticas debería ser construir un cálculo para facilitar el razonamiento en conexión con cada provincia del pensamiento, o de la experiencia externa, en la cual, la sucesión de pensamientos, o de eventos puede ser definitivamente conjeturados y predichos con precisión. De tal forma que todo pensamiento serio que no sea filosofía o razonamiento inductivo, o literatura imaginativa, debería ser matemática desarrollada a través del cálculo.*
>
> — Whitehead, A.N.
> Universal Algebra
> Cambridge.

> *Una ciencia matemática es cualquier cuerpo de proposiciones que sea capaz de una formulación abstracta y arreglo de tal forma que cualquier proposición del conjunto, después de alguna de ellas, es una consecuencia lógica de algunas o todas las proposiciones precedentes. Las matemáticas consisten de todas esas ciencias.*
>
> — Young, Charles Wesley
> Fundamental Concepts of Algebra and Geometry
> New York.

> *Las matemáticas, la ciencia de lo ideal, transforma el significado de la investigación, entendiendo y haciendo conocido el mundo real. Lo complejo es expresado en términos de lo más simple. Desde un punto de vista, las matemáticas pueden ser definidas como la ciencia de sustituciones sucesivas de conceptos complejos por otros más simples...*
>
> — White, William F.
> A Scrap-book of Elementary Mathematics
> Chicago.

> *Las matemáticas son esa forma de inteligencia a través de la cual traemos los objetos del mundo de los fenómenos [naturales] bajo el control de la concepción de cantidad. (Definición provisional)*
>
> — Howison G.H.
> Journal of Speculative Philosophy. Vol 5. p.164

Frecuentemente los estudiantes preguntan... *¿para qué sirven las matemáticas?* La respuesta inmediata es: ¡mejor pregunta para qué no sirven!

Aquí se muestran algunas frases más que hablan de la naturaleza de las matemáticas y esto mismo indica para qué sirven.

Enseñanza de
las Matemáticas

Un prerrequisito para las ciencias naturales es cultivar un gusto por la observación, tal que la matemática sea, desde el principio, un estímulo a la facultad de la invención.

— Sylvester, J.J.
A plea for the Mathematician, Nature
Vol. 1 p. 261

Las matemáticas están para unir, mediar entre el hombre y la naturaleza, el mundo interno y el externo, el pensamiento y la percepción, como ninguna otra ciencia lo hace.

— Froebel

Aquellos que tienen habilidad en el análisis matemático saben que su objeto no es simplemente calcular números, sino que también es empleado en encontrar las relaciones entre las magnitudes que no pueden ser descritas en números y entre funciones cuyas leyes no son expresables por medio de expresiones algebraicas.

— Courton, Augustin
Mathematical Theory of the Principles of Wealth
(Bacon N.T.) New York.

Las matemáticas son la puerta y la llave a las ciencias... La ignorancia de las matemáticas hiere a todo el conocimiento, dado que el que las ignora no puede conocer las otras ciencias o las cosas de este mundo. Y lo que es peor, los hombres ignorantes no se dan cuenta de su propia ignorancia y no buscan un remedio.

— Bacon, Roger

En las matemáticas retenemos la actividad lógica consciente de la mente humana en su forma más pura y perfecta. Aquí aprendemos a darnos cuenta de la naturaleza laboriosa del proceso, el gran cuidado con el cual debemos proceder, la certeza con la cual es necesario determinar la extensión exacta de las proposiciones generales a las cuales llegamos, la dificultad de formar y comprehender conceptos abstractos, pero también aprendemos a darle confianza a la certeza, ámbito y fructiferidad de tal actividad intelectual.

— Helmholtz, H.
Ueber das Verhältniss der Naturwissenschaften
zur Gesammtheit der Wissenschaft
Vorträge und Reden. Bd. 1.

> *El poder que mueve la invención matemática no es el razonamiento, sino la imaginación.*
>
> — De Morgan, A.
> Quotes in Grave's Life of Sir. W.R.Hamilton.
> Vol. 3.

> *El razonamiento matemático es un tipo de razonamiento perfecto.*
>
> — Barnett, P.A.
> Sentido común en la Educación
> y en la Enseñanza. p. 222

> *Hay muchas artes que embellecen la mente del hombre; de todas, ninguna adorna o embellece tanto que aquellas artes que son llamadas matemáticas.*
>
> — Billinsley, H.
> The elements of Geometrie of the most
> ancient Philosopher Euclide of Megara

> *Probablemente no hay otra ciencia que presenta una apariencia tan diferente al que la cultiva como al que no, como las matemáticas. Para éste, esta ciencia es antigua, venerable y completa. Un cuerpo de razonamiento frio, inambiguo, irrefutable. Para el matemático, por otra parte, su ciencia está en la etapa de juventud de mayor crecimiento, creciendo por todas partes tras el "alcanzable, pero sin alcanzar" y lleno de entusiasmo por los nacimientos de nuevos pensamientos; su lógica está siteada por las ambigüedades, y sus procesos analíticos tienen una montaña en un lado y una zanja profunda en el otro lado y sus sendas crean ramas de trayectos innumerables que terminan en la naturaleza.*
>
> — Chapman, C.H.
> Bulletin Mathematical American Society. Vol. 2. p.61

Y para finalizar,

> *Aquel que no sabe matemáticas y que no conoce los desarrollos científicos recientes muere sin conocer la verdad.*
>
> — Schellbach
> Referida en Young's Teaching of Mathematics. p.44

1.2 Elaboración de reactivos

> *Todo maestro de matemáticas tiene dos obligaciones básicas indiscutibles: entender las matemáticas con profundidad y enseñar su belleza a los demás.*
>
> — Anónimo

En esta sección se muestran algunos ejemplos de cómo diseñar reactivos. Se consideran algunos temas elementales para adquirir habilidad en su diseño dependiendo del nivel de conocimiento que queramos medir.

Antes de elaborar un reactivo piense en qué estudió en clase con sus estudiantes, cuánto tiempo han dedicado al tema, lo que el estudiante promedio puede lograr, y sobre todo, los estándares impuestos por el programa de estudio (objetivos).

Cada reactivo debe ser diseñado con un propósito. El propósito principal es evaluar una o varias de las siguientes:

1. concepto
2. destreza
3. profundidad del conocimiento
4. aplicación a distintos contextos

✓ Cuando desee generar una ecuación, o un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.) comience siempre a partir de la solución.

Ejemplo 1.2.1

Elaborar un reactivo para evaluar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con solución única.

- Empezamos dando la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

- Aquí empezamos escribiendo los coeficientes de las variables junto con ellas, pero el término independiente lo calculamos después. Para esto sustituimos los valores de las variables x e y como se definieron antes:

$$\begin{aligned} 5\,x + 2\,y &= \\ 5\,(4) + 2\,(7) &= 20 + 14 = 34 \end{aligned}$$

La primera ecuación es: $5\,x + 2\,y = 34$

- Obtenemos la segunda ecuación con el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} 2\,x - 5\,y &= \\ 2\,(4) - 5\,(7) &= 8 - 35 = -27 \end{aligned}$$

  La segunda ecuación es: $2\,x - 5\,y = -27$.

- Entonces, el S.E.L. es:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\,x + 2\,y = 34 \\ 2\,x - 5\,y = -27 \end{array} \right.$$

  y su solución es: $x = 4, y = 7$

- Ahora usted puede transformar alguna ecuación (o ambas) para que tenga otro aspecto, por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\,x + 2\,y = 34 \\ 2\,x + 27 = 5\,y \end{array} \right.$$

- Puede encontrar la interpretación geométrica de un S.E.L. con solución única en la página 53.

En el ejemplo anterior se exigió que el S.E.L. tuviera solución, sin embargo no todos los S.E.L.'s tienen solución.

El siguiente ejemplo nos muestra cómo generar un S.E.L. sin solución.

Ejemplo 1.2.2

Elaborar un reactivo para evaluar la solución de un sistema de ecuaciones lineales sin solución.

- Sabemos que si un S.E.L. **no** tiene solución, entonces las gráficas de ambas ecuaciones son dos líneas rectas que no se cortan, es decir, son paralelas.
- En otras palabras, ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, pero su ordenada al origen es distinta.
- Porque si la ordenada al origen coincide también, entonces estamos hablando de la misma ecuación.
- Considerando lo anterior podemos generar un S.E.L. creando primero una ecuación lineal cualquiera:

$$2\,x - 3\,y = 7$$

- Y después otra ecuación que difiera solamente en el término independiente:

$$2\,x - 3\,y = 0$$

- Entonces, el S.E.L. que buscábamos es:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

- Igual, podemos multiplicar una de las ecuaciones por un escalar para ocultar todavía más que se trata de dos rectas paralelas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

- Y hemos terminado.
- Para ver la interpretación geométrica de un S.E.L. sin solución vaya a la página 53.

Importante: Cuando diseñe reactivos para clase o para un examen, tenga en mente lo siguiente:

✓ El hecho de que la solución de la ecuación sea correcta, no implica que el reactivo sea del tipo que deseamos.

✓ Considere, por ejemplo el caso: $x = 5$, y con él generamos la ecuación:

$$\frac{3x+1}{x+3} + \frac{5x-4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4x-4}$$

Esta ecuación no tiene solamente una solución, sino 4, porque se trata de una ecuación que al simplificarse no se reduce a una ecuación lineal, sino a una ecuación de grado 4, por cierto, muy difícil de resolver.

✓ Resuelva completamente el problema en caso de que tenga alguna duda respecto al procedimiento que se requiere, para evitar aplicar reactivos que no corresponden a los temas que está evaluando.

Ejemplo 1.2.3

> *Ahora generaremos un problema donde se aplique un sistema de ecuaciones lineales para resolverlo.*

- Para generar un problema donde se aplique un S.E.L. para resolverlo, es más fácil si empezamos con la situación conociendo todos los datos y después generamos la pregunta.
- Por ejemplo, consideremos el caso de un circo. Los boletos para adulto cuestan $80.00 pesos y los boletos para infante $45.00 pesos.
- Supongamos que entraron 250 adultos y 115 niños.

- En total ingresaron $250 + 115 = 365$ personas
- El ingreso debido a los adultos es:

$$(\$80 \text{ pesos/boleto}) \times (250 \text{ boletos }) = \$20\,000 \text{ pesos.}$$

- El ingreso debido a los niños es:

$$(\$45 \text{ pesos/boleto}) \times (115 \text{ boletos }) = \$5\,175 \text{ pesos.}$$

- El ingreso total es de:

$$\$20\,000 + \$5\,175 = \$25\,175 \text{ pesos.}$$

- El problema puede ser el siguiente:

> *En un circo había 365 asistentes entre adultos y niños. Cada boleto de adulto costaba \$80.00 pesos, mientras que cada boleto de niño costaba \$45.00 pesos. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron al circo a una función, si se recaudaron por entradas \$25 175.00 pesos?*

- Evidentemente, el problema puede dar otros datos, por ejemplo, el número de niños y adultos que entraron y preguntar cuánto pagaba cada uno de ellos.

Algunos problemas tiene solución matemática, pero ésta solución no tiene sentido físico.

Ejemplo 1.2.4

> *Un laboratorista desea preparar una solución de un ácido con una concentración del 35%. Él tiene a su disposición dos soluciones del ácido en cuestión con distintas concentraciones. La solución del matraz A tiene una concentración del 12%, mientras que la solución del matraz B tiene una concentración del 20%. ¿Qué cantidades de cada ácido debe utilizar para preparar 100 ml de la solución que requiere?*

- Podemos ordenar la información en una tabla:

	Volumen (ml)	**Concentración (%)**
Matraz A	x	12
Matraz B	y	20

- Sabemos que la suma de los volúmenes de ácido que se utilicen deben ser igual a 100 ml. Entonces,

$$x + y = 100$$

- Por otra parte, un mililitro de ácido del matraz A proporciona $12 \div 100$ mililitros de ácido puro, mientras que un mililitro del matraz B proporciona $20 \div 100$ mililitros de ácido puro.
- Entonces, la otra ecuación es:

$$0.12\,x + 0.2\,y = 35$$

- Ahora debemos resolver este S.E.L.:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 12\,x + 20\,y = 3500 \end{cases}$$

- Para empezar multiplicamos la primera ecuación por -20 y obtenemos:

$$\begin{cases} -20\,x - 20\,y = -2000 \\ 12\,x + 20\,y = 3500 \end{cases}$$

- Ahora sumamos las dos ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{aligned} -8\,x &= 1500 \\ x &= -\frac{1500}{8} = -\frac{750}{4} = -\frac{375}{2} = -187.5 \end{aligned}$$

- Pero es imposible físicamente agregar -187.5 mililitros de ácido, porque se trata de un número negativo.
- Entonces, a pesar de que este problema tiene solución matemática, esta solución no tiene sentido físico.
- Podemos darnos cuenta de estos casos cuando se nos pida una combinación que tenga (**a**) mayor concentración que la solución que tiene la más alta concentración o (**b**) menor concentración que la solución que tiene mínima concentración.
- Este mismo problema puede resolverse con una ecuación, incluyendo una sola incógnita.
- Dado que la suma de los mililitros de ácido es una constante (100), si agregamos x mililitros de ácido del matraz A, debemos agregar $100 - x$ mililitros de ácido del matraz B.
- La ecuación que obtendríamos entonces es:

$$0.12\,x + 0.2\,(100 - x) = 35$$

- Puede proponer este problema en el tema de ecuaciones lineales, considerando una ecuación con una incógnita y le puede servir como problema motivador en el tema de S.E.L., cuando estudien problemas que se resuelven con un S.E.L. de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 1.2.5

Deseamos generar un reactivo para el tema: Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios.

- Empezamos asignando el valor de la solución: $x = 4$
- Ahora escribimos una igualdad con números, por ejemplo:

$$5 - 1 = 4$$

- Ahora debemos encontrar expresiones que incluyan la literal x, y que al evaluar cada expresión en el valor de la solución, el resultado sea el valor que le corresponde a ese término en la igualdad anterior.
- Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{4\,x - 1}{3} = \frac{(4)\,(4) - 1}{3} \\ 1 &= \frac{2\,x - 1}{7} = \frac{(2)\,(4) - 1}{7} \\ 4 &= \frac{5\,x + 4}{6} = \frac{(5)\,(4) + 4}{6} \end{aligned}$$

- Y el reactivo queda[1]:

$$\frac{4\,x - 1}{3} - \frac{2\,x - 1}{7} = \frac{5\,x + 4}{6}$$

Ejemplo 1.2.6

Elaborar un reactivo de ecuaciones cuadráticas. Las raíces de la ecuación deben ser reales y distintas. Método: Completar cuadrados.

- Lo que necesitamos es que los estudiantes lleguen a un binomio al cuadrado y éste quede igualado a un número entero positivo.
- Eso mismo haremos para generar el reactivo:

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 &= 4 \\ x^2 - 10\,x + 25 - 4 &= 0 \\ x^2 - 10\,x + 21 &= 0 \end{aligned}$$

- El alumno debe realizar el proceso inverso.

[1]Recuerde verificar que al simplificar la ecuación se reduce a una lineal, o cuadrática, de acuerdo al tema que desee explicar o evaluar.

Ejemplo 1.2.7

Elaborar un reactivo de ecuaciones cuadráticas. Las raíces de la ecuación deben ser reales y distintas. Método: factorización (coeficiente del término cuadrático igual a 1).

- Aplicamos el procedimiento que utilizamos en el ejemplo anterior.
- Empezamos de la solución del ejercicio:

$$\begin{aligned}(x-3)(x+7) &= 0\\ x^2+4x-21 &= 0\end{aligned}$$

- Aquí también el estudiante debe realizar el proceso inverso.

Ejemplo 1.2.8

Elaborar un reactivo de ecuaciones cuadráticas. Las raíces de la ecuación deben ser reales y distintas. Método: factorización (coeficiente del término cuadrático distinto de 1).

- De nuevo, iniciamos con la solución del ejercicio:

$$\begin{aligned}(2x+1)(3x-5) &= 0\\ 6x^2-7x-5 &= 0\end{aligned}$$

- Este reactivo, como el anterior, es una base para los ejercicios de geometría analítica en los que se pide encontrar los elementos de una cónica a partir de su ecuación.

Ejemplo 1.2.9

Elaborar un reactivo de ecuaciones cuadráticas. Las raíces de la ecuación deben ser complejas. Método: Fórmula general.

- Para que las raíces sean complejas, necesitamos que un número de la forma $\alpha x+\beta$ elevado al cuadrado esté igualado a un número negativo.
- Para esto generamos un binomio al cuadrado igualado a cero.

$$\begin{aligned}(2x+7)^2 &= 0\\ 4x^2+28x+49 &= 0\end{aligned}$$

- Ahora igualamos el trinomio cuadrado perfecto con un número entero negativo.

$$\begin{aligned} (2\,x+7)^2 &= -12 \\ 4\,x^2+28\,x+49+12 &= 0 \\ 4\,x^2+28\,x+61 &= 0 \end{aligned}$$

- Es obvio que las soluciones de esta ecuación son complejas, porque:

$$\begin{aligned} (2\,x+7)^2+12 &= 0 \qquad \Rightarrow \\ (2\,x+7)^2 &= -12 \\ 2\,x+7 &= \pm\sqrt{-12} \end{aligned}$$

- El alumno debe utilizar la fórmula general o completar cuadrados para resolverlo.

Si usted desea elaborar un reactivo de algún tema que no aparece aquí, y en este momento no tiene idea de cómo elaborarlo, es una buena idea leer en un libro los diferentes tipos de reactivos que se muestran en él. Después, crée la solución del problema primero y después elabore la pregunta.

Obviamente, preferentemente debe basarse en lo que estudió con sus estudiantes en clase.

Tenga cuidado de incluir al menos los datos que se requieren para la solución del reactivo que acaba de elaborar. Para esto es una buena idea resolver el reactivo con los datos que usted propone al estudiante.

Cuando desee generar un ejercicio de álgebra básica, como leyes de los exponentes, piense primero qué leyes desea evaluar. Esto dependerá de lo que le espera al estudiante en los temas posteriores de acuerdo al programa y del mínimo requerido para sobrevivir entonces.

1.3 Problemas motivadores

No hay alguna rama de las matemáticas, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

— Nicolai Lobachewsky.

En esta sección se muestran algunos ejemplos de problemas que pueden utilizar para despertar el interés en la clase.

Evidentemente, no es la única forma de motivar a los estudiantes en la discusión, así que se le queda de tarea crear nuevas formas de presentar estos y otros temas a los estudiantes en clase.

El objetivo de presentar un problema motivador es múltiple. En primer lugar se trata de mostrar a las matemáticas en un contorno que ellos sientan les es conocido. Un problema motivador siempre debe estar basado en conocimiento previo, de otra forma ocasionará confusión en los estudiantes.

También el problema motivador puede ser un pretexto para introducir un nuevo tema. Se puede, por ejemplo, tratar de resolver una ecuación fraccionaria que se reduce a una ecuación cuadrática y con ello iniciar el estudio de las ecuaciones cuadráticas.

De hecho, muchos conceptos matemáticos se desarrollaron por la necesidad de resolver problemas cotidianos. Por ejemplo, en el cálculo infinitesimal, los conceptos de límite, derivada e integral (como los conocemos ahora) se desarrollaron por la necesidad de conocer la mecánica de las bolas lanzadas por cañones y el estudio de los movimientos de los planetas.

Sobre todo, un problema motivador debe despertar el interés en los estudiantes por el tema. Ellos deben darse cuenta que las matemáticas que están estudiando pueden aplicarlas en sus vidas y facilitar la solución de muchos problemas cotidianos.

Un problema motivador no debe ser necesariamente difícil, pero tampoco debe ser tan sencillo que los estudiantes piensen que no representa conocimiento nuevo. Ellos deben reconocer su importancia, y en caso de que se requiera, el profesor debe puntualizarla.

Estos problemas motivadores son solamente unos ejemplos sencillos. Evidentemente, podemos encontrar cientos de ellos en muchos otros temas de los cursos de todos los niveles.

Espero que sean de ayuda para que mejore su eficiencia en clase.

Problema motivador

> ECUACIONES LINEALES / DESPEJE
> *Pensé un número. Lo multipliqué por siete, al resultado le sumé uno y obtuve cincuenta. ¿Qué número pensé?*

- ✓ Antes de tener 50 le sumé uno, así que no tenía 50, sino $50 - 1 = 49$
- ✓ Y antes de tener 49 lo multipliqué por 7, así que no tenía 49, sino $49 \div 7 = 7$
- ✓ El número que pensé fué 7.
- ✓ Profesor, haga notar que para encontrar el número que tenía en el paso anterior que realicé una operación, siempre realizo la operación contraria:
- ✓ Si sumé uno, le resto uno;
- ✓ Si multipliqué por 7, divido entre 7.

Problema motivador

> ECUACIONES LINEALES / DESPEJE
> *Pensé un número. Cuando lo multiplico por tres y al resultado le resto uno, obtengo lo mismo que si (al número que pensé) lo multiplico por dos y al resultado le sumamos 6. ¿Qué número pensé?*

- ✓ De manera semejante al ejemplo anterior, vamos a suponer que el número que pensó existe,
- ✓ Entonces, si x es el número que pensó, satisface la siguiente ecuación:

$$3\,x - 1 = 2\,x + 6$$

- ✓ Esta ecuación puede representarse de manera gráfica como sigue:
- ✓ Si el número que pensó es x, y x lo representamos por un cuadrado, $3\,x$ se representa por 3 cuadrados, que en realidad eso es lo que nos dice en palabras $3\,x$: "*Tres veces* x", o bien "*Tres cuadrados*"...
- ✓ Por otra parte, $2\,x$ se prepresenta con dos cuadrados: $2\,x$ en palabras dice: "*Dos veces* x", o bien, "*Dos cuadrados.*"

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{x\,+\,x\,+\,x} - 1 = \underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{x\,+\,x} + 6$$

- ✓ El valor de x está representado por un cuadrado.
- ✓ Algunos profesores prefieren usar la analogía de una balanza.

✓ En ese caso los cuadrados están representando el peso de un ladrillo o cualquier otro objeto.

✓ Si quitamos de ambos lados de la igualdad un cuadrado, la igualdad se sigue manteniendo...

✓ O bien, si quitamos de ambos lados de la balanza un ladrillo, sigue estando balanceada...

✓ Puede dar un ejemplo numérico para que los estudiantes capten mejor lo que esto significa.

✓ Después podemos quitar uno más de ambos lados y la igualdad no se altera...

$$\underset{x}{\square} \quad - \quad 1 \quad = \quad 6$$

✓ Esto significa que, si al número que pensó le quitamos uno, obtenemos 6.

✓ Obviamente pensó 7, porque $7 - 1 = 6$.

✓ Ahora verificamos que satisfaga las condiciones del problema inicial:

$$\begin{aligned} 3\,x - 1 &= 2\,x + 6 \\ 3\,(7) - 1 &= 2\,(7) + 6 \\ 21 - 1 &= 14 + 6 \end{aligned}$$

✓ Entonces, pensó el número 7.

Problema motivador

> **PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS / DESIGUALDADES**
> *¿Puede $x < x$? ¿Por qué?*

✓ Un número siempre es igual a sí mismo. Por ejemplo, 5=5. (Prop. reflexiva)

✓ Para que un número sea menor que otro, necesariamente deben ser distintos. (Tricotomía)

✓ Pero $x = x$, por lo tanto,

Es imposible que $x < x$

✓ Puede encontrar más evidencia de que esto es verdad escribiendo el número x en la recta numérica y observando que los números menores que x están a la izquierda (de él) y el punto que le corresponde al número x no está a la derecha (de él), sino sobre sí mismo.

- ✓ De manera semejante, es imposible que $x > x$.
- ✓ Geométricamente, el equivalente a la tricotomía ahora es evidente: un punto sobre la recta numérica siempre está sobre sí mismo. Nunca está ni a la derecha ni a la izquierda (de sí mismo).
- ✓ Una manera de contextualizar este concepto es como sigue: yo siempre tengo mi propia edad. No soy ni menor ni mayor a mí mismo.

Problema motivador

OPERACIONES CON POLINOMIOS / EXPRESIONES ALGEBRAICAS
¿Por qué se inventaron los polinomios?

- ✓ Desde el inicio de la humanidad los hombres han tenido la necesidad de contar.
- ✓ Algunos empezaron a contar haciendo nudos en mecates[2], otros juntando piedras, y otros con los dedos de las manos y los pies.
- ✓ Así surgieron los sistemas de numeración.
- ✓ Por ejemplo, los mayas contaban de 20 en 20, por eso decimos que su sistema era vigesimal.
- ✓ Actualmente contamos de 10 en 10, por eso decimos que nuestro sistema es decimal.
- ✓ En nuestro sistema de numeración cada dígito tiene un valor que depende de su posición, por eso decimos que nuestro sistema de numeración es posicional.
- ✓ Entonces, nosotros utilizamos un sistema de numeración decimal - posicional.
- ✓ Cuando escribimos un número, por ejemplo, 2 354, queremos decir:

$$\begin{aligned} 2\,354 &= 2\,000 + 300 + 50 + 4 \\ &= 2 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 5 \times 10 + 4 \\ &= 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 \end{aligned}$$

- ✓ Ahora, en lugar de utilizar nuestra base decimal, es decir 10, utilizamos un número x cualquiera:

$$2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 \quad \longrightarrow \quad 2\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 4$$

  que en este caso tendremos un número en la base x, no en base decimal.
- ✓ En nuestro sistema de numeración decimos que la base es 10, porque a este número lo utilizamos como base.

[2] El mecate es una cuerda para amarrar cosas.

- ✓ Es muy bien sabido que cuando multiplicamos por 10 a un número todos sus dígitos se recorren a la izquierda una posición y agregamos un cero a la derecha.
- ✓ Esto es equivalente a cambiar el exponente que le corresponde a la base (10) para cada uno de los dígitos que forma el número:

$$\begin{aligned} 354 &= 3\times 10^2 + 5\times 10^1 + 4\times 10^0 \\ 354\times 10 &= 3\times 10^3 + 5\times 10^2 + 4\times 10^1 \end{aligned}$$

- ✓ Entonces, los polinomios no son sino una generalización de nuestro sistema de numeración posicional.
- ✓ Es decir, en lugar de usar siempre 10 como base del sistema de numeración, podemos ahora utilizar cualquier número real x.
- ✓ Entonces:

$$\begin{aligned} 2\,354_{10} &= 2\times 10^3 + 3\times 10^2 + 5\times 10^1 + 4\times 10^0 \\ (\text{otro número})_{10} &= 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 + 5\cdot x + 4 \\ 2\,354_x &= 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 + 5\cdot x + 4 \end{aligned}$$

- ✓ Representa otro número, si es que $x \neq 10$.
- ✓ Puede encontrar algunos otros ejemplos para explicar cómo se realizan las operaciones con polinomios en la página 164, basado en la idea de la generalización de los sistemas de numeración.

Problema motivador

> LEYES DE LOS EXPONENTES / RADICALES
> *Encuentra el valor de k si $\sqrt{a} = a^k$.*

- ✓ En palabras, lo que queremos encontrar es qué valor debe tener el exponente que debemos usar en lugar del símbolo de raíz cuadrada, de manera que ambas representaciones sean equivalentes.
- ✓ Sabemos que $\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}\right) = a$
- ✓ Si se requiere, incluya varios ejemplos numéricos.
- ✓ Por ejemplo: $\left(\sqrt{25}\right)\left(\sqrt{25}\right) = (5)(5) = 25$.
- ✓ Si $\sqrt{a} = a^k$, entonces,

$$\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}\right) = a^k \cdot a^k = a^1$$

porque el exponente de a es 1.

✓ Utilizando la ley de los exponentes $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, obtenemos:

$$a^k \cdot a^k = a^{2k} = a^1$$

✓ Pero para que la igualdad se cumpla, teniendo iguales las bases, se requiere que los exponentes sean iguales, de otra forma los resultados no serán iguales,

✓ De aquí concluimos que:

$$2\,k = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad k = \frac{1}{2}$$

✓ Entonces, si $\sqrt{a} = a^k$, $k = \dfrac{1}{2}$

✓ Podemos generalizar este procedimiento sugiriendo:

> *Encuentra el valor de k si* $\sqrt[m]{a} = a^k$.

✓ Por ejemplo, podemos discutir después: $\sqrt[3]{a} = a^k$, luego $\sqrt[4]{a} = a^k$, y finalmente sugerir la generalización.

Problema motivador

> PRODUCTOS NOTABLES / FACTORIZACIÓN / LÍMITES
>
> *¿A qué valor se acerca el cociente:* $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ *cuando los valores de x se acercan mucho a 2?*

✓ Obviamente, dado que no podemos dividir por cero[3], cuando $x = 2$ el cociente no está definido.

✓ Podemos ir asignando valores a x que se aproximen cada vez más a 2 y ver qué pasa, pero hay un método mucho más sencillo:

✓ Observe que el numerador es igual a la diferencia de dos cuadrados perfectos, x^2 y 4, siendo sus raíces x y 2, respectivamente.

✓ Seguramente recuerda el producto notable:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

✓ En nuestro caso, $a^2 = 4$, o bien, $a = 2$, con lo que tenemos:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = x + 2$$

[3]Vea los casos de la división por cero en la página 140.

✓ Esto significa que cuando los valores de x se acercan mucho a 2, los valores del cociente se acercan mucho[4] a 4.

✓ Puede utilizar un ejemplo similar para introducir el concepto de límite en el curso de cálculo diferencial.

Problema motivador

> **PRODUCTOS NOTABLES / FACTORIZACIÓN**
> *Observa que:* $1 \times 3 = 2^2 - 1$; $3 \times 5 = 4^2 - 1$; $5 \times 7 = 6^2 - 1$; $7 \times 9 = 8^2 - 1$; *etc.* *¿Por qué ocurre?*

✓ Observa que siempre estamos multiplicando dos números impares consecutivos.

✓ Si el primer número impar es: $2k - 1$, el siguiente es: $2k + 1$. Obviamente, estamos suponiendo que $k \in \mathbb{Z}$.

PROFESOR:

Recuerde a los estudiantes que se está aplicando la ley distributiva.

✓ Al multiplicarlos obtenemos:

$$\begin{aligned}(2k-1)(2k+1) &= 2k(2k+1) - (2k+1)\\ &= 4k^2 + \cancel{2k} - \cancel{2k} - 1\\ &= 4k^2 - 1\end{aligned}$$

✓ $4k^2$ es el cuadrado de un número par: $(2k)^2 = 4k^2$. Cuando le restamos 1, obtenemos el resultado que vemos en la sucesión dada en el texto del problema.

✓ Esto puede relacionarlo con la interpretación geométrica de la suma de los primeros k números impares:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

que puede encontrar en la página 39.

Problema motivador

> **EXPRESIONES ALGEBRAICAS**
> *Un grupo de n amigos acordaron cenar juntos. Algunos de ellos invitaron a su pareja y así se juntaron 3 personas más. Festejaron y algunos tuvieron que irse, porque al siguiente día debían trabajar muy temprano, así que cuando debían pagar la cuenta, que ascendía a \$1 250.00, ya se habían ido 7 personas de las que se reunieron. ¿Si todos los que estaban entonces cooperaron en partes iguales para pagar la cuenta, cuánto de más pagó cada uno, considerando que algunos que también consumieron ya se habían ido y debían cooperar?*

✓ Al principio no había n personas, sino $n + 3$, porque llegaron 3 personas más a la reunión.

[4] si x se acerca mucho a 2, entonces $x + 2$ se acerca mucho a 4.

✓ Es decir, si todos los asistentes hubieran cooperado, todos hubieran pagado:

$$\frac{1\,250}{n+3}$$

✓ Pero cuando pagaron ya no había $n+3$ personas, sino solamente $n+3-7=n-4$.

✓ Como había menos personas cada uno tuvo que cooperar con una mayor cantidad de dinero.

✓ Esta cantidad era:

$$\frac{1\,250}{n-4}$$

✓ La diferencia entre estas cantidades es lo que cada uno de los que cooperaron al final pagó de más:

$$\frac{1\,250}{n-4}-\frac{1\,250}{n+3}$$

✓ Es importante que indique a los estudiantes que la expresión anterior **no** es una ecuación, porque en ésta no aparece el signo de igualdad.

✓ Si supieramos que, por ejemplo, cada uno pagó de más \$10.00 pesos, entonces podríamos igualar a 10 la expresión anterior y en ese caso sí estaríamos hablando de una ecuación.

✓ Al resolver la ecuación podríamos encontrar n, es decir, el número de personas que acordaron reunirse.

✓ Enfatice que n **no** es el número de personas que cooperó para pagar la cuenta; tampoco es el número de personas que asistió a la reunión.

✓ Este tipo de errores es frecuente en los estudiantes.

✓ El problema pide un dato, por ejemplo, el número de personas que se reunieron y el estudiante, al encontrar el valor de la incógnita, piensa que esa es la respuesta.

Problema motivador

Ecuaciones fraccionarias / Ecuaciones cuadráticas

Varios amigos decidieron comprar un boleto de una rifa cooperando en partes iguales. Cuando el papá de Adán se enteró, les pidió oportunidad de arriesgar su dinero junto con el de ellos y aceptaron. Por esto cada uno de los demás pagó \$10.00 pesos menos. ¿Cuántas personas cooperaron para comprar ese boleto que costaba \$1 320.00 pesos?

✓ Sabemos que n amigos en total, más el papá de Adán cooperaron para comprar el boleto.

✓ Y que el boleto costaba \$1 320.00 pesos

✓ Si el papá de Adán no hubiera cooperado, cada uno debería colaborar con:

$$\frac{1\,320}{n}$$

✓ Pero ahora no son en total n personas, sino $n+1$, con lo que cada uno arriesgó:

$$\frac{1\,320}{n+1}$$

✓ La diferencia entre estos dos valores es igual a \$10.00 pesos, la cantidad que ahorraron después que el papá de Adán ingresó al grupo:

$$\frac{1\,320}{n} - \frac{1\,320}{n+1} = 10$$

✓ Para saber cuántas personas cooperaron $(n+1)$, primero debemos resolver la ecuación anterior.

✓ Es importante hacer notar que al resolver la ecuación encontraremos el valor del número de amigos que decidieron comprar el boleto, n. Este número no incluye al papá de Adán, así que tendrán que sumar 1 al resultado de la ecuación.

✓ Para resolver la ecuación multiplicamos en ambos lados de la igualdad por $n\,(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1\,320}{n} - \frac{1\,320}{n+1} &= 10\\
1\,320\,(n+1) - 1\,320\,n &= 10\,n\,(n+1)\\
\cancel{1\,320\,n} + 1\,320 - \cancel{1\,320\,n} &= 10\,n\,(n+1)\\
1\,320 &= 10\,n\,(n+1)\\
132 &= n\,(n+1)
\end{aligned}$$

✓ **Primer Método.**

✓ Es importante notar del problema que n debe ser un número entero, porque no es posible que 7.5 personas, por ejemplo, acuerden cooperar para comprar un boleto.

✓ Ahora observe que $n\,(n+1)$ es el producto de dos números consecutivos, y que este producto es un poco mayor que 100.

✓ Podemos fácilmente probar valores cercanos, pero mayores a 10 y así encontrar la solución de la ecuación.

No es necesario probar 10×11 porque 132 no termina en cero.

✓ Si $n = 11$, entonces, $n+1 = 12$, y tenemos que $11 \times 12 = 132$.

✓ Esto indica que $n = 11$ era el número de amigos que acordaron comprar el boleto y eran en total $n+1 = 12$ cuando el papá de Adán se unió al equipo.

✓ **Segundo Método.**

✓ Desarrollamos el producto que quedó indicado a la derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} n\,(n+1) &= 132 \\ n^2 + n - 132 &= 0 \end{aligned}$$

✓ Ahora debemos resolver la ecuación cuadrática utilizando factorización...

✓ Buscamos dos números que sumados den 1 y multiplicados sean -132.

✓ Un truco para simplificar la búsqueda de los números consiste en empezar buscando dos números que multiplicados sean igual a -132.

✓ Otro truco que les ayuda a simplificar la búsqueda consiste en observar que el coeficiente del término lineal es positivo, lo cual indica que el mayor de los dos números es positivo.

✓ Como ya sabemos por el resultado encontrado en el primer método, esos números son 12 y -11:

$$\begin{aligned} n^2 + n - 132 &= 0 \\ (n-11)(n+12) &= 0 \end{aligned}$$

✓ Ahora vemos que el producto de dos números es cero. Esto implica que al menos uno de ellos debe ser cero.

✓ *Primer caso:* $n - 11 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n = 11.$

✓ Obviamente n, que representa el número de amigos que acordó comprar el boleto de la rifa, no puede ser negativo, que es precisamente el resultado que obtenemos en el siguiente caso:

✓ *Segundo caso:* $n + 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n = -12.$

✓ Ahora sabemos que $n = 11$, pero no nos preguntaron cuántos amigos decidieron cooperar para comprar el boleto, sino cuántos cooperaron, y eso incluye al papá de Adán.

✓ Entonces, la solución del problema es $n + 1 = 11 + 1 = 12$ personas cooperaron.

✓ **Tercer Método.**

✓ Aquí utilizamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{aligned} n^2 + n - 132 &= 0 \\ n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\,(1)(-132)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 23}{2} \end{aligned}$$

✓ Y ahora encontramos las raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-1+23}{2} = \frac{22}{2} = 11 \\ n_2 &= \frac{-1-23}{2} = \frac{-24}{2} = -12 \end{aligned}$$

✓ De nuevo, el valor de n debe ser positivo por las condiciones del problema, así que $n + 1 = 12$ es el valor que buscamos.

✓ Muestre a los estudiantes que como en este caso la ecuación no incluye la variable x, sino n, la fórmula general se escribe como:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

✓ Es una buena idea sugerir a los estudiantes que una vez que hayan encontrado el valor de una incógnita se pregunten a sí mismos: *"¿Qué representa este valor en el contexto de mi problema?"*, *"¿Qué representa esta variable en mi problema?"*, *"cuando surgió la necesidad de definir esta variable, ¿qué estaba representando?"*

✓ Haga énfasis en que una solución de la ecuación no siempre es la solución del problema... Algunas veces esa información nos ayudará a encontrar la solución, pero ésta no es en sí la solución...

Problema motivador

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Pensé dos números. Cuando los sumo, el resultado es 12, pero cuando los multiplico el resultado es 35. ¿Cuáles son esos dos números que pensé?

✓ Si usted propone este problema a la clase sin explicar un método para resolverla, es muy probable que los estudiantes empiecen escribiendo dos ecuaciones con dos incógnitas, una de ellas representando a cada número que pensó...

✓ Es una buena oportunidad para mostrar que este problema también se puede modelar con una sola incógnita.

PROFESOR:

Sugiera a los estudiantes resolver el problema mentalmente.

✓ Dado que la suma de los dos números es 12, si uno de ellos es x, el otro debe ser $12 - x$.

✓ Muestre ejemplos numéricos para que los estudiantes se convenzan de que esto es así.

✓ Muestre, inclusive, casos en los cuales $x > 12$...

✓ Entonces se cumple la primera condición, es decir, la suma de los dos números es 12: $x + (12 - x) = 12$...

✓ Y la segunda condición es la que nos da una ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}(x)(12-x) &= 35\\ 12\,x - x^2 &= 35\\ x^2 - 12\,x + 35 &= 0\end{aligned}$$

✓ **Primer Método.**

✓ Empezamos dando valores enteros a un número y encontramos el otro a partir de la primera condición. Después multiplicamos los dos números (que ya satisfacen la primera condición) para ver si satisfacen la segunda.

✓ Es muy fácil dar con la solución, dado que los dos números son enteros positivos y relativamente pequeños.

✓ **Segundo Método.**

✓ Como el resultado del producto de los dos números es positivo, los dos números tienen el mismo signo.

✓ Como el coeficiente del término lineal es negativo, los dos números deben ser negativos.

✓ Esos números son -7 y -5.

PROFESOR:

Puede utilizar este problema para motivar la resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización.

✓ Entonces, la ecuación queda:

$$\begin{aligned}x^2 - 12\,x + 35 &= 0\\ (x-7)(x-5) &= 0\end{aligned}$$

✓ Ahora tenemos que el producto de dos números es igual a cero.

✓ Eso ocurrirá solamente cuando al menos uno de ellos sea igual a cero.

✓ *Primer caso:* $x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$

✓ *Segundo caso:* $x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$

✓ Entonces, los números que pensó son: $x = 7$ y $x = 5$.

✓ **Tercer Método.**

✓ Aplicamos la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned}x &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\,(1)(35)}}{2\,(1)}\\ &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2}\\ &= \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2}\end{aligned}$$

✓ Ahora podemos encontrar los valores que pensó:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12+2}{2} = 7 \\ x_2 &= \frac{12-2}{2} = 5 \end{aligned}$$

Problema motivador

NÚMEROS IRRACIONALES / ECUACIONES CUADRÁTICAS

Pensé un número. Lo multipliqué por sí mismo. Obtuve 2. ¿Qué número pensé?

✓ Obviamente, el número que pensó no es el número 1, porque $1 \times 1 \neq 2$.

✓ Tampoco pensó el número 2 porque $2 \times 2 \neq 2$.

✓ Significa que pensó un número entre 1 y 2.

✓ Podemos imaginar que pensó el número x.

✓ Podemos traducir el problema, como:

$$x \cdot x = x^2 = 2$$

✓ Ahora despejamos la incógnita.

✓ Para hacer el despeje utilizamos la operación contraria.

✓ La operación contraria de elevar al cuadrado es sacar raíz cuadrada.

✓ Entonces, la solución es:

$$x^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{2}$$

✓ Puede explicar este problema motivador como una introducción a las ecuaciones cuadráticas.

✓ Enfatice que $x = -\sqrt{2}$ también es una solución del problema.

✓ Para que el estudiante se convenza de que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ utilice ejemplos numéricos similares, como los siguientes:

$$\begin{aligned} \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} &= 2 \times 2 = 4 \\ \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} &= 3 \times 3 = 9 \\ \sqrt{100} \cdot \sqrt{100} &= 10 \times 10 = 100 \end{aligned}$$

Problema motivador

NÚMEROS IMAGINARIOS / NÚMEROS COMPLEJOS

Pensé un número. Cuando lo multiplico por sí mismo, es decir, cuando lo elevo al cuadrado, obtengo el número -1. ¿Qué número pensé?

✓ El problema dice que lo multiplicó por sí mismo y obtuvo -1 como resultado, esto es:
$$x^2 = -1$$

✓ Supongamos que pensó un número positivo.

✓ Digamos que ese número es x.

✓ Si el número era positivo, entonces, el producto x^2 no podía darnos negativo, porque por las leyes de los signos, tenemos $+ \times + = +$.

✓ Ahora supongamos que el número era negativo.

✓ Al multiplicar $x \cdot x$, de nuevo, por las leyes de los signos, tenemos que $- \times - = +$.

✓ Esto nos indica que el número que pensó tampoco es negativo.

✓ La única solución que nos queda es considerar al cero. Pero cuando multiplico cero por cero obtengo cero, no -1.

✓ *Solución*: Ningún número (real) al multiplicarse por sí mismo nos da como resultado -1.

✓ Así que tenemos una "*necesidad algebraica*". Para resolver la ecuación:
$$x^2 = -1$$
necesitamos crear un nuevo número, al cual llamaremos i, que sea la solución de la ecuación.

✓ Al despejar la incógnita de la ecuación obtenemos:
$$\begin{aligned} x^2 &= -1 \\ x &= \sqrt{-1} \end{aligned}$$

✓ Ahora llamaremos a ese número i. Es decir,
$$i^2 = -1$$

✓ Con esta introducción puede ahora crear los números complejos.

Problema motivador

Ecuaciones cuadráticas / Números Complejos

Con la solución de la ecuación $x^2 = -1$, crearemos un nuevo conjunto de números que llamaremos "Números Complejos". Nuestro problema consiste en definir las operaciones de suma (+) y multiplicación entre estos números.

✓ La manera natural de tratar a estos números consiste en aplicar las leyes de los números reales, para que los números reales no sean muy "*extraños*" para los números complejos.

- ✓ La idea consiste en emparentarlos tanto como nos sea posible. Así no tendremos que recordar nuevas reglas para cada nuevo conjunto que encontremos.
- ✓ Empezamos definiendo a un número complejo: $z = a + i\,b$.
- ✓ Los números a y b son números reales. De manera que cuando $b = 0$, el número es real.
- ✓ Esto nos ayuda porque entonces, el conjunto de los números reales queda como un subconjunto de los números complejos.
- ✓ Cuando $a = 0$ tenemos un número puramente imaginario.
- ✓ Al número a lo llamamos "*la parte real*" del número complejo z,
- ✓ y al número b la parte imaginaria.
- ✓ Vamos a definir la suma de la manera que esperábamos: sumamos la parte real con la parte real, y la parte imaginaria con la parte imaginaria de distintos números complejos:
- ✓ Si $z_1 = a_1 + i\,b_1$ es uno de los números complejos que deseamos sumar, y
- ✓ $z_2 = a_2 + i\,b_2$ es el otro número, entonces la suma de los dos será:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + i\,b_1 \\ z_2 &= a_2 + i\,b_2 \\ z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

- ✓ Por otra parte, la multiplicación nos sugiere que *apliquemos la ley distributiva* para los números reales, debido a que cada número complejo tiene dos componentes.
- ✓ Si consideramos de nuevo los números complejos: $z_1 = a_1 + i\,b_1$ y $z_2 = a_2 + i\,b_2$, al multiplicarlos aplicando la ley distributiva obtenemos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) \\ &= a_1 \cdot (a_2 + i\,b_2) + i\,b_1 \cdot (a_2 + i\,b_2) \\ &= [a_1 \cdot a_2 + i\,a_1 \cdot b_2] + [i\,b_1 \cdot a_2 + i^2\,b_1 \cdot b_2] \end{aligned}$$

- ✓ Vamos a juntar los términos que contienen el número imaginario i y separarlos de los que no lo contienen,
- ✓ También debemos recordar que $i^2 = -1$, porque así podemos simplificar el resultado todavía más:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= a_1 \cdot a_2 + i^2\,b_1 \cdot b_2 + i\,a_1 \cdot b_2 + i\,b_1 \cdot a_2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i\,(a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \end{aligned}$$

- ✓ Vamos a ver si funciona de verdad.

✓ Para esto vamos a multiplicar el número $z = 0 + i$ por sí mismo.

✓ Del problema motivador anterior sabemos el resultado: $(0 + i)(0 + i) = -1$.

✓ En este caso, $a_1 = a_2 = 0$, y $b_1 = b_2 = 1$

$$\begin{aligned} z \cdot z &= (0 + i)(0 + i) \\ &= [0 \cdot 0 - 1 \cdot 1] + i\,[0 \cdot 1 + 1 \cdot 0] \\ &= -1 + i \cdot 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

✓ Entonces, esta forma de definir la multiplicación entre dos números complejos sirve para resolver el problema motivador anterior.

✓ Una forma distinta de introducir los números complejos es definiendo primero unos objetos especiales.

✓ Puede mencionar a los estudiantes que son como las fracciones, para expresar completamente a una fracción se requieren de dos números...

✓ Bueno, a estos objetos especiales (todavía no mencione el nombre formal "*Número Complejo*") también requieren de dos números para expresarlos completamente.

✓ La diferencia es que los vamos a escribir como si se tratara de las coordenadas de puntos:

$$z = (0, 1)$$

es un ejemplo de ellos. [5]

✓ Nosotros podemos sumar dos de esos objetos.

✓ Por ejemplo, si $x = (a, b)$ es uno de esos objetos y $z = (u, v)$ es otro, la suma se encuentra con la siguiente fórmula:

$$x + z = (a + u, b + v)$$

✓ Dé algunos ejemplos numéricos para que entiendan el concepto.

✓ Es una buena idea escribir la fórmula para la suma de dos fracciones y hacer una comparación para que vean que la suma en este nuevo tipo de objeto es mucho más sencilla que en las fracciones.

✓ Ahora vamos con la fórmula de la multiplicación:

$$x \cdot z = (a\,u - b\,v, a\,v + b\,u)$$

✓ Aquí puede también dar algunos ejemplos numéricos.

✓ Después de que los estudiantes hayan captado la idea, sugiera que ellos multipliquen el objeto $(0, 1)$ por sí mismo.

[5] En realidad estamos hablando del número imaginario i.

- ✓ Entonces es cuando debe mencionar que estos nuevos objetos que "*habían inventado*" en realidad existen y se conocen como números complejos.
- ✓ Ahora sí puede formalizar todo e introducirlo para la solución de ecuaciones cuadráticas.
- ✓ Es importante que los estudiantes entiendan que los adjetivos "*imaginario*" y "*complejo*" no reflejan la realidad de los números. Es decir, los números imaginarios son tan "*reales*" (en el sentido del adjetivo real) como los números reales, y los números complejos no se llaman así porque sean más difíciles de entender. Simplemente ese nombre eligió quienes los empezaron a estudiar y así se quedaron... Maldecidos.
- ✓ Los números imaginarios se utilizan en el diseño de circuitos electrónicos (celulares, ipods, computadoras, etc.), instalaciones eléctricas (cuando hay que balancear cargas), diseño de ventiladores y otros aparatos eléctricos, para diseñar alas de avión, etc.
- ✓ Así que son tan tangibles como los reales.

Problema motivador

> PARÁBOLA / FUNCIÓN CUADRÁTICA
> *Un buscador de tesoros sabe que hay un baúl lleno de oro en el centro de Monterrey. El baúl está enterrado en un punto que está a la misma distancia del mercado Juárez como de la avenida Cuahutémoc, en la esquina de una calle. ¿Cómo puede localizar el baúl?*

- ✓ Debemos encontrar todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del mercado Juárez como de la avenida Cuahutémoc.
- ✓ Para esto debemos recordar la definición de parábola...

Definición 1.3.1

> PARÁBOLA
> *Es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado foco y de una recta que no pasa por el foco. A la recta se le llama directríz de la parábola.*

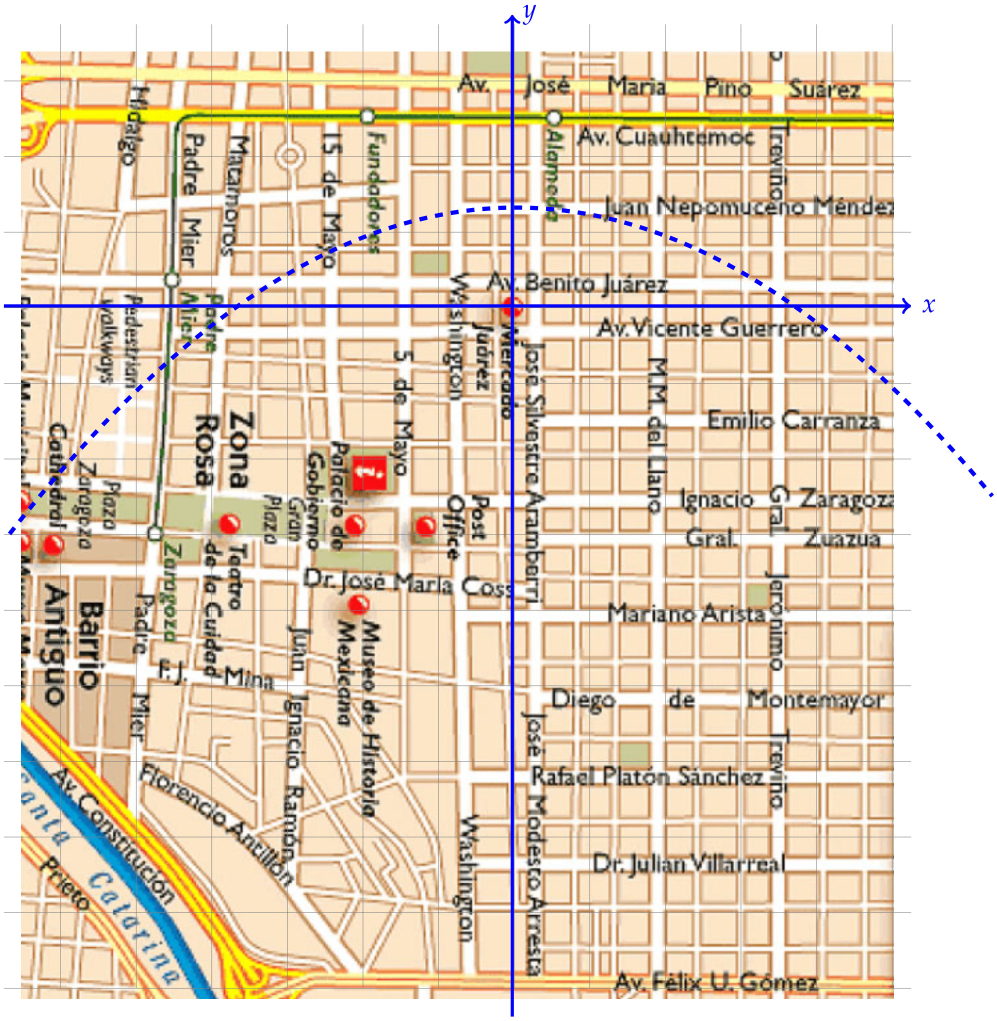
- ✓ Entonces, debemos encontrar una ecuación que satisfaga esa definición, y en este caso, se trata de una ecuación cuadrática[6].
- ✓ Para esto debemos dibujar un sistema de coordenadas y acordar una unidad de medida, y en base a este sistema de coordenadas encontrar la ecuación de la recta que representa la avenida Cuahutémoc y las coordenadas del punto sobre el cual está el mercado Juárez.

[6] La demostración de esto puede encontrarlo en prácticamente cualquier libro de geometría analítica.

✓ A partir de estos datos, la directriz de la parábola (la avenida Cuahutémoc) y el foco de la misma (el mercado Juárez) podemos encontrar la ecuación de la parábola que resuelve el problema.

✓ La ecuación que incluye a todos los puntos que están a la misma distancia del mercado Juárez como de la avenida Cuahutémoc, de acuerdo al sistema de coordenadas dibujado en el plano es:

$$y = -\frac{x^2}{10.4} + \frac{7.4}{10.4}x + \frac{27.39}{10.4}$$



✓ Ahora el buscador de tesoros puede elegir el punto sobre la parábola que esté en una esquina. Por ejemplo, una esquina que está a la misma distancia del mercado Juárez como de la Av. Cuahutémoc es la que se encuentra en la intersección de la Av. Juárez con la calle Gral. Gerónimo Treviño. Otro punto que debe ser de interés del buscador de tesoros es la esquina que se forma en Vicente Guerrero y Matamoros.

✓ Tal vez desee empezar desde el vértice de la parábola (entre las calles Washington y Aramberri). Mientras más se aleje de este punto, la distancia al mercado Juárez, como a la avenida Cuahutémoc crecerá.

✓ Es importante puntualizar que no todos los problemas matemáticos tienen solución única. Este ejemplo tiene múltiples soluciones. Para que este problema tenga solución única, necesitamos más información. Por ejemplo, la distancia del punto donde se encuentra el baúl del tesoro y el mercado Juárez y además si está a la derecha o izquierda del eje de la parábola.

✓ Con base en este problema podemos encontrar otras cónicas. [3]

✓ Por ejemplo, suponga que el baúl está enterrado más cerca de la avenida Cuahutémoc, tal que la distancia desde el baúl a la Av. Cuahutémoc es solamente un tercio de la distancia del tesoro al mercado Juárez. En este caso no obtendrá una parábola, sino una hipérbola.

✓ Si el caso fuera el opuesto, es decir, si estuviera más cerca del Mercado Juárez, por ejemplo, si la distancia del tesoro al mercado Juárez fuera la mitad que la distancia del punto buscado a la Av. Cuahutémoc, entonces obtendrá la gráfica de una elipse.

Problema motivador

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Encuentra un número entero tal que el dígito de las unidades de su cuadrado sea 7.

✓ Este problema está relacionado con los criterios de divisibilidad porque necesitamos estudiar en qué terminan en las unidades los cuadrados perfectos de los números enteros.

✓ Es importante que el estudiante se dé cuenta que si un número termina en las unidades en 1, su cuadrado también tendrá en la cifra de las unidades al dígito 1, independientemente del número de cifras que este número tenga, porque cuando multiplicamos, el dígito de las unidades del producto no se afecta cuando multiplicamos unidades por decenas, decenas por decenas, etc.

✓ Ahora se enlistan los diez distintos casos de las terminaciones de los números cuadrados perfectos:

Dígito	Terminación	Dígito	Terminación
0	0	5	5
1	1	6	6
2	4	7	9
3	9	8	4
4	6	9	1

✓ Como no hay algún caso en el que un cuadrado perfecto termine en 7 en las unidades, la solución a este problema es:

> *No existe algún número entero tal que su cuadrado perfecto tenga en el dígito de las unidades al número 7.*

✓ Aquí puede enfatizar que la solución de un problema matemático no necesariamente es un número, como en este caso, que se trató de una sentencia.

✓ Este problema motivador puede ser útil para que los estudiantes entiendan por qué llamamos "*trinomio cuadrado perfecto*" al resultado de elevar un binomio al cuadrado.

✓ La razón consiste en que tiene tres términos (trinomio) es el resultado de elevar al cuadrado otra expresión (cuadrado) y cuando calculamos la raíz cuadrada, el resíduo es cero (perfecto).

✓ Cuando a un número entero que es cuadrado perfecto le calculamos su raíz cuadrada, el resíduo, obviamente es cero. De ahí viene el adjetivo "*perfecto*".

En la sección 6.2 encontrará algunos trucos para realizar cálculos mentales que se pueden justificar utilizando álgebra elemental. Todos estos trucos pueden servir como problemas motivadores.

Problema motivador

> ANTIDERIVADAS / INTEGRAL INDEFINIDA / CÁLCULO INTEGRAL
> *Pensé una función... Calculé su derivada y obtuve:*
>
> $$\frac{dy}{dx} = e^x$$
>
> *¿Qué función pensé?*

✓ Aquí tenemos que encontrar la función que al derivar da como resultado e^x.

PROFESOR:

Están resolviendo la ecuación diferencial:

$$y' = y$$

✓ Pero la derivada de e^x es ella misma.

✓ Entonces, debió pensar la función:

$$y = e^x$$

✓ Aunque recordando que la derivada de una constante es cero, también pudo pensar cualquiera de la familia de funciones:

$$y = e^x + C$$

donde C es un número (constante) real.

Problema motivador

Constante de integración (significado físico)

Una piedra se dejó caer desde una altura h metros y su velocidad (en metros por segundo) está dada por:

$$v(t) = -9.81\,t$$

donde t está medido en segundos. Calcula la altura de la partícula (en metros) para cada valor de t.

✓ La derivada de la posición es la velocidad de la partícula.

✓ Entonces, la antiderivada de la velocidad nos da la posición de la partícula.

✓ Esto quiere decir que necesitamos calcular la antiderivada de la función:

$$v(t) = -9.81\,t$$

✓ ¿Qué función, cuando la derivamos, nos da una función lineal?

✓ La respuesta a esta pregunta es: "*una función cuadrática.*"

$$\text{Si } y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 2\,ax + b$$

✓ Debes observar que la antiderivada de una lineal es una cuadrática con el coeficiente principal igual a la mitad de la pendiente de la lineal.

✓ Esto nos sugiere que hagamos:

$$s(t) = -\frac{9.81}{2}\,t^2 + C = -4.905\,t^2 + C$$

✓ Ahora nos falta determinar el valor de la constante.

✓ Del texto del problema sabemos que la piedra se dejó caer desde una altura h.

✓ Esto nos está diciendo que en $t = 0$ la posición de la partícula es $s(0) = h$.

✓ Vamos a utilizar esta información para calcular el valor de la constante:

$$s(0) = -4.905\,(0)^2 + C = h \qquad \Rightarrow \qquad C = h$$

✓ Luego, la función que nos da la posición de la piedra para cada t es:

$$s(t) = -4.905\,t^2 + h$$

donde h es la posición desde la cual se dejó caer la piedra.

✓ Observa que si derivamos la función, obtenemos la función que nos dieron para la velocidad:

$$\frac{ds}{dt} = -(2)(4.905)\,t = -9.81\,t = v(t)$$

A este proceso de calcular la antiderivada se le llama integrar la función, y al resultado se le llama la integral indefinida.

Definición 1.3.2

INTEGRAL INDEFINIDA

Sean $y = F(x)$, $y = f(x)$ funciones tales que $F'(x) = f(x)$. Entonces, la integral indefinida de $f(x)$ respecto de x es $F(x) + C$, y esto se denota por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

El símbolo $\int$ se conoce como el signo de integración, $f(x)$ como el integrando y la constante C como la constante de integración.

1.4 Interpretaciones geométricas

> *Las mentes más inteligentes siempre razonan con la mayor sencillez posible.*
>
> — Anónimo.

1.4.1 Aritmética

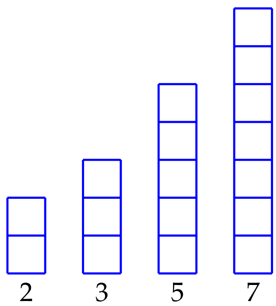
1.4.1.1 Números primos y números compuestos

Intuitivamente podemos interpretar la multiplicación de dos números como el área de un rectángulo.

Si los números que estamos multiplicando $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, el producto es compuesto siempre que $a, b \neq 1$. Entonces, podemos interpretar a los números compuestos como una cuadrícula de base b y altura a.

Por otra parte, si quisieramos dar esa misma interpretación a un número primo, uno de los dos números a o b, tendría que ser el número 1, porque los números primos tienen exactamente dos divisores naturales, siendo uno de ellos en número 1.

Esto nos indica que la interpretación geométrica de un número primo p es un rectángulo de base 1 y altura p.



Otra forma de interpretar este resultado es que si un rectángulo tiene por longitudes de sus lados números naturales, y el área es un número primo, entonces solamente hay un rectángulo que se puede formar con área p: $1 \times p$. Muchos estudiantes llaman a estos rectángulos "*con forma de tripa*".

Por otra parte, los números compuestos tienen al menos dos rectángulos distintos cuyas áreas sean $a \times b$, siendo $a, b \in \mathbb{N}$. El primero es el rectángulo de base $a \times b$ y altura 1; el otro es el de base b y altura a, aunque también puede haber más.

1.4.1.2 La Suma de Gauss

El mejor matemático de todos los tiempos, Carl F. Gauss, a la edad de 8 años realizó la suma de los primeros cien números naturales. Basándose en algunas propiedades de los números reales, calculó la suma con el siguiente procedimiento:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101
\end{array}
$$

De donde, por la definición de multiplicación, $2S = (101)(100)$. Ahora, al multiplicar por 100 agregamos dos ceros al 101, obteniendo: $2S = 10\,100$. De aquí que: $S = 5\,050$.
Podemos generalizar el resultado si consideramos la suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

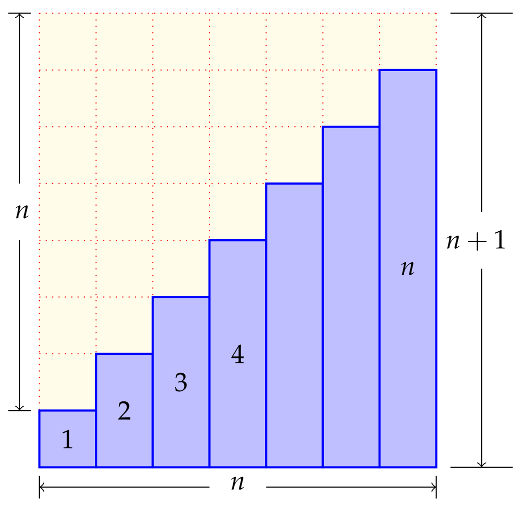
Porque, utilizando el método de Gauss, obtenemos:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
S & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}
$$

Observe que estamos sumando el número $n+1$ un total de n veces, de aquí que: $2S = n\,(n+1)$, y

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

El producto del numerador puede interpretarse como el área de un rectángulo de base n y altura $n+1$. Al sacar la mitad, estamos considerando solamente la suma que está sombreada en la siguiente representación geométrica:

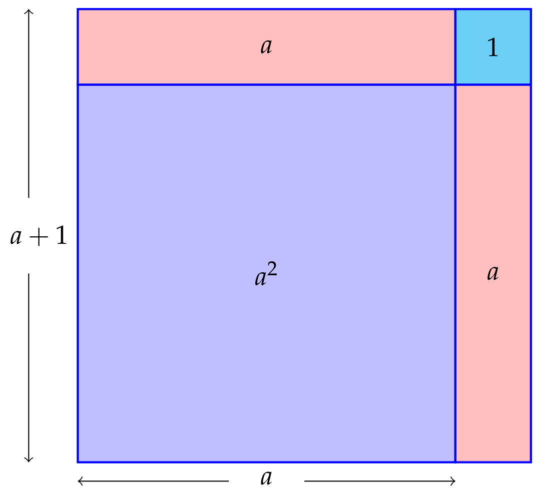


1.4.1.3 Suma de números impares

Es muy fácil observar por qué cuando sumamos los números impares desde 1 hasta $2k-1$ obtenemos siempre un cuadrado perfecto.
Es claro que un número impar puede escribirse de la forma: $2m+1$. Para evidenciar algebraicamente que $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$, comenzamos notando que la diferencia de dos cuadrados perfectos consecutivos siempre es un número impar:

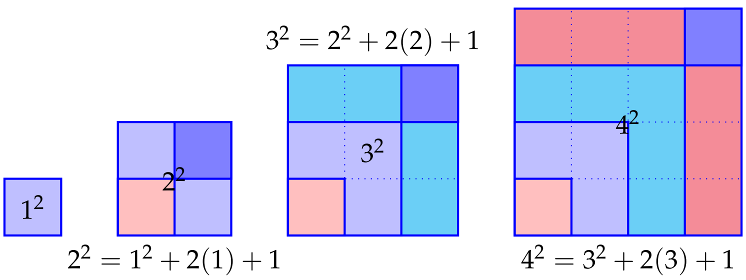
$$(a+1)^2-a^2=\left(\cancel{a^2}+2a+1\right)-\cancel{a^2}=2a+1$$

Ahora mostramos la intepretación geométrica de este primer hecho:



De la figura se observa inmediatamente que para conseguir $(a+1)^2$ a partir de a^2 hay que sumar dos veces a en los costados y en la esquina superior derecha hay que sumar 1, es decir, $a^2+\underbrace{(2a+1)}_{\text{impar}}=(a+1)^2$.

Para generar la interpretación geométrica de $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$, empezamos dibujando $1^2, 2^2, 3^2$, etc.



Ahora nos vamos a la parte algebraica, para utilizar $2k-1$, que evidentemente, también se trata de un número impar. Con el apoyo de la interpretación geométrica, podemos ver que:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 2(1)-1=1\\
2^2 &= [2(1)-1]+[2(2)-1]\\
&= 1+3=4\\
3^2 &= [2(1)-1]+[2(2)-1]+[2(3)-1]\\
&= 1+3+5=9\\
4^2 &= [2(1)-1]+[2(2)-1]+[2(3)-1]+[2(4)-1]\\
&= 1+3+5+7=16
\end{aligned}
$$

En realidad, siempre tenemos que sumar un número impar, porque de la figura que muestra que la diferencia de dos números cuadrados perfectos consecutivos es siempre un número impar, se deduce que si tengo n^2, le sumamos $2n+1$ y obtengo el siguiente cuadrado perfecto:

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

1.4.1.4 Suma de recíprocos de potencias de 2

Considere la siguiente situación práctica:

> *Luisa tiene una cuerda de un metro de largo. Como está aburrida y quiere matar el ocio, empieza a cortar la cuerda por la mitad exactamente. De los dos trozos que obtuvo, uno lo coloca en una mesa que está junto a ella y el otro trozo lo vuelve a partir por la mitad; de nuevo un trozo lo coloca en la mesa y el otro lo vuelve a cortar por la mitad. Si ella realiza n cortes, ¿cuál es la longitud de cuerda que está en la mesa?*

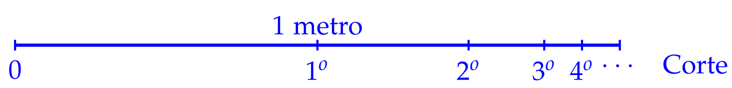
Precisamente, se trata de la suma que estamos estudiando:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\quad\cdots\quad+\frac{1}{2^n}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\quad\cdots\quad+\frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

Curiosidad: Si $a,b\in\mathbb{N}$, la igualdad $a^b=b^a$ se cumple solamente para 2 y 4.

En cada corte que hace Luisa a la cuerda, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa.

La misma situación práctica nos sugiere una interpretación en una recta numérica, la cual se muestra a continuación:



La recta numérica puede explicarse más fácilmente con la siguiente tabla:

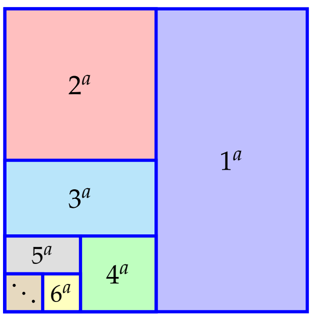
No. Corte	Longitud del corte
0	1 m
1	1/2 m
2	$1/2^2$ m
3	$1/2^3$ m
...	...
n	$1/2^n$ m

Debe notar que cada vez que corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces, el último trozo que sumó a la cantidad de cuerda que había en la mesa es igual al trozo con el que se quedó en la mano.

Esto significa que la suma de la cuerda que está en la mesa es igual a 1 metro de cuerda (la longitud inicial de la cuerda) menos la longitud del trozo que le quedó en la mano, cuya longitud es igual a la del último trozo que agregó.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} &= 1-\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{2^n-1}{2^n}\end{aligned}$$

Sin embargo, esta no es la única interpretación geométrica. Si se hubiera tratado de un terreno que íba a ser repartido entre todos los que llegaran de tal forma que a la primera persona le tocara la mitad del terreno, a la segunda persona la mitad de lo que quedara y a la siguiente persona la mitad que quedara, y así sucesivamente, tenemos una distinta sugerencia de la interpretación geométrica.



Este ejemplo puede servir para dar una noción intuitiva del concepto de límite. La suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

se aproxima mucho a 1 cuando el valor de n crece mucho, sin embargo, nunca se hace igual a 1, porque para que eso ocurriera, necesariamente el numerador debería ser igual al denominador, pero eso nunca ocurre, porque se está restando 1 a 2^n.

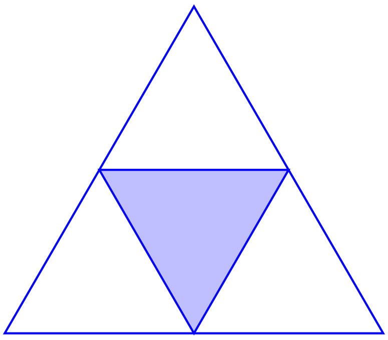
Por otra parte, cuando los valores de n crecen mucho, el número 1 se hace insignificante comparado con 2^n, y esto hace que el cociente:

$$\frac{2^n - 1}{2^n}$$

se aproxime cada vez más al número 1, pero como ya dijimos, nunca lo iguala.

1.4.1.5 Suma de recíprocos de potencias de 4

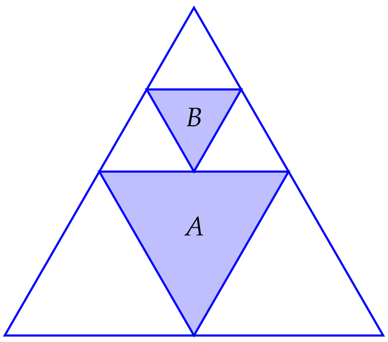
Para interpretar geométricamente con triángulos equiláteros "*anidados*".



Podemos obtener el triángulo interno uniendo los puntos medios del triángulo equilátero más grande.

Ahora observe que al dibujar el triángulo equilátero interno hemos dividido al triángulo más grande en 4 triángulos que tienen exactamente la misma área. Entonces, el área del triángulo interno es 1/4 del área del triángulo más grande.

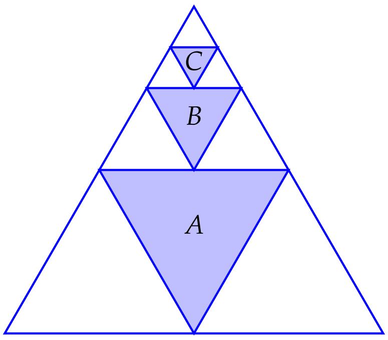
Ahora vamos a tomar el triángulo equilátero que está encima del triángulo que hemos sombreado y vamos a dividirlo en 4 partes iguales, utilizando el procedimiento anterior:



Observe que este nuevo triángulo (B) es igual a la cuarta parte del primer triángulo interno (A). Esto significa que las partes sombreadas suman:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$$

Ahora vamos a dibujar un tercer triángulo en el triángulo interno que está en la parte más alta del triángulo equilátero más externo.

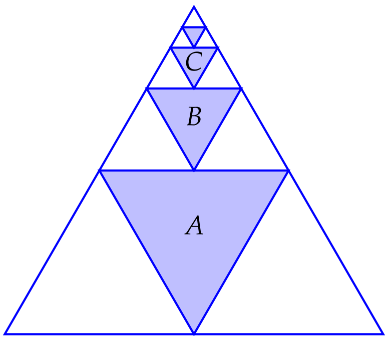


Observe que el área del triángulo C es igual a la cuarta parte del área del triángulo B.

Ahora la suma de los tres triángulos sombreados es:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$$

El siguiente triángulo lo nombramos D:

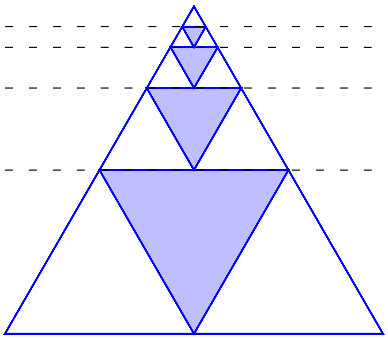


Ahora el área del triángulo D es igual a la cuarta parte del área del triángulo C. Ahora la figura representa la suma:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}$$

Así podemos ir dubujando triángulos *ad infinitum* y lograr obtener la suma que queremos...

De la figura podemos observar que el triángulo equilátero más externo en la figura queda "*rebanado*" en secciones horizontales.



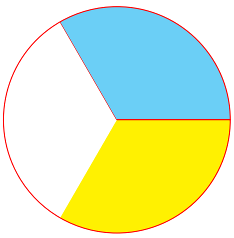
De cada una de las secciones horizontales cada vez que dibujamos un nuevo triángulo, siempre sombreamos un tercio de esa sección. Entonces, al sumar todas las secciones horizontales, estamos sumando un tercio del área de cada una y la suma total debe ser igual a un tercio. Esto es:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{1}{3}$$

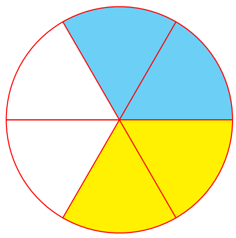
1.4.1.6 Fracciones equivalentes

Para calcular: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ *encontramos primero fracciones equivalentes:*

- Encontramos una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$
- Observe que sacamos la mitad a cada tercio:



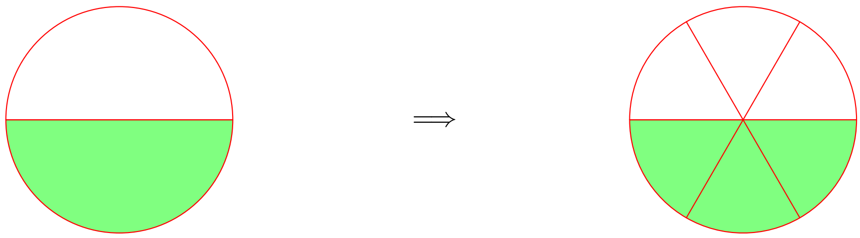
$\Longrightarrow$



- que equivale a haber multiplicado en el numerador como en el denominador por 2:

$$\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$$

- Ahora encontramos una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$
- En este caso sacamos la tercera parte de cada medio:



- Esto es equivalente a haber multiplicado en el numerador como en el denominador por 3:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

- La suma es ahora más sencilla:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

1.4.1.7 Porcentajes y fracciones

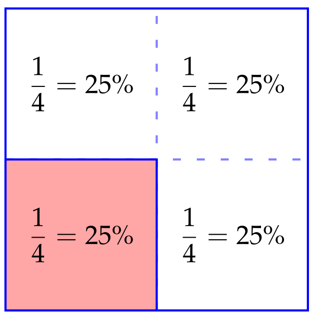
Ahora estudiaremos los porcentajes. Para esto debemos primero recordar que un porcentaje es una proporción[7].

Cuando hablamos del 25% de una cantidad, en realidad queremos decir que de cada 100, hemos tomado 25.

La interpretación geométrica del porcentaje se basa en las fracciones. Para interpretar correctamente un porcentaje de manera geométrica debemos simplificar la fracción a su mínima expresión:

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Ahora es muy sencillo representar geométricamente este porcentaje:



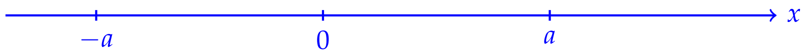
Encontrar la interpretación geométrica de otros porcentajes a través de este procedimiento es muy sencillo.

[7]Puede encontrar una introducción a las razones y proporciones en la sección 6.2.8

1.4.2 Álgebra

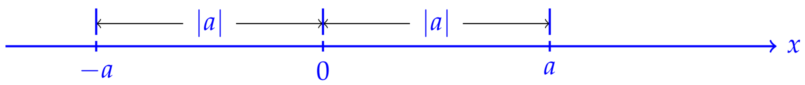
1.4.2.1 $a + (-a) = 0$

La propiedad del inverso aditivo puede interpretarse fácilmente en la recta numérica.
Cuando a un número le sumamos el mismo número, pero con signo negativo, obtenemos cero. Esto recuerda a la *ranita* que saltaba de unidad en unidad hasta llegar al número a.
Inicia desde el origen de la recta numérica y primero avanza hacia la derecha, porque suponemos que a es positivo. Después de haber llegado al punto que le corresponde al número a, empieza a avanzar, de nuevo a unidades, pero ahora en la dirección opuesta.
Lógicamente, termina en el origen de coordenadas porque avanza la misma distancia hacia la derecha que hacia la izquierda.



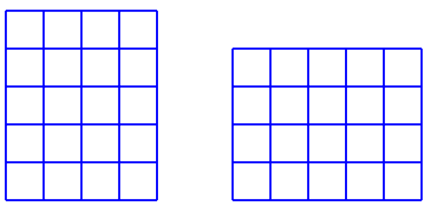
1.4.2.2 $|a|$

El valor absoluto de un número ($|a|$) se interpreta geométricamente como la distancia desde el origen hasta el punto que le corresponde al número a.



1.4.2.3 $a \times b = b \times a$

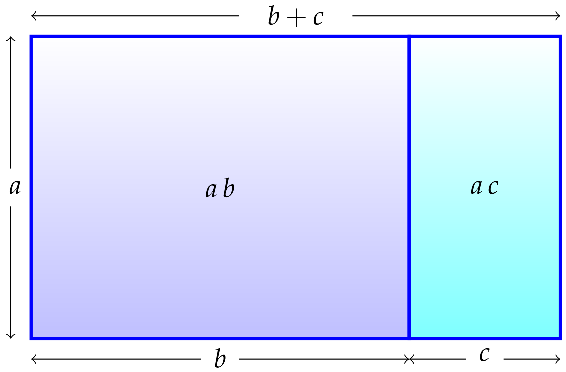
La conmutatividad para la multiplicación puede interpretarse geométricamente recordando que la multiplicación es una forma abreviada de sumar varias veces un mismo número. Multiplicar $a \times b$ significa sumar $a + a + \cdots + a$ un total de b veces, mientras que $b \times a$ se entiende como sumar $b + b + \cdots + b$ un total de a veces.
Si representamos como una tira de a cuadrados unitarios el número a, y de manera semejante el número b, la interpretación geométrica queda como sigue:



$a \times b$ $\qquad$ $b \times a$

1.4.2.4 $a\,(b+c) = a\,b + a\,c$

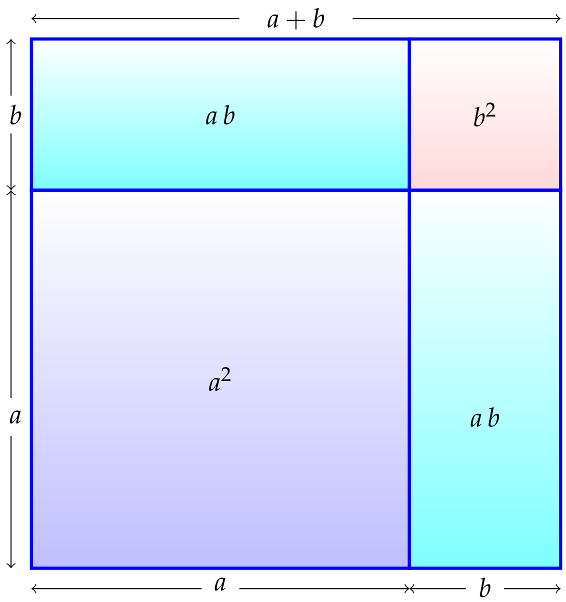
Podemos representar el producto $a\,(b+c)$ como el área de un rectángulo dividido en otros dos rectángulos. a es la altura común de los rectángulos, b y c son sus respectivas bases.



De la figura se concluye la ley distributiva, porque el área del rectángulo más grande $a\,(b+c)$ es igual a la suma de las áreas de los otros dos rectángulos: $a\,b + a\,c$.

1.4.2.5 $(a+b)^2$

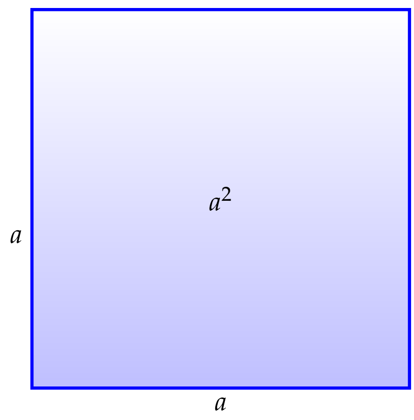
Dibujamos un cuadrado cuyos lados miden $a+b$. Encontramos las áreas de cada uno de las partes en que queda dividida y de ahí se ve inmediatamente que: $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$



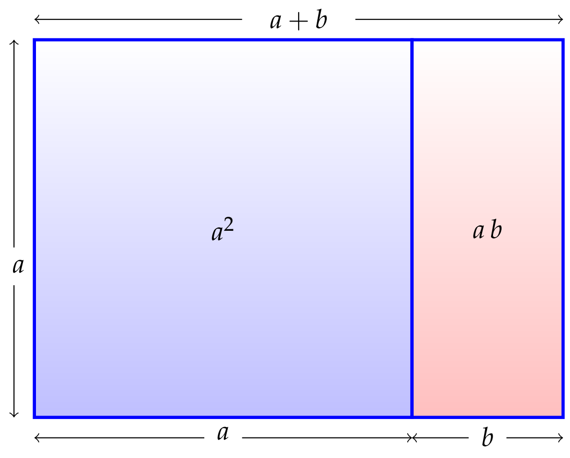
1.4.2.6 $(a+b)(a-b)$

Esta interpretación geométrica no es evidente de manera inmediata a partir de la figura, así que vamos a construirla por pasos.

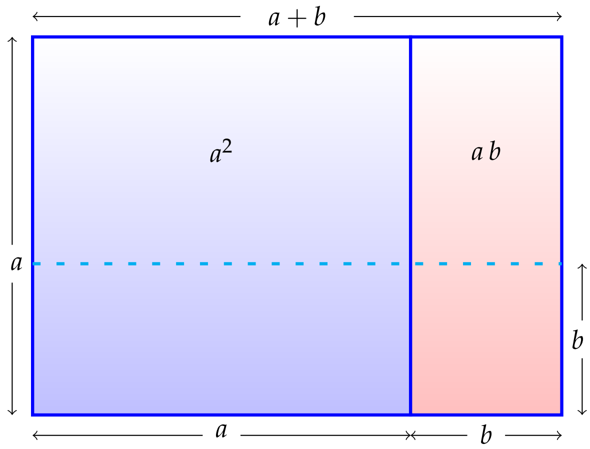
Paso 1. Construimos un cuadrado de lado a.



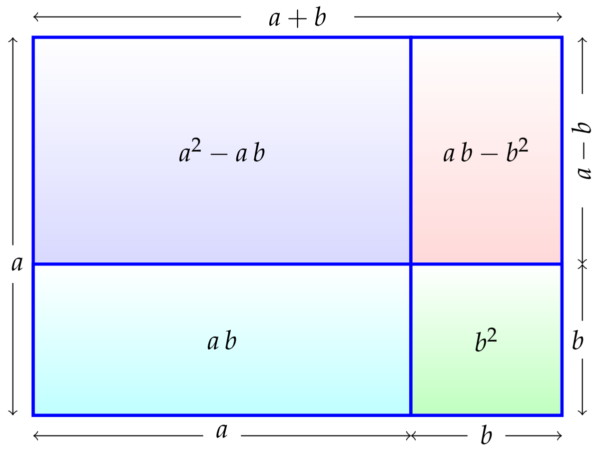
Paso 2. Agregamos un rectángulo de base b y altura a.



Paso 3. Formamos nuevas secciones, con una división horizontal en el primer cuadrado de altura b, formando así un rectángulo de base $a+b$ y altura b...



Paso 4. Esta división también genera un nuevo rectángulo de altura $a-b$ y de base b.

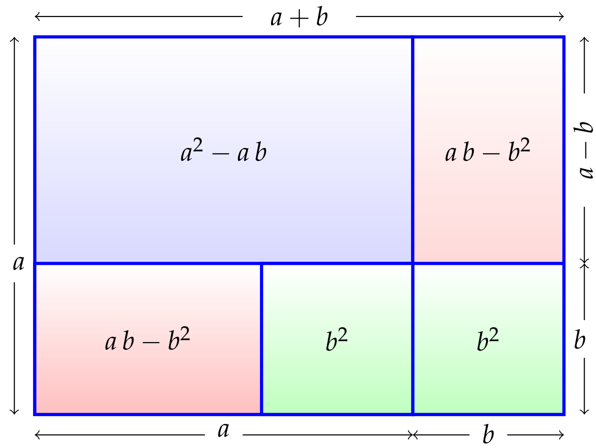


Paso 5. Ahora podemos ver que si sumamos las áreas de los rectángulos que están en la parte de arriba, obtenemos $a^2 - b^2$, porque:

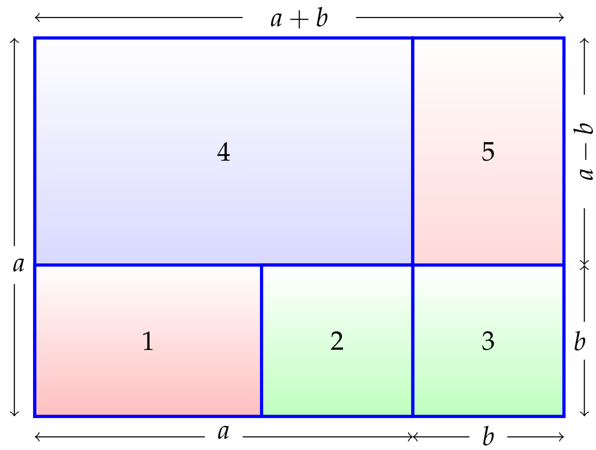
$$(a^2 - a\,b) + (a\,b - b^2) = a^2 - b^2$$

Con esto terminamos la explicación de la interpretación geométrica.

También podemos notar que el área del rectángulo que está en la parte inferior izquierda de la figura tiene área $a\,b$. Eso significa que el área de este rectángulo es b^2 unidades mayor que el área del rectángulo que está en la parte superior derecha de la figura, cuya área es $a\,b - b^2$. Esto nos siguiere dibujar un nuevo cuadrado de área b^2 en el rectángulo inferior derecho de la figura.



Paso 6. Ahora solamente vamos a considerar los tres rectángulos que están en la parte de la izquierda de la figura. Si comparamos esto con el cuadrado que dibujamos en el primer paso, vemos que $a^2 - b^2$ es igual al producto de $(a + b)(a - b)$, porque, si enumeramos los rectángulos de la siguiente manera:



Es fácil ver que el área del rectángulo 4 + el área del rectángulo 1 = área del rectángulo 4 + área del rectángulo 5, siendo ésta igual a $(a + b)(a - c)$.

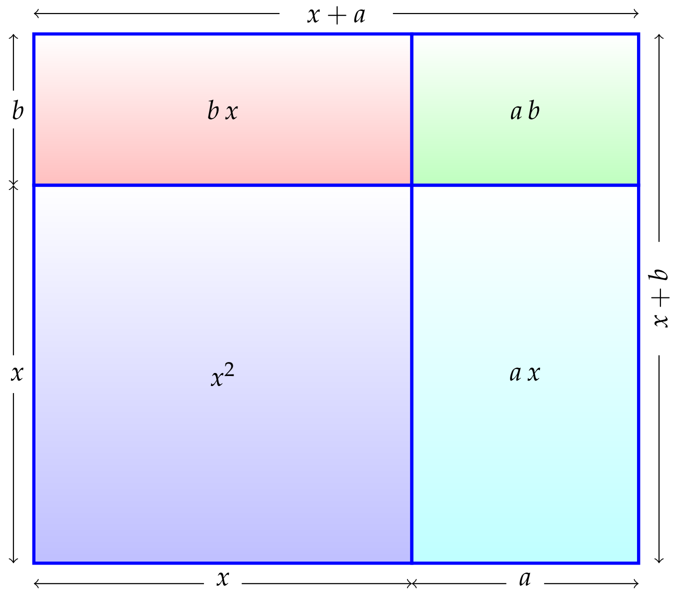
Pero la suma de las áreas de los rectángulos 1, 2 y 4 es igual a a^2, y el área del rectángulo 2 es b^2.

Entonces, la suma de las áreas de los rectángulos 4 y 1 = a^2- el área del rectángulo 2, y esto es igual a $a^2 - b^2$.

✓ Observamos que con la última división creada se forman 3 rectángulos (en realidad dos rectángulos y un cuadrado) $(a + b) \cdot (a - b)$ se interpreta como el rectángulo superior de base $a + b$ y altura $a - b$, pero podemos mover el rectángulo que está en la parte superior derecha y colocarlo en la parte de inferior izquierda, con lo que se hace evidente que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

1.4.2.7 $(x+a)(x+b)$

Esta interpretación geométrica es casi inmediata. Al igual que en el caso de elevar un binomio al cuadrado, podemos dibujar el rectángulo de base $x+a$ y altura $x+b$:



De la figura fácilmente se deduce el producto notable:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + a\,x + b\,x + a\,b\\ &= x^2 + (a+b)\,x + a\,b\end{aligned}$$

1.4.2.8 Raíces de la Ecuación cuadrática

Cuando resolvemos la ecuación cuadrática: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, en realidad estamos encontrando los puntos donde la función: $y = a\,x^2 + b\,x + c$ corta al eje x.

Generalmente para calcular las raíces utilizamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

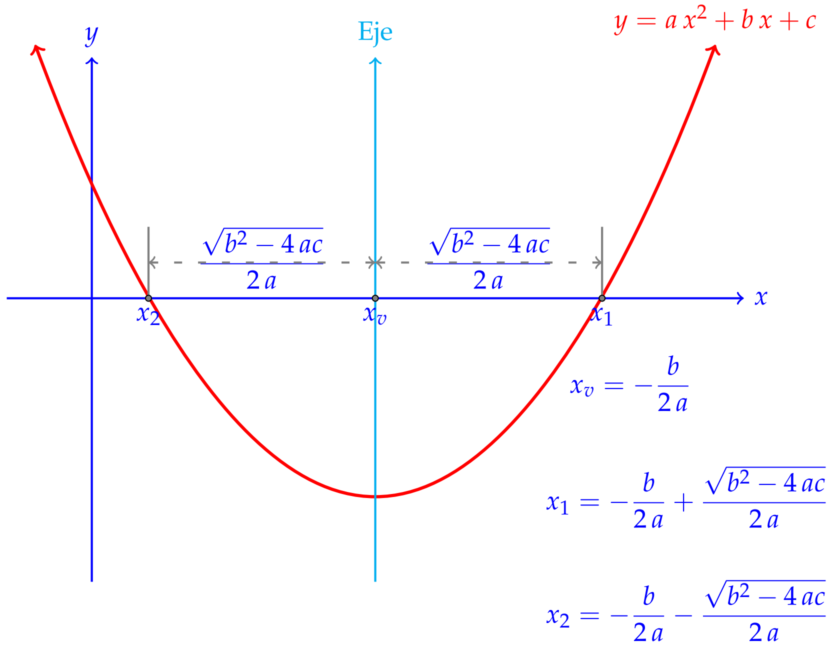
El símbolo $\pm$ indica que hay dos valores:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a} &= \frac{-b}{2\,a}+\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}\\
x_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a} &= \frac{-b}{2\,a}-\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}
\end{aligned}
$$

Si calculamos el promedio de estos valores, obtenemos:

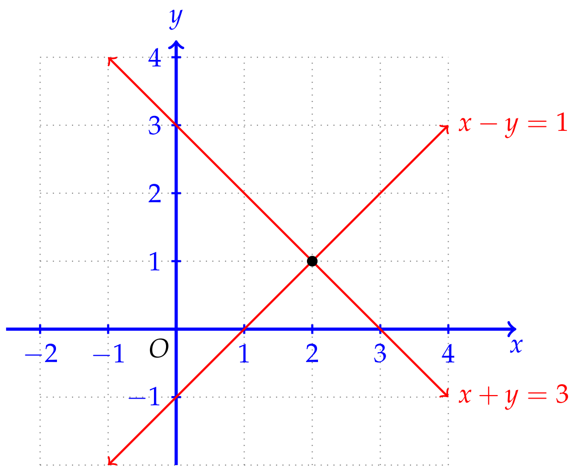
$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2}\\
&= \frac{\frac{-b}{2\,a}+\cancel{\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}}+\frac{-b}{2\,a}-\cancel{\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}}}{2}\\
&= \frac{\left(\frac{-\cancel{2}\,b}{\cancel{2}\,a}\right)}{2} = \frac{-b}{2\,a}
\end{aligned}
$$

Esto indica que el promedio de las raíces es $\bar{x} = x_v = -b/(2\,a)$. Observe que x_1 está a la derecha porque al valor x_v le sumamos una cantidad positiva, e igual a: $\sqrt{b^2-4\,ac}/(2\,a)$. Por otra parte, x_2 está a la izquierda porque restamos esa misma cantidad a x_v. Podríamos decir que esta es la razón por la que x_v está a la misma distancia de las raíces x_1 y x_2. Sin embargo, la verdadera razón está justificada en la simetría de la parábola, que es la que nos permitió calcular $x_v = \bar{x}$ a partir del promedio de x_1 y x_2.



1.4.2.9 Solución de un sistema de ecuaciones lineales

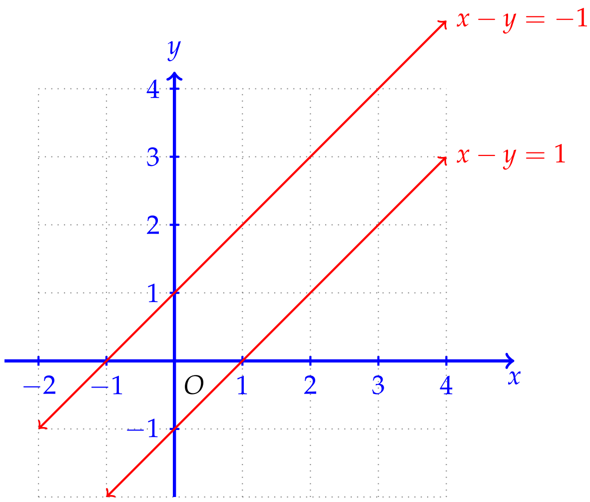
Geométricamente, la solución de un sistema de ecuaciones lineales ayuda a entender por qué algunos sistemas de ecuaciones lineales no tienen solución, y por qué algunos tienen un número infinito de soluciones.



En este caso, las rectas tienen pendientes distintas, es decir, no son paralelas, por eso se cortan en un punto. Este punto representa la solución del S.E.L.

1.4.2.10 S.E.L. sin solución

Cuando dos rectas tienen la misma pendiente y cada una corta al eje y en puntos distintos, el S.E.L. no tiene solución porque no hay punto alguno que pertenezca simultáneamente a ambas ecuaciones.



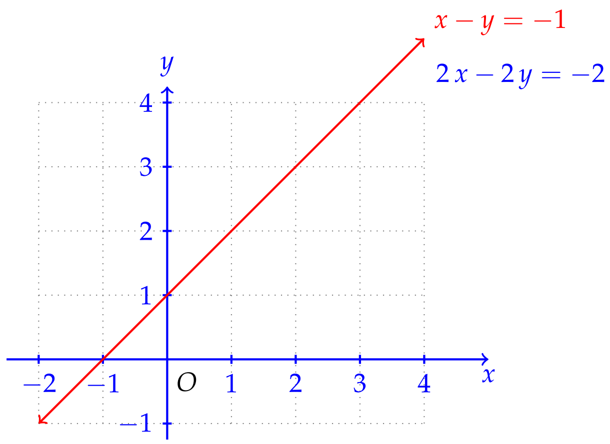
Existe la posibilidad de que una de las ecuaciones aparezca multiplicada por un coeficiente $r \neq 0$. Por ejemplo, si $r = 3$, la segunda ecuación puede escribirse: $3\,x - 3\,y = 3$.

Ahora el S.E.L. se escribiría:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3\,x - 3\,y = 3 \end{cases}$$

1.4.2.11 S.E.L. con infinitas soluciones

Cuando las dos ecuaciones son equivalentes, las dos rectas, además de ser paralelas, son la misma.



En este caso, cada punto que está sobre una recta, está también sobre la otra, porque se trata de la misma recta.

Entonces, como cada punto que satisfaga una ecuación satisface también a la otra, cada punto de la recta es solución del S.E.L.

En otras palabras, este S.E.L. tiene un número infinito de soluciones.

1.4.2.12 Determinante

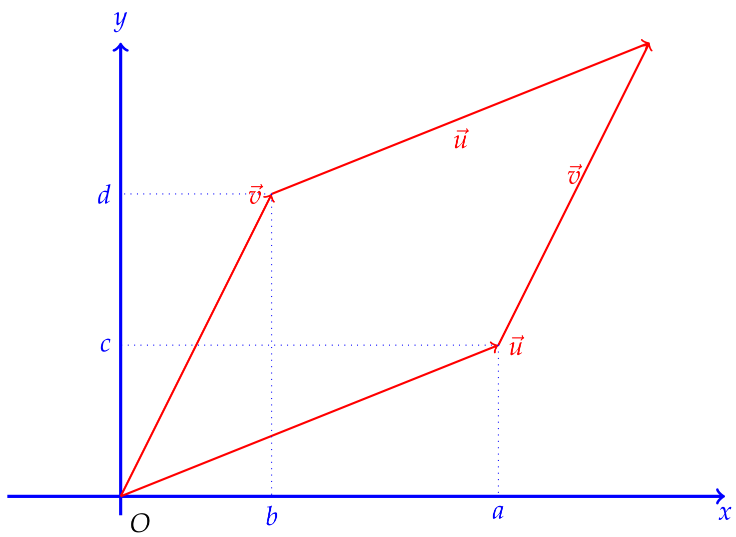
El determinante[8] se define formalmente como una función de n^2 números reales a $\mathbb{R}^1$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

La interpretación geométrica de esta función se consigue considerando cada columna como un vector.

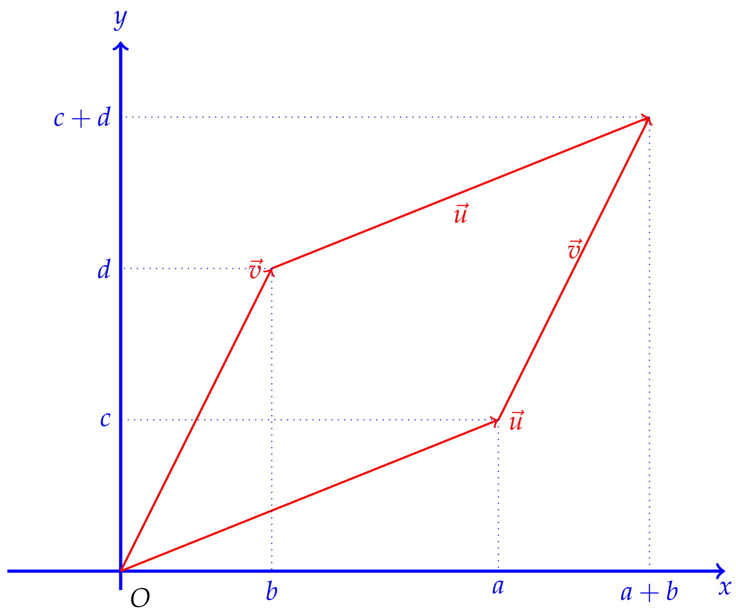
[8]En este material se considera solamente el determinante de 2×2. Esta interpretación puede generalizarse como un *hipervolumen*.

Graficamos entonces estos dos vectores $\vec{u} = \binom{a}{c}$ y $\vec{v} = \binom{b}{d}$ y formamos el paralelogramo generado con estos:

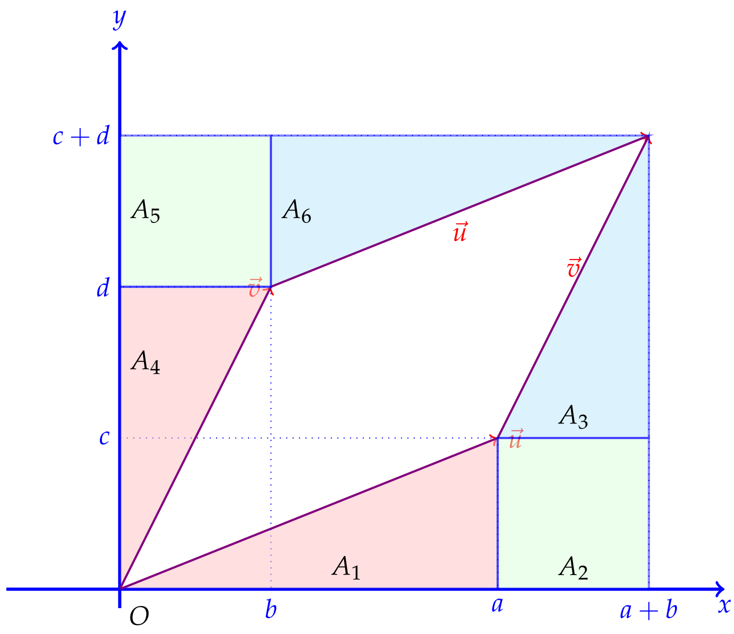


Ahora vamos a encontrar el área del paralelogramo.

Para esto, vamos a trazar rectas paralelas a los ejes para formar triángulos y trapecios para encontrar las áreas de éstos y finalmente a partir de ellos conocer el área del paralelogramo.



Ahora vamos a nombrar las áreas que se forman alrededor del paralelogramo para facilitar los cálculos.



Ahora calculamos las áreas, una por una:

$$A_1 = \frac{a\,c}{2} \qquad A_4 = \frac{b\,d}{2}$$
$$A_2 = b\,c \qquad A_5 = b\,c$$
$$A_3 = \frac{b\,d}{2} \qquad A_6 = \frac{a\,c}{2}$$

Ahora sumamos estas áreas y obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 &= \frac{a\,c}{2} + b\,c + \frac{b\,d}{2} + \frac{b\,d}{2} + b\,c + \frac{a\,c}{2} \\ \sum A_i &= a\,c + 2\,b\,c + b\,d \end{aligned}$$

Pero el área de todo el rectángulo que contiene al paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$A_r = (a+b)(c+d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$$

A esta área le restamos el área de las seis regiones que hemos encontrado y el resultado es igual al área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} A_r - \sum A_i &= (a\,c + a\,d + b\,c + b\,d) - (a\,c + 2\,b\,c + b\,d) \\ &= a\,d - b\,c \end{aligned}$$

que es precisamente el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

Debe notarse que si un vector es múltiplo de otro, digamos $\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$, entonces, el área del paralelogramo será igual a cero, porque los dos vectores tienen la misma dirección.

Esto lo interpretamos algebraicamente por el hecho de que un vector es múltiplo de otro en el caso de que el determinante sea cero.

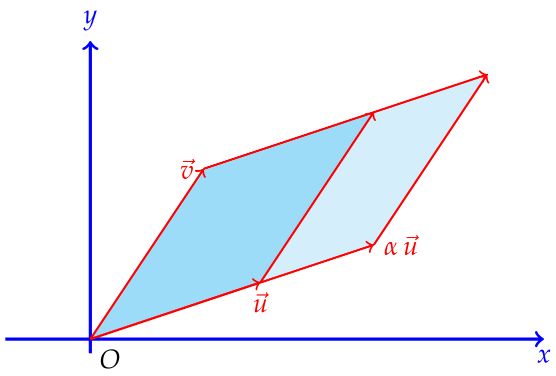
Traducido a la cuestión de las rectas, tenemos que un S.E.L. se representará geométricamente con dos rectas paralelas cuando el determinante formado por los coeficientes de las variables sea igual a cero.

De acuerdo a la regla de Cramer, en este caso podemos decir que el S.E.L. no tiene solución única. Esto debido a que no podemos dividir por cero. Existe la posibilidad de que se trate de un S.E.L. sin solución o con un número infinito de soluciones.

1.4.2.13 Propiedades de los determinantes

Una vez que se ha descubierto esta interpretación geométrica del determinante, podemos estudiar algunas de sus propiedades de una manera más sencilla. [4]

i. Si multiplicamos un vector por un escalar, el determinante queda multiplicado por el mismo escalar.

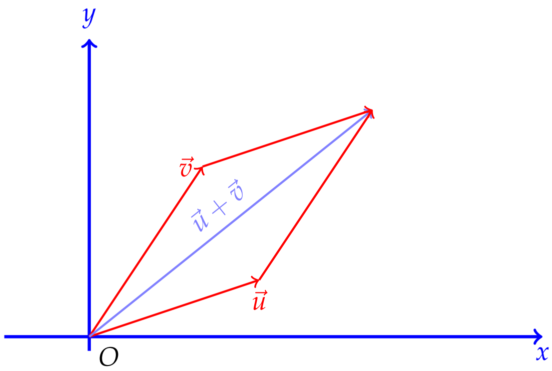


$$\begin{vmatrix} \alpha\,a & b \\ \alpha\,c & d \end{vmatrix} = \alpha\,a\,d - b\,\alpha\,c = \alpha\,(a\,d - b\,c)$$

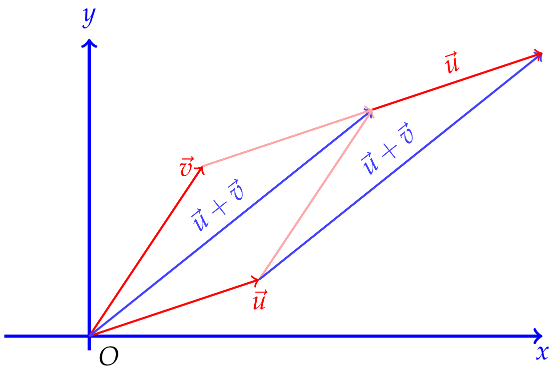
ii. Si sumamos dos vectores y sustituimos una columna por ese resultado, el determinante no cambia.
En este caso podemos empezar por la parte del determinante y después vemos su interpretación geométrica.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (a+b) & b \\ (c+d) & d \end{vmatrix} &= (a+b)\,d - b\,(c+d) \\ &= a\,d + \cancel{b\,d} - b\,c - \cancel{b\,d} \\ &= a\,d - b\,c \end{aligned}$$

Ahora sí, pasamos a la interpretación geométrica: empezamos dibujando los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}$.

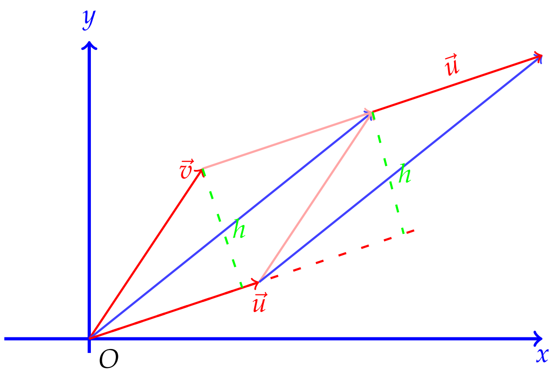


Ahora formamos un nuevo paralelogramo considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$.



Ahora debemos observar que hemos cambiado la forma del paralelogramo, pero sin cambiar su área.

Y su área no ha cambiado porque no se han modificado ni su base ni su altura.



Como la base de ambos paralelogramos es igual a la magnitud[9] del vector $\vec{u}$ y la altura es h también para ambos, el área de cada paralelogramo es:

$$A = \|\vec{u}\| \cdot h$$

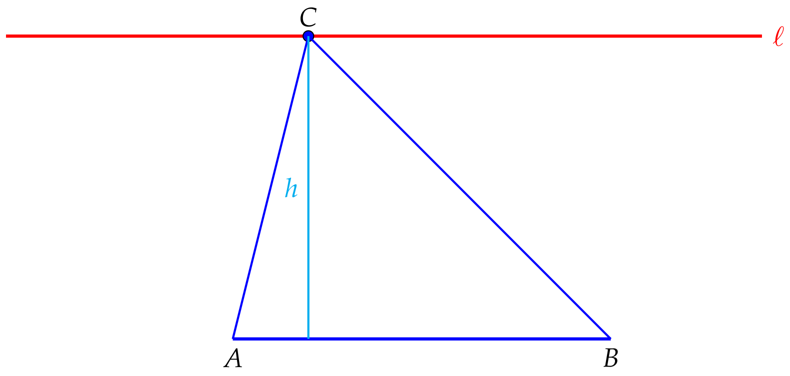
Aquí en realidad estamos utilizando el principio de Cavalieri, el cual se explica a continuación.

1.4.3 Otras

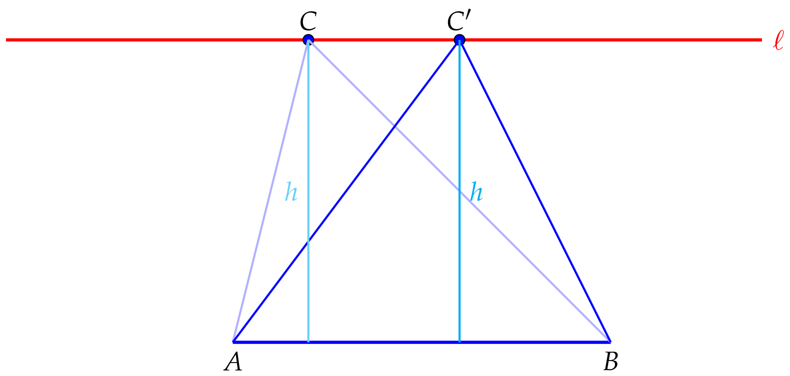
1.4.3.1 Principio de Cavalieri

El principio de Cavalieri dice que si en un triángulo se cambia su forma, pero sin cambiar ni su base ni su altura, entonces el área del mismo permanece inalterada.

Considere, por ejemplo el segmento $\overline{AB}$, el cual utilizaremos como base y la recta ℓ, paralela al segmento $\overline{AB}$. Sobre la recta ℓ elegimos un punto C cualquiera. El punto C será el tercer vértice de nuestro triángulo.



Si ahora elegimos otro punto sobre la recta ℓ, digamos C' distinto a C, habremos cambiado la forma del triángulo, pero sin cambiar ni su base ni su altura, con lo que el área quedará inalterada.



[9]La magnitud de un vector se define como su longitud. Sea $\vec{u} = (u_x, u_y)$. Entonces, la magnitud de $\vec{u}$, que se denota por: $\|\vec{u}\|$, es: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, por el Teorema de Pitágoras.

Así podemos mover el punto C hacia la derecha o hacia la izquierda... siempre que el tercer vértice del triángulo se encuentre sobre la recta ℓ el área del triángulo será la misma, dado que no ha cambiado su altura y su base es fija: $\overline{AB}$.

Este mismo principio se puede aplicar a los paralelogramos. Si cambio la forma del paralelogramo, pero no cambia su base ni su altura, entonces el área del paralelogramo queda constante.

También es posible aplicar este mismo principio generalizado al cálculo de integrales definidas, para el caso de área entre dos curvas.

Considere por ejemplo el siguiente problema y establezca usted mismo por qué se aplica el principio de Cavalieri.

Encontrar el área entre las curvas $y = x$ y $y = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Grafique las funciones $y = x$ y $y = \sqrt{x}$ en un mismo sistema de coordenadas y después grafique en otro sistema de coordenadas la función $y = \sqrt{x} - x$. Compare las gráficas y explique con las integrales cómo se aplica el principio de Cavalieri en este caso.

Para esto considere primero la siguiente integral:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right) dx$$

y después las integrales por separado:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

y

$$\int_0^1 x\, dx$$

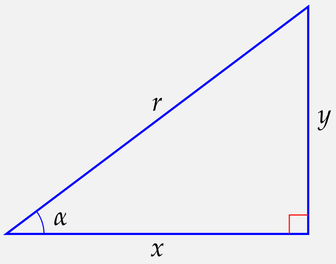
y encuentre la diferencia entre estas áreas.

Busque otro ejemplo aplicado a áreas y otro más aplicado a volúmenes de revolución.

1.4.3.2 Funciones trigonométricas

Son funciones que caracterizan a un ángulo dado α. Estas funciones se definen a partir de un triángulo rectángulo, de acuerdo a las proporciones de sus lados.

Las funciones trigonométricas, a partir del triángulo rectángulo, se definen como:

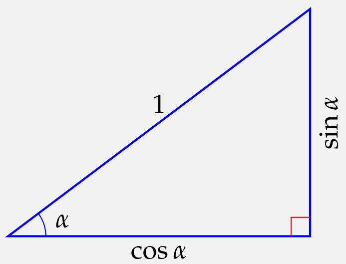


✓ $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ ✓ $\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$

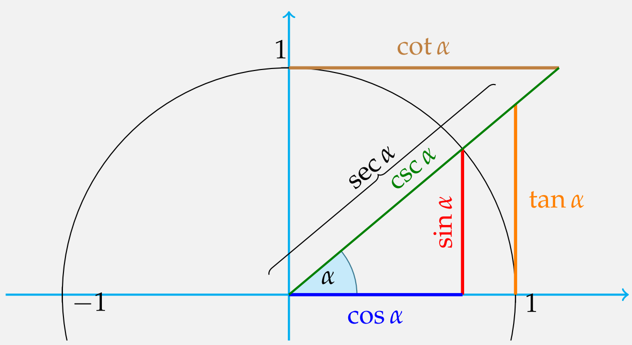
✓ $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ ✓ $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

✓ $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ ✓ $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Una forma de interpretar las funciones trigonométricas $\cos\alpha$, y $\sin\alpha$ se muestra en el siguiente diagrama:



En una circunferencia unitaria [15] también podemos representar las demás funciones trigonométricas:



En la figura anterior la función $\sec\alpha$ está representada por el segmento de recta que va desde el origen de coordenadas hasta el punto de intersección del segmento que representa a la función $\csc\alpha$ con el segmento que representa la función $\tan\alpha$.

Podemos mostrar que esto es así considerando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

De manera semejante, podemos justificar la interpretación geométrica de $\csc\alpha$:

$$\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$$

Puede ver la deducción de algunas identidades trigonométricas en la sección 5.1.3, a partir de la página 116.

También podemos deducir esta figura a partir de geometría plana, utilizando triángulos semejantes.

Por ejemplo, para justificar que $\tan\alpha$ es el segmento indicado en la figura, podemos observar que en la misma se forma un triángulo con los segmentos que representan $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$, junto con la hipotenusa que le corresponde (un radio de la circunferencia), y este triángulo es semejante al triángulo formado por el radio de la circunferencia (que está sobre el eje horizontal), el segmento que representa $\tan\alpha$ y el segmento que representa $\csc\alpha$. De ahí que:

$$\frac{\tan\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

que coincide con la identidad dada en la sección 5.1.3.

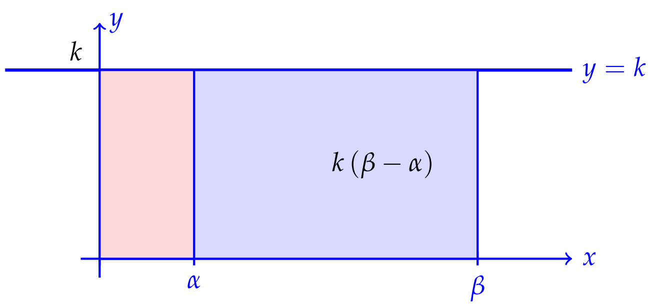
Igualmente, podemos encontrar triángulos semejantes que incluyan a los segmentos que representan las funciones $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$. En este caso, el radio que está sobre el eje vertical también será un lado del triángulo y obtendremos otra identidad trigonométrica.

1.4.3.3 Integral de una función constante

La integral de una función constante es:

$$\int_\alpha^\beta (k)\,dx = k\,x|_\alpha^\beta = k\,(\beta-\alpha)$$

Es muy claro que resulta ser el área de un rectángulo, porque en este caso, α y β representan los límites de integración, y k es la altura del rectángulo, el valor constante de la función.



1.4.3.4 Integral de una función lineal

Usted fácilmente puede encontrar la integral de la función: $y = m\,x + b$

$$\int_\alpha^\beta (m\,x+b)\,dx = m\,x^2 + b\,x|_\alpha^\beta = \frac{m\,(\beta^2-\alpha^2)}{2} + b\,(\beta-\alpha)$$

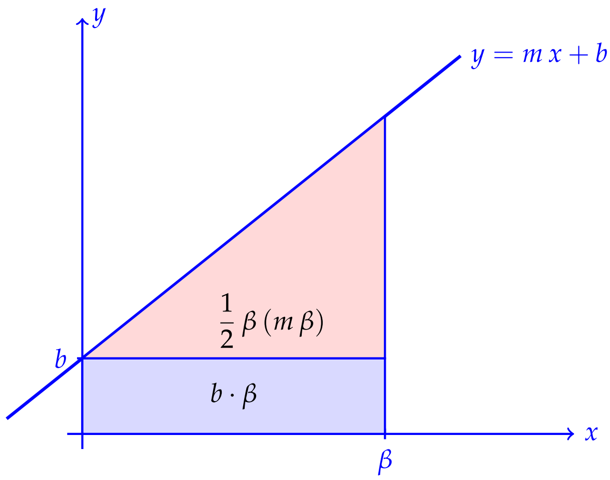
la cual puede interpretarse geométricamente como sigue:

Empezamos calculando primero:

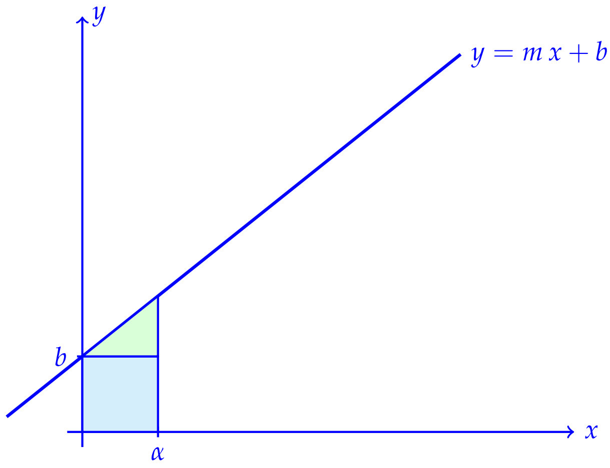
$$\int_0^b (mx+b)\,dx$$

la cual se interpreta de la siguiente manera: en el siguiente diagrama se ha sombreado un rectángulo que tiene sus vértices en los siguientes puntos: $(0,0)$, $(0,b)$, (β,b), $(\beta,0)$. Su área es: $b\cdot\beta$.

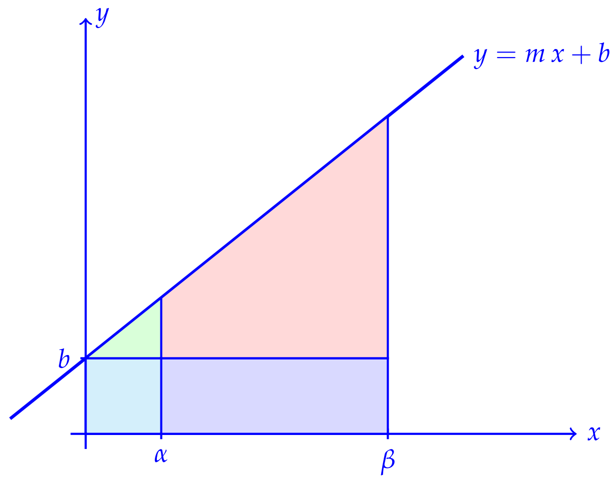
Por otra parte, se sombreó también el triángulo con los siguientes vértices: $(0,b),(\beta,b),(\beta,m\,\beta+b)$ y su área es: $\frac{1}{2}\,\beta\,(m\,\beta)=\frac{m\,\beta^2}{2}$



De manera semejante podemos proceder con la otra parte de la integral: el rectángulo ahora tiene vértices $(0,0),(\alpha,0),(\alpha,b),(0,b)$, el área en este caso es de: $b\,\alpha$ y el triángulo: $(0,b),(\alpha,b),(\alpha,m\,\alpha+b)$ y éste tiene un área de: $\frac{1}{2}\,m\,\alpha^2$



Ahora juntamos las dos gráficas y a la superficie sombreada de la primera gráfica le restamos el área sombreada de la segunda gráfica:



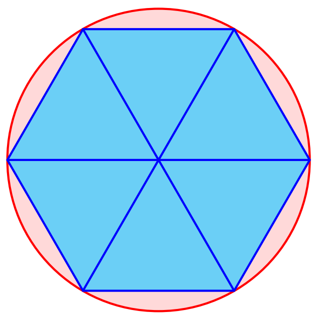
Ahora vamos a encontrar la diferencia de las áreas:

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 &= \left(\frac{1}{2}\,\beta\,(m\,\beta) + b\cdot\beta\right) - \left(\frac{1}{2}\,\alpha\,(m\,\alpha) + b\cdot\alpha\right)\\
&= \left(\frac{m\,\beta^2}{2} + b\cdot\beta\right) - \left(\frac{m\,\alpha^2}{2} + b\cdot\alpha\right)\\
&= \frac{m\,\beta^2 - m\,\alpha^2}{2} + b\cdot(\beta-\alpha)\\
&= \frac{m\,\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2} + b\cdot(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

1.4.3.5 π

Geométricamente, el número π tiene dos representaciones básicas.

La primera viene de la forma como se le definió. El número π es igual un cociente: $\pi = C/D$, donde C es el perímetro de una circunferencia y D es su diámetro. Podemos evidenciarlo a través de un hexágono regular inscrito en una circunferencia.



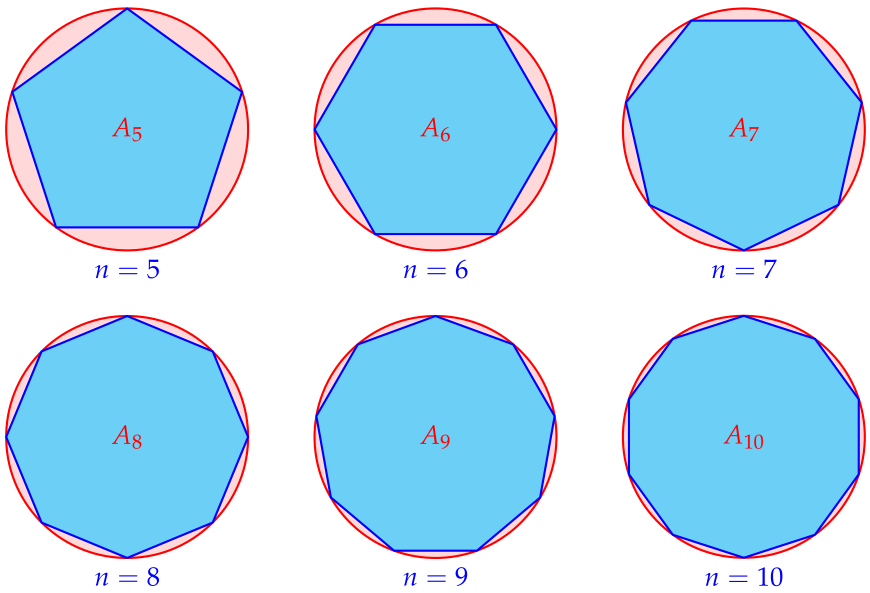
La medida de cada uno de sus lados es igual al radio de la misma. En total hay 6 lados, cada uno de los cuales es poco menor al arco que está *soportando*. Como cada lado mide lo mismo que un radio de la circunferencia, los 6 lados equivalen a 3 veces el diámetro. Entonces el cociente perímetro de la circunferencia $\div$ diámetro debe ser poco mayor a 3.

Enseñanza de
las Matemáticas

Una segunda interpretación geométrica del número π viene de la circunferencia unitaria.

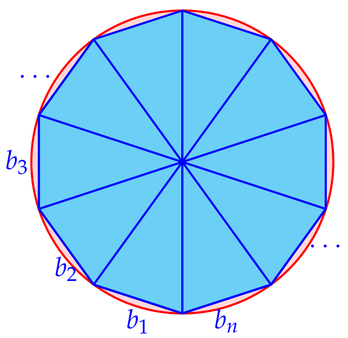
La fórmula para calcular el área de una circunferencia se puede deducir como sigue.

Si nosotros dibujamos un círculo, podemos dibujar dentro de él muchos triángulos del mismo tamaño, dibujando un polígono regular de n lados inscrito, como se muestra enseguida:



Si hacemos que el número de lados del polígono regular se haga muy grande, el área del polígono se parecerá cada vez más al área del círculo.

Ahora vamos a calcular el área del polígono de n lados. Para eso, vamos a dividirlo en triángulos con base en los lados del polígono como se muestra en la siguiente figura.



Dado que todos los triángulos que hemos dibujado tienen la misma área, cuando multipliquemos el área de un triángulo por n obtendremos el área del polígono regular inscrito al círculo. Observe que el perímetro del polígono regular es muy parecido al de la circunferencia. Cuando n es muy grande, la diferencia es muy pequeña que podemos considerarlas iguales.

Pero el perímetro del polígono es igual a la suma de las bases de los triángulos que dibujamos a partir del polígono.

La altura de un triángulo es prácticamente igual al radio del círculo. Entonces el área de cada triángulo es: $A_t = b_i \times r/2$. Y la suma de las áreas de todos los triángulos es igual al área del polígono, y aproximadamente igual al área del círculo:

$$\begin{aligned} A_c \approx A_p &= \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \cdots + \frac{b_n \cdot r}{2} \\ &= \frac{r}{2} \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

La suma de todas las bases de los triángulos es igual al perímetro del polígono inscrito al círculo. Pero ya dijimos que este perímetro es prácticamente igual al perímetro de la circunferencia, que es igual a $2\pi r$. Sustituyendo esto en la fórmula para calcular el área obtenemos:

$$A_c \approx A_p = \frac{r}{2} \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \frac{r}{2} \cdot (2\pi r) = \pi r^2$$

Cuando el número n de lados del polígono es infinitamente grande, el perímetro del polígono es igual a la longitud de la circunferencia y la fórmula para calcular el área del círculo es:

$$A_c = \pi r^2$$

para el caso de la circunferencia unitaria tenemos:

$$A_c = \pi \cdot (1)^2 = \pi$$

Entonces, podemos interpretar a este número como el área de una circunferencia unitaria.

Las interpretaciones geométricas que se han explicado en esta sección del texto son únicamente una pequeña muestra. Existen muchas otras interpretaciones geométricas que seguramente podrá encontrar en distintos libros de texto.

Por ejemplo, la interpretación geométrica de la derivada puede encontrarla en prácticamente cualquier libro de cálculo.

La idea es que los estudiantes puedan captar la forma como se relacionan diferentes ramas de las matemáticas con la geometría. En otras secciones del texto encontrará relaciones entre conceptos y en cada caso se indicará haciendo referencia a la página o sección donde puede encontrar información relacionada con cada uno.

Dos

Demostraciones Matemáticas

El matemático no le da valor a un testimonio o a una conjetura, sino que deduce todo a partir de razonamiento demostrativo, a partir de las definiciones y axiomas. De hecho, cualquier cosa que se construya a partir de conjeturas, de manera impropia se llama ciencia; pues las conjeturas pueden tener una dosis de opinión, pero no pueden producir conocimiento (perfecto).

— Reid Thomas

2.1

2.1 Axiomas

> *La ciencia se construye a partir de hechos de la misma manera que una casa se construye de piedras. Pero un montón de hechos no son una ciencia, así como un montón de piedras no son una casa.*
>
> — Jules Henri Poncairé.

Importancia de los axiomas

Las matemáticas descansan sobre un conjunto de suposiciones que soportan todas las demás proposiciones.

Cuando decimos "*menos por menos es igual a más*", lo decimos porque esto ya está demostrado con base en las propiedades de los números reales.

Definición 2.1.1

Axioma
En matemáticas, es algo tan evidente que no requiere demostración.

Por ejemplo, si ℓ_1, ℓ_2 son dos rectas, y se cumple que $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces es muy evidente que $\ell_2 \parallel \ell_1$. Este es un axioma.

Otro ejemplo de axioma es el siguiente: si a, b son números naturales, se cumple que $a + b = b + a$.

2.1.1 Propiedades de los números reales

Un campo es una estructura matemática que cumple con los siguientes axiomas.

Si a, b, c son números reales, entonces:

Suma	Multiplicación	Propiedad
$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$	Cerradura
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Conmutativa
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Asociativa
$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	Neutro
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$	Inverso
$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$		Distributiva

Los números reales cumplen con todos estos axiomas, por eso decimos que el conjunto de los números reales forman un campo.

Los números reales no son los únicos que forman un campo. El conjunto de los números racionales también forman un campo. El conjunto de los números enteros NO forman un campo. El conjunto de los números complejos SI forman un campo[1].

2.1.2 Relación de equivalencia (aplicaciones)

Reflexiva: $a = a$

Simétrica: Si $a = b$, entonces, $b = a$

Transitiva: Si $a = b$, y $b = c$, entonces, $a = c$

Esta estructura (matemática) es muy importante en matemáticas.

Se aplica, por ejemplo en geometría, la relación de paralelismo forma una relación de equivalencia. Esto es, sean a, b, c rectas en un plano. Entonces:

Reflexiva: $a \parallel a$

Simétrica: Si $a \parallel b$, entonces, $b \parallel a$

Transitiva: Si $a \parallel b$, y $b \parallel c$, entonces, $a \parallel c$

La relación de equivalencia puede explicarse de la siguiente manera práctica:

- La propiedad reflexiva en palabras nos dice que un número siempre es igual a sí mismo. En forma práctica podemos decir: "*yo siempre tengo mi propia edad*".

- La propiedad reflexiva dice en palabras que si un número es igual a otro, el segundo debe ser igual al primero. En forma práctica podemos decir: "*si yo tengo la misma edad que mi mejor amigo, entonces mi mejor amigo tiene mi edad*".

- La propiedad transitiva en palabras dice: si un primer número es igual a otro segundo número, y además el segundo número es igual a otro tercer número, entonces, el tercer número debe ser igual al primer número. En forma práctica:"*si mi mejor amigo tiene mi edad y además mi mejor amiga tiene la misma edad que mi mejor amigo, entonces, yo tengo la misma edad que mi mejor amiga*".

[1]Un número complejo tiene la forma $z = a + i\,b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, y además, $i^2 = -1$. Véase la motivación de este tema en la página 28.

2.1.3 Propiedades de la igualdad

Otras propiedades de la igualdad son: si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

Para la Suma: Si $a = b$, entonces, $a + c = b + c$

Para la multiplicación: Si $a = b$, entonces, $a \cdot c = b \cdot c$

Suma lateral: Si $a = b$ y además, $c = d$, entonces, $a + c = b + d$

Utilizando la relación de equivalencia y estas propiedades el matemático alemán Carl F. Gauss inventó el método de suma–resta, también conocido como eliminación, para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Si observa, la propiedad de la igualdad para la suma nos permite sumar dos ecuaciones, mientras que la propiedad para la multiplicación nos permite multiplicar ambos lados de la igualdad por un número real cualquiera (incluido cero, aunque esto no nos ayuda a resolver un S.E.L.).

Precisamente estos dos pasos son los que llevamos a cabo cuando resolvemos un S.E.L. a través de este método.

Por ejemplo considere el siguiente S.E.L:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad de igualdad para la suma lateral. De esta manera nos queda una sola ecuación con una sola incógnita:

$$\begin{array}{rcl} x + \cancel{y} &=& 10 \\ x - \cancel{y} &=& 2 \\ \hline 2\,x \quad &=& 12 \end{array}$$

Aplicando la propiedad de la igualdad para la multiplicación:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2\,x = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 12$$
$$x = 6$$

de donde fácilmente encontramos que $x = 6$. Utilizando cualquiera de las ecuaciones del S.E.L. podemos encontrar el valor de y. Para esto, traducimos a palabras lo que dicen.

La ecuación: $x + y = 10$, nos dice: "*cuando al valor de x le sumamos y, obtenemos 10*". Sabemos que $x = 6$, entonces es muy fácil deducir que y debe ser igual a 4, porque $6 + 4 = 10$, y así cumple con la condición impuesta por la ecuación.

Si hubieramos preferido la otra ecuación, tendríamos la siguiente información: "*Al valor de x le restamos y y obtenemos 2.*" Pero ya sabemos que $x = 6$. Esto nos indica, de nuevo, que $y = 4$, porque solamente así tendremos: $6 - 4 = 2$.

El estudiante debe reconocer a las literales algebraicas como números. Las letras en matemáticas representan objetos matemáticos. En este caso, estamos hablando de números reales. Bien pueden representar números naturales, enteros, racionales o complejos. En otros casos pueden representar objetos más abstractos como los vectores, matrices, rectas, funciones, etc.

Lo que el estudiante debe entender es que aplicamos las propiedades de los números porque para nosotros las literales x, y, en este caso son números.

Basándonos en las propiedades de los números reales y de la igualdad podemos demostrar [2] otras propiedades que presentan los elementos de conjuntos de números que formen un campo.

Por ejemplo, para demostrar que si $a \cdot b = 0$, entonces se sigue que, bien $a = 0$, bien $b = 0$, o tal vez ambos sean iguales a cero, procedemos como sigue:

Teorema 2.1.1
Si $a \cdot b = 0$, entonces, bien $a = 0$, bien $b = 0$.

Demostración.
Supongamos que, en efecto, $a \cdot b = 0$, necesitamos probar que si $a \neq 0$, entonces necesariamente $b = 0$. Pero si $a \neq 0$, por la propiedad del inverso de la multiplicación, existe a^{-1}, con la propiedad de que $a^{-1} \cdot a = 1$, con lo que:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a^{-1} \cdot a \cdot b &= a^{-1} \cdot 0 \end{aligned}$$

Pero cualquier número multiplicado por cero es igual a cero, y ya habíamos dicho que: $a^{-1} \cdot a = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 \cdot b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado.

Esta propiedad es la que utilizamos cuando resolvemos ecuaciones cuadráticas por factorización. Por ejemplo, cuando tenemos:

$$(x + 7)\,(x - 5) = 0$$

para que el producto de los dos números $(x + 7)$ y $(x - 5)$ sea igual a cero, se requiere que al menos uno de ellos sea igual a cero. Es por eso que para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación, igualamos a cero cada uno de los factores y a partir de estas igualdades encontramos sus raíces.

Es importante que los estudiantes entiendan que sus procedimientos se basan en estas propiedades básicas, aunque no siempre se requiere demostrar de la manera como se mostró este hecho. Los alumnos generalmente conocen (por experiencia previa) que siempre que multiplican un número por cero obtienen cero y que si multiplican dos números distintos de cero el producto es siempre distinto de cero.

Sin embargo, si el tiempo le permite justificar este hecho, puede ayudar a algunos estudiantes a ver con claridad las cosas, aunque se corre el riesgo de confundir a otros.

De manera semejante podemos justificar la propiedad de la igualdad de cancelación para la suma y para la multiplicación:

Teorema 2.1.2
Si $a+b=a+c$, entonces, $b=c$.

Demostración.
Si $a+b=a+c$, entonces,

$$\begin{aligned} a+b &= a+c \\ -a+(a+b) &= -a+(a+c) \\ (-a+a)+b &= (-a+a)+c \\ 0+b &= 0+c \\ b &= c \end{aligned}$$

Y por otra parte,

Teorema 2.1.3
Si $a\cdot c=b\cdot c$, y $c\neq 0$, entonces, $a=b$.

Demostración.
Si $a\cdot c=b\cdot c$, y $c\neq 0$, entonces existe c^{-1}, con la propiedad de que $c\cdot c^{-1}=1$, y de aquí se sigue:

$$\begin{aligned} a\cdot c &= b\cdot c \\ (a\cdot c)\cdot c^{-1} &= (b\cdot c)\cdot c^{-1} \\ a\cdot(c\cdot c^{-1}) &= b\cdot(c\cdot c^{-1}) \\ a\cdot 1 &= b\cdot 1 \\ a &= b \end{aligned}$$

No se mencionan las propiedades que se utilizan para cada demostración (asociativa, inverso, etc.) porque son evidentes.

Tres

Teoría de números

> *La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de números es la reina de las matemáticas.*
>
> — Carl F. Gauss

3.1 Divisibilidad

Definición 3.1.1

DIVISIBILIDAD.
Sean a, b, m números naturales. Decimos que el número b divide al número a, o de forma equivalente, que el número a es divisible por el número b, si existe un número natural m tal que $a = b \cdot m$.
Este hecho, matemáticamente se denota por: $b|a$ y se lee: el número b divide al número a.

Si $a = b \cdot m$, el número a es múltiplo del número b, así como del número m, y también, los números b, m son divisores del número a.

Si se cumple que: $b < a$, entonces decimos que el número b es un divisor propio del número a.

Teorema 3.1.1
Sean a, b, c, m, n números naturales. La divisibilidad tiene las siguientes propiedades:

i. Si $b|a$, entonces $b|(a \cdot c)$.
ii. Si $b|a$, y $a|c$, entonces $b|c$.
iii. Si $b|a$, y $b|c$, entonces $b|(a + c)$.
iv. Si $b|a$, y $b|c$, entonces $b|(a - c)$.
v. Si $b|a$, y $b|c$, entonces $b|(a \cdot m + c \cdot n)$.
vi. Si $b|a$ entonces $b \leq a$.
vii. Si $a \neq 0$, entonces $a|a$.
viii. Si $a|b$, y $b|a$, entonces $a = b$.
ix. $1|a$.

3.1.1 Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad generalmente se dan sin demostración, a pesar de que la demostración del por qué funcionan son muy sencillas.

Para demostrar los criterios de divisibilidad, primero vamos a dar algunas definiciones que requerimos.

Definición 3.1.2

CERRADURA
Sea $\mathbb{A}$ un conjunto no vacío, y sea $\circ$ una operación binaria definida para cualesquiera dos elementos $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$. Si $\alpha \circ \beta \in \mathbb{A}$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, entonces, decimos que el conjunto $\mathbb{A}$ es cerrado bajo la operación $\circ$.

Teorema 3.1.2
Los múltiplos del número k son cerrados bajo la suma.

Demostración.
Sea k un número natural. Podemos escribir $a = k \cdot m$, y $b = k \cdot n$.
Por definición, a y b son múltiplos del número k.

PROFESOR:

Demuestre que los múltiplos del número k también son cerrados bajo la multiplicación por un escalar $c \in \mathbb{Z}$.

La suma de estos números es:

$$a + b = k \cdot m + k \cdot n = k \cdot (m + n)$$

que es también un múltiplo del número k.

Definición 3.1.3

NÚMERO PRIMO.
Un número natural es primo si tiene exactamente dos divisores (naturales).

Los primeros números naturales que son números primos son[1]:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	73
79	83	89	97	101	103	107	109	113	127

Definición 3.1.4

NÚMERO COMPUESTO.
Un número natural es compuesto si tiene 3 o más divisores naturales.

Los primeros números naturales que son números compuestos son:

4	6	8	9	10	12	14	15	16	18
20	21	22	24	25	26	27	28	30	32

Criterio de divisibilidad

CRITERIO DEL 2.
Si la cifra de las unidades es una cifra par, entonces el número es divisible entre dos.

El criterio de divisibilidad del 2 es muy obvia. Esto se debe a que los múltiplos de 2 aparecen cada dos números naturales.

Criterio de divisibilidad

CRITERIO DEL 3.
Si la suma de las cifras es un múltiplo de 3, entonces el número es divisible entre tres.

[1] El número 1 no es un número primo, pues solo tiene un divisor natural.

Para demostrar este criterio escribimos el número $abcd$ de la siguiente forma[2]:

$$\begin{aligned} abcd &= 1\,000\,a + 100\,b + 10\,c + d \\ &= 999\,a + a + 99\,b + b + 9\,c + c + d \\ &= 999\,a + 99\,b + 9\,c + (a + b + c + d) \\ &= 3\,(333\,a + 33\,b + 3\,c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

En el renglón anterior podemos ver que estamos sumando dos números: $3\,(333\,a + 33\,b + 3\,c)$ y $(a + b + c + d)$.

Por definición, $3\,(333\,a + 33\,b + 3\,c)$ es un múltiplo de 3, por lo que este número es divisible por 3.

El otro número: $(a + b + c + d)$, puede ser múltiplo de 3, pero no necesariamente es. Si $(a + b + c + d)$ es un múltiplo de 3, entonces estaremos sumando dos números que son múltiplos de 3 y por cerradura, el número $abcd$ será múltiplo de 3, siendo, entonces, divisible por 3.

Criterio de divisibilidad

Criterio del 4.
Si las dos últimas cifras del número forman un múltiplo de 4, entonces el número es divisible entre cuatro.

Esto se sigue del hecho de que el número 100 es un múltiplo de 4, dado que $100 = 4 \times 25$. De aquí que cualquier múltiplo de 100 también sea múltiplo de 4. Entonces el número 1 000, 10 000, etc., y sus múltiplos también son divisibles entre 4.

Si el número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4, tenemos la suma de dos números que son múltiplos de 4 y el resultado será múltiplo de 4, y esto indica que es divisible entre 4.

Criterio de divisibilidad

Criterio del 5.
Si la última cifra del número es 5 ó 0, entonces el número es divisible entre cinco.

Esto se sigue de que los múltiplos de 5 terminan o en 5, o en 0.

Criterio de divisibilidad

Criterio del 6.
Si el número puede dividirse entre 2 y entre 3 simultáneamente, entonces el número es divisible entre seis.

Si un número puede dividirse entre 2, puede escribirse de la forma: $p = 2\,m$. Si ese mismo número puede dividirse entre 3, puede escribirse como $p = 3\,n$.

[2]Este procedimiento puede generalizarse a números de más cifras.

Entonces, el número puede expresarse como: $p = 2 \cdot 3 \cdot k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Pero $p = 2 \cdot 3 \cdot k = 6\,k$. Esto indica que el número es múltiplo de 6, y que, por tanto, se divide entre 6.

Criterio de divisibilidad

CRITERIO DEL 8:
Si las tres últimas cifras del número forman un múltiplo de 8, entonces el número es divisible entre 8.

Esto se sigue del hecho de que el número 1 000 es un múltiplo de 8, dado que $1\,000 = 8 \times 125$. De aquí que cualquier múltiplo de 1 000 también sea múltiplo de 8. Entonces los números 10 000, 100 000, etc., y sus múltiplos, también son divisibles entre 8. Obviamente, si sumamos varios de esos números que ya son múltiplos de 8, el resultado también será múltiplo de 8, por cerradura.

Si el número formado por las tres últimas cifras es un múltiplo de 8, tenemos la suma de dos números que son múltiplos de 8 y esto indica que es divisible entre 8.

Criterio de divisibilidad

CRITERIO DEL 9:
Si la suma de las cifras es un múltiplo de 9, entonces el número es divisible entre 9.

Para demostrar este criterio escribimos el número $abcd$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} abcd &= 1\,000\,a + 100\,b + 10\,c + d \\ &= 999\,a + a + 99\,b + b + 9\,c + c + d \\ &= 999\,a + 99\,b + 9\,c + (a + b + c + d) \\ &= 9\,(111\,a + 11\,b + c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

Es evidente que el número, $9\,(111\,a + 11\,b + c)$ es un múltiplo de 9, mientras que si el número: $(a + b + c + d)$, es múltiplo de 9, entonces estaremos sumando dos números que son múltiplos de 9 y por cerradura, el número $abcd$ será divisible por 9.

La siguiente definición es una notación inventanda por Carl F. Gauss.

Definición 3.1.5

CONGRUENCIAS
Si $a = b \cdot m + r$, se entiende que $b|(a - r)$, y escribimos: $a \equiv r \mod b$ para indicarlo y se lee “a es congruente con r módulo b”.

Teorema 3.1.3
Sean a, b, c, r, s números naturales. Las congruencias tienen las siguientes propiedades:

i. Si $a \equiv r \mod b$, y $0 \leq r < b$, entonces r es el residuo de dividir a entre b

ii. $a \equiv r \mod b \quad \Leftrightarrow \quad b|(a-r) \quad \Leftrightarrow \quad a = b \cdot m + r$

iii. $a \equiv a \mod b$

iv. Si $a \equiv r \mod b$, entonces $r \equiv a \mod b$

v. Si $a \equiv r \mod b$, y $r \equiv s \mod b$, entonces $a \equiv s \mod b$

vi. Si $a \equiv r \mod b$, y $c \equiv s \mod b$, entonces $a + c \equiv (r+s) \mod b$

vii. Si $a \equiv r \mod b$, y $c \equiv s \mod b$, entonces $a - c \equiv (r-s) \mod b$

viii. Si $a \equiv r \mod b$, y $c \equiv s \mod b$, entonces $a \cdot c \equiv (r \cdot s) \mod b$

ix. Si $a \equiv r \mod b$, entonces $a^s \equiv r^s \mod b$

Ejemplo 3.1.1

Enseguida se muestran algunos ejemplos donde se aplican los módulos de congruencia.

- $13 \equiv 1 \mod 12$, porque cuando dividimos 13 entre 12 el residuo es 1.
- $13 \equiv 2 \mod 11$, porque cuando dividimos 13 entre 11 el residuo es 2.
- $13 \equiv 3 \mod 10$, porque cuando dividimos 13 entre 10 el residuo es 3.
- $13 \equiv 4 \mod 9$, porque cuando dividimos 13 entre 9 el residuo es 4.
- $13 \equiv 5 \mod 8$, porque cuando dividimos 13 entre 8 el residuo es 5.

Utilizando los módulos de congruencia podemos demostrar otros criterios de divisibilidad.

Criterio de divisibilidad

CRITERIO DEL 11.
Si al sumar los dígitos de posición par del número y restarle la suma de los dígitos del número en posición impar obtenemos un número que es divisible entre 11, entonces el número se divide entre 11.

Esto ocurre porque $10 \equiv -1 \mod 11$. Esto nos permite escribir el número: $abcdef$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} abcdef &= 100\,000\,a + 10\,000\,b + 1\,000\,c + 100\,d + 10\,e + f \\ &= 10^5\,a + 10^4\,b + 10^3\,c + 10^2\,d + 10\,e + f \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad (ix) de las congruencias obtenemos:

$$\begin{aligned} abcdef &= 10^5\,a + 10^4\,b + 10^3\,c + 10^2\,d + 10\,e + f \\ &\equiv (-1)^5\,a + (-1)^4\,b + (-1)^3\,c + (-1)^2\,d + (-1)^1\,e + f \\ &\equiv (-1)\,a + (1)\,b + (-1)\,c + (1)\,d + (-1)\,e + f \end{aligned}$$

Esto explica por qué debemos sumar las posiciones pares y restar la suma de las posiciones impares: el signo va cambiando conforme vamos cambiando de posición en los dígitos del número considerado.

3.1.2 Otros teoremas relacionados

Los siguientes resultados están relacionados con la teoría de números[3].

Teorema 3.1.4
Sea $p \geq 5$ un número primo. Entonces, bien $p \equiv 1 \mod 6$, bien $p \equiv 5 \mod 6$.

Demostración. ....
Un número natural a cualquiera puede pertenecer a una de las siguientes clases de congruencia:

- Si $a \equiv 0 \mod 6$, entonces: $a = 6\,k + 0$, con lo que sería divisible por 6.
- Si $a \equiv 1 \mod 6$, entonces: $a = 6\,k + 1$, con lo que podría ser primo.
- Si $a \equiv 2 \mod 6$, entonces: $a = 6\,k + 2 = 2 \cdot (3\,k + 1)$, con lo que resultaría ser divisible por 2.
- Si $a \equiv 3 \mod 6$, entonces: $a = 6\,k + 3 = 3 \cdot (2\,k + 1)$, con lo que resultaría ser divisible por 3.
- Si $a \equiv 4 \mod 6$, entonces: $a = 6\,k + 4 = 2 \cdot (3\,k + 2)$, con lo que resultaría ser divisible por 2.
- Si $a \equiv 5 \mod 6$, entonces: $a = 6\,k + 5$, con lo que podría ser primo.

....

NOTA: *No todos los números naturales p que cumplen con* $p \equiv 1 \mod 6$, *o bien,* $p \equiv 5 \mod 6$ *son primos, pero todos los primos mayores o iguales a 5, tienen esa forma.* ✓

Teorema 3.1.5
Cerradura de $\mathbb{P}$
Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los números naturales $p \geq 5$ (no necesariamente primos) de la forma: $p \equiv 1 \mod 6$, ó $p \equiv 5 \mod 6$; o bien $\mathbb{P} = \{p \mid p \equiv 1$

[3]Estos resultados se muestran en el artículo "*La nueva criba de Eratóstenes*" escrito por el autor de este material. Debo mencionar que Abel Chávez Morales colaboró en el desarrollo de las ideas plasmadas en lo que queda de esta sección.

mod 6, ó $p \equiv 5 \mod 6; p \in \mathbb{N}, p \geq 5\}$. Entonces, el conjunto $\mathbb{P}$ es cerrado bajo la multiplicación.

Demostración.

Sea $a \equiv 1 \mod 6$, y $b \equiv 5 \mod 6$. Por definición, $a, b \in \mathbb{P}$. Por las propiedades (i), (iv) y (viii) de las congruencias de módulos tenemos:

- $a \cdot a \equiv 1 \mod 6$
- $a \cdot b \equiv 5 \mod 6$
- $b \cdot b \equiv 25 \mod 6 \equiv 1 \mod 6$

con lo que queda establecido el teorema.

Desde los estudios de nivel elemental a medio superior se enseña la criba de Eratóstenes como un método para encontrar todos los números primos hasta un número natural finito. Con los teoremas enlistados tenemos una segunda forma (más eficiente) de encontrar la lista de los números primos.

Para este fin empezamos enlistando a los únicos dos números primos que no pertenecen al conjunto $\mathbb{P} = \{p \mid p \equiv 1 \mod 6, \text{ ó } p \equiv 5 \mod 6; p \in \mathbb{N}, p \geq 5\}$; esos dos números primos son 2 y 3.

Inmediatamente después podemos hacer una tabla donde enlistemos los números en columnas, de acuerdo a la clase de congruencia a la que pertenezcan:

5 mod 6	0 mod 6	1 mod 6
5	6	7
11	12	13
17	18	19
23	24	25
29	30	31
35	36	37
41	42	43
47	48	49
53	54	55
59	60	61
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Clases 5, 0 y 1 de módulo 6.

En la tabla tenemos 3 columnas. La columna del centro contiene números que son divisibles por 6, solamente para que nos sirva de guía para encontrar las otras dos columnas. Las columnas de la izquierda y de la derecha son las que tienen elementos del conjunto $\mathbb{P}$.

En la lista podemos ver algunos números que no son primos, por ejemplo, 25. El teorema que muestra la cerradura de $\mathbb{P}$ bajo la multiplicación prueba que tenemos números compuestos en $\mathbb{P}$.

La siguiente cuestión consiste en eliminar los números que son compuestos. Para lograr esta meta haremos uso del teorema de la cerradura de $\mathbb{P}$ y de la definición de número compuesto.

Es obvio que todo número natural n (a excepción del número 1) tiene al menos dos divisores: el número 1 y el número n (él mismo). Entonces, si aparece un divisor más, es compuesto.

La tarea ahora parece muy sencilla: tomamos el menor de todos los elementos[4] del conjunto $\mathbb{P}$ y lo multiplicamos por todos los elementos del conjunto $\mathbb{P}$. Así encontraremos los elementos de $\mathbb{P}$ que no son primos.

Después de haber multiplicado el primer número primo $5 \in \mathbb{P}$ por todos los elementos del conjunto $\mathbb{P}$ (incluido el 5 mismo), debemos continuar con el siguiente primo, en este caso el número 7. Ahora debemos multiplicar a este número primo por todos los demás elementos del conjunto $\mathbb{P}$.

Es claro que no se requiere multiplicar 7×5, dado que esta multiplicación se realizó cuando empezamos multiplicando el número 5 por todos los elementos del conjunto $\mathbb{P}$. Entonces, debemos empezar desde 7×7. Lo mismo ocurre con el 11: no se requiere multiplicar 11×5 u 11×7, esas multiplicaciones ya se realizaron antes. Ahora debemos empezar desde 11×11, y así sucesivamente con los demás números, hasta que hayamos terminado con la lista que deseamos obtener.

Enseguida se muestra el proceso elaborado hasta el número primo 61.

$5 \mod 6$	$1 \mod 6$
5	7
11	13
17	19
23	$\cancel{25}$
29	31
$\cancel{35}$	37
41	43
47	$\cancel{49}$
53	$\cancel{55}$
59	61
$\vdots$	$\vdots$

La nueva criba de Eratóstenes.

5×5 eliminó al número 25, 5×7 eliminó al número 35, 5×11 eliminó al número 55, etc., 7×7 eliminó al número 49, 7×11 elimina al número 77, etc., 11×11 elimina al número 121, etc., y así sucesivamente.

Este mismo procedimiento puede usarse para generar un algoritmo muy eficiente para verificar si un número natural dado n es o no un número primo. En este caso se debe iniciar comparando el número dado n con los dos únicos números primos que no están en $\mathbb{P}$. En caso de que no sea así, se debe encontrar el residuo de dividir el número n entre 6. Si este residuo es distinto a 1 ó 5, entonces, con certeza sabemos que el número es compuesto.

Por otra parte, si el residuo de dividir n entre 6 es, bien 1, bien 5, entonces debemos verificar si se divide por alguno de los números $p \in \mathbb{P}$. No requerimos checar todos los números $p \in \mathbb{P}$ hasta uno antes de n, como es bien sabido, basta verificar hasta el número natural igual a $\sqrt{n}$ o el inmediato anterior.

El algoritmo creado con la criba de Eratóstenes verifica si el número n es divisible por los números impares. Es claro que hay 3 números impares de cada 6 números naturales. El algoritmo de la nueva criba de Eratóstenes solamente verifica 2 de cada seis números naturales: los que pertenecen al conjunto $\mathbb{P} = \{p \mid p \equiv 1 \mod 6, \text{ ó } p \equiv 5 \mod 6; p \in \mathbb{N}, p \geq 5\}$.

[4]Esto es posible gracias al principio del buen ordenamiento, que dice que un conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento que es menor o igual a cualquier otro elemento del conjunto considerado.

Más aún, algunos de los elementos del conjunto $\mathbb{P}$ son compuestos y es muy obvio verificarlo: cuando en la cifra de las unidades tiene un 5, por ejemplo: 25 (5×5), 35 (5×7), 55 (5×11), 125 (5×25), etc.

Se debe recordar que esta nueva criba no considera a los primeros dos números primos: el 2 y el 3. Por tanto, cuando se haga la lista de los números primos utilizando la nueva criba de Eratóstenes deben incluírseles.

Cuatro

Álgebra

> *Las matemáticas son el estudio de construcciones ideales (que frecuentemente pueden aplicarse a problemas reales), y el descubrimiento, de paso, de las relaciones entre las partes de estas construcciones, antes desconocidas.*
>
> — PIERCE, S.C.

4.1 Álgebra básica

En la enseñanza del álgebra es importante que los estudiantes adquieran el hábito de pensar que las letras en realidad son números. De hecho, las literales representan números.

La notación y las operaciones que utilizamos con literales es exactamente el mismo que usamos cuando trabajamos con números. Por ejemplo, las operaciones con polinomios se realizan con exactamente el mismo procedimiento que se utiliza al realizar las correspondientes operaciones con números.

Las demostraciones matemáticas algebraicas pueden ser entendidas por los estudiantes cuando éstos han adquirido un nivel de abstracción para entender que en realidad las operaciones que se realizan sobre los objetos matemáticos están basadas en las propiedades de los números reales.

Para que los estudiantes sientan que ellos son los que han descubierto las siguientes demostraciones utilice las sugerencias que se dan en las mismas.

Los estudiantes notarán mejor la utilidad de las matemáticas y apreciarán su valor cuando entiendan para qué les son útiles.

4.1.1 Leyes de los exponentes

Es necesario que empiece recordando las definiciones básicas, para este tema: base, exponente, coeficiente, literal y potencia.

Los estudiantes siempre desean saber para qué les sirve cada concepto que estudian en matemáticas. En este caso, las leyes de los exponentes les ayudará a simplificar expresiones para poder realizar cálculos de una manera mucho más sencilla.

Para explicar las leyes de los exponentes puede empezar con ejemplos numéricos. Por ejemplo: $2 \times 2 = 2^2$. Es una buena idea explicar a los estudiantes que la notación utilizada para la potencia es una forma de abreviar las operaciones. Consideren en clase, por ejemplo el caso de escribir: $2^{50} = 2 \times 2 \times \cdots \times 2$, multiplicar el número 2 por sí mismo cincuenta veces.

Realizar algunos cálculos numéricos ayuda a aclarar la notación a los estudiantes que no han captado la idea completamente, además que fortalece la madurez matemática de los demás estudiantes.

Después puede explicar con literales. Es importante que enfatice que la literal representa a un número y por eso la tratamos como tal.

Ahora haga la analogía con el primer ejemplo numérico: $2 \times 2 = 2^2$, con $x \cdot x = x^2$.

Después es una buena idea ayudar a los estudiantes a traducir en palabras lo que la expresión x^2 nos dice: *"multiplica al número x por sí mismo 2 veces."*

Otro ejemplo es:

$$x^5 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 factores}}$$

Enfatice esta traducción, porque el autor ha notado frecuentemente este error: cuando los estudiantes deben elevar al cuadrado un número, por ejemplo, 5, responden: *"cinco al cuadrado es diez."* Es decir, confunden el doble con el cuadrado. $5^2 \neq 10$. Por definición, $5^2 = 5 \times 5 = 25$.

Enseguida puede generalizar la notación y pedir a los estudiantes que traduzcan la expresión. Por ejemplo, a^7 nos dice en palabras: *"multiplica al número a por sí mismo siete veces."*

Una vez que los estudiantes han comprendido el significado de esta notación puede explicar las leyes de los exponentes, las cuales se explican enseguida. Después de cada una de las leyes se ofrecen sugerencias para su enseñanza efectiva.

i. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Es importante hacer especial énfasis que esta ley requiere que las bases sean iguales en ambos factores. Para que los estudiantes recuerden este hecho, puede escribir un ejercicio y pedir el resultado de la siguiente operación: $x^m \cdot y^n =$______. Esta expresión NO se puede simplificar más. La causa de esto es que tenemos bases distintas.

Para enfatizar aún más, pregunte: *"Si vas a aplicar la primera ley de los exponentes, ¿cuál de las dos bases vas a utilizar para escribir el resultado?... ¿Verdad que ahora no tiene sentido aplicarla?"*

Además mencione que la base queda inalterada. Son los exponentes los que se suman.

Una forma de explicar esta ley consiste en traducir en palabras lo que dice cada uno de los factores: el primero dice: *"multiplica el número x, m veces"*, pero después multiplicamos x por sí mismo n veces, con lo que en total multiplicamos $m + n$ veces el número x. Por eso obtuvimos como resultado x^{m+n}.

ii. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

En este caso los exponentes se restan.

Se sugiere que primero considere ejemplos usando números. Por ejemplo el siguiente caso:

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2 \times 2 = 2^2$$

porque de los 5 factores que había en el numerador, se cancelaron 3 con los factores que estaban en el denominador. Por eso restamos los exponentes. Los estudiantes pueden verificar que el resultado de esta operación es correcto: $2^5 = 32$, $2^3 = 8$, y $32 \div 8 = 4 = 2^2$.

Un segundo caso será:

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}{2 \times 2 \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2}$$

La explicación es muy similar al caso anterior.

Un tercer caso será:

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 1$$

Con esto podemos justificar que $a^0 = 1$, siempre que[1] $a \neq 0$.

Puede considerar ahora la traducción del numerador y del denominador a palabras. El numerador nos dice: "*multiplica el número x, m veces*". Por otra parte, el denominador nos dice: "*multiplica el número x, n veces*". Aquí tenemos 3 casos.

✓ $m > n$ ✓ $m < n$ ✓ $m = n$

Un caso particular que ahora puede considerar es:

$$\frac{1}{x^3} = \frac{x^0}{x^3} = x^{-3}$$

Este resultado se obtuvo gracias al resultado anterior: $a^0 = 1$, siempre que $a \neq 0$.

Una forma más de argumentar consiste en mencionar que las operaciones de multiplicación y división son *inversas* una de la otra. Es decir, multiplicar es *lo contrario* de dividir y viceversa.

Entonces, cuando multiplicamos varias veces un número vamos sumando al exponente, y cuando restamos al exponente, debemos realizar la operación contraria a multiplicar, lo cual es dividir.

Así, de una manera informal estamos justificando por qué aparecen los exponentes negativos: en realidad no estamos multiplicando $-m$ veces el número x, lo que pasó fue que dividimos m veces el número 1 (que es igual a x^0) entre el número x.

"*¿Pero por qué no empezamos desde x?*" Pues porque entonces ya habríamos multiplicado una vez el número x^0 por x, y no estaríamos dividiendo m veces el número x, sino $m - 1$ veces.

Cuando decimos que $x^3 = x \cdot x \cdot x$, en realidad estamos abreviándolo, porque lo que está pasando en realidad es:

[1]Vea los casos de la división por cero en la página 140.

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x = x^0 \cdot x \\ x^2 &= x \cdot x = x^0 \cdot x \cdot x \\ x^3 &= x^0 \cdot x \cdot x \cdot x = x^2 \cdot x \end{aligned}$$

Y como $1 = x^0$, en realidad siempre empezamos a contar desde cero, no desde 1. De manera semejante ocurre con los exponentes negativos: empezamos desde x^0.

Esta manera informal de justificar el porqué de los exponentes negativos generalmente es más fácilmente captada por los estudiantes que no tienen bases fuertes en matemáticas más elementales, lo cual ayuda a crear esas bases en quienes más las requieren y en fortalecerlas en quienes ya las poseen.

iii. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

Para que los estudiantes capten por qué obtenemos esta ley puede invitar a los estudiantes a traducir la expresión: $(x^m)^n$, que en palabras dice: *"Multiplicar la expresión x^m por sí misma n veces."*

Matemáticamente esto lo escribimos como: $x^m \cdot x^m \cdot \cdots \cdot x^m$. Esto nos indica que el exponente m debe sumarse n veces, porque ese número de veces es el que multiplicamos la expresión x^m por sí misma.

Es importante que los estudiantes noten que están aplicando la primera ley de los exponentes para deducir otra ley.

En este caso, como en los anteriores, es una muy buena idea mostrar el procedimiento completo a los estudiantes con ejemplos numéricos al inicio, y después con literales, antes de pedirles que deduzcan (con su ayuda, profesor) esta ley de los exponentes.

iv. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

Para que los estudiantes puedan deducir esta ley de los exponentes es indispensable que recuerden cómo realizar la multiplicación de dos fracciones: numerador por numerador y denominador por denominador.

Si considera que se requiere, igual puede realizar algunas multiplicaciones de fracciones numéricas. Es muy conveniente, porque de otra manera en realidad no entenderán qué están haciendo al aplicar esta ley de los exponentes, solamente memorizarán el procedimiento sin saber por qué se realiza de esa manera.

Entonces puede proceder exactamente igual que en la primera ley: traduce a palabras lo que dice la expresión, lo indica algebraicamente, observa que el numerador se está multiplicando a sí mismo m veces, al igual que el denominador, y después escribe ese resultado *"de la forma abreviada"*.

La siguiente ley es prácticamente igual a la anterior, así como a la primera:

v. $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

En este caso el factor $x \cdot y$ debe multiplicarse por sí mismo m veces. Esto significa que debe realizar primero la multiplicación del número x, m veces y por otra parte, multiplicar el número y, m veces también. Finalmente multiplica los resultados.

Es muy mala idea simplemente escribir las leyes de los exponentes en la pizarra para que los estudiantes las escriban en sus cuadernos y usted empiece con ejemplos, aumentando cada vez el grado de dificultad.

De esta manera los estudiantes se forman una imagen de las matemáticas distorsionada de la realidad. Como si las razones por las cuales estas leyes son así estuvieran fuera de su alcance.

Cuando deduce las leyes y los estudiantes entienden por qué son así, y cuándo son aplicables, generalmente no requieren de memorizar las fórmulas. Ellos mismos pueden deducirlas cuando las requieran. Lo importante es hacer un esfuerzo consciente por que las comprendan.

4.1.1.1 Leyes de los radicales

Para explicar por qué los radicales se pueden expresar como un exponente fraccionario puede hacer uso del problema motivador que se presenta en la página 19.

En casos como:

$$\sqrt[n]{a^m}$$

podemos convertir a una fracción el índice del radical, considerando al radicando como una cantidad sin exponente:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Después aplicamos la ley de los exponentes que dice: $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$, donde, para el caso de nuestro estudio, tenemos que: $a = m$, y $b = 1/n$. Pero como la multiplicación es conmutativa, podemos escribir: $x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a}$. Este resultado nos indica que obtendremos el mismo resultado si primero elevamos a la potencia o si primero sacamos la raíz, claro está, supuesto que las operaciones son válidas.

Ahora haremos la traducción a palabras lo que dice el radicando: *"multiplicar por sí mismo m veces el número* $x^{1/n}$*."*

El estudiante debe entender que las dos representaciones indican exactamente lo mismo en ambos casos.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Usted puede utilizar una analogía como la utilizada en los exponentes negativos. En este caso, multiplicar exponentes significa elevar a una potencia otra potencia. Dividir exponentes debe indicar lo contrario de elevar a una potencia, es decir, calcular su raíz $n-$ésima en este caso.

4.1.2 Propiedades de los logaritmos

Empezamos con la definición de logaritmo:

Definición 4.1.1

LOGARITMO
El logaritmo del número M en la base a es el número x si y solamente si: $a^x = M$. Matemáticamente esto se denota como sigue:

$$\log_a M = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^x = M$$

donde $a \neq 0, 1$, $a > 0$.

Para explicar el concepto considere ejemplos numéricos. Por ejemplo,

$$2^3 = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad \log_2 8 = 3$$

Explique la conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica, primero con ejemplos numéricos y después con literales.

Ahora definimos: $a^x = M$, y $a^y = N$. A partir de estas dos definiciones se deduce, de acuerdo a la definición de logaritmo:

$$\begin{array}{rcl} \log_a M & = & x \\ \log_a N & = & y \end{array}$$

Ahora multiplicamos:

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Si calculamos el logaritmo de este resultado es:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a a^{x+y} = x + y$$

Pero $x = \log_a M$, y $y = \log_a N$, de donde:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Esta es la primera propiedad de los logaritmos.

Escriba en la pizarra algunos ejemplos numéricos para que los estudiantes capten la esencia de la demostración y después explique la demostración tal y como aparece aquí.

Después puede pedir que realicen algunos ejercicios sencillos donde la apliquen.

Para deducir una segunda propiedad de los logaritmos, recordamos la demostración anterior y ahora pedimos a los estudiantes que consideren dividir en lugar de multiplicar M y N, así obtenemos:

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Y si calculamos el logaritmo de este resultado obtenemos:

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a a^{x-y} = x - y$$

y de acuerdo a lo anterior, $x = \log_a M$, y $y = \log_a N$, por lo tanto,

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Esta es la segunda propiedad de los logaritmos.

Podemos aplicar repetidas veces la primera propiedad y deducir una tercera propiedad:

$$\begin{aligned}
\log_a\left(M^2\right) &= \log_a(M \cdot M) = \log_a M + \log_a M = 2\log_a M \\
\log_a\left(M^3\right) &= \log_a(M^2 \cdot M) = \log_a M^2 + \log_a M = 2\log_a M + \log_a M = 3\log_a M \\
\log_a\left(M^4\right) &= \log_a(M^3 \cdot M) = \log_a M^3 + \log_a M = 3\log_a M + \log_a M = 4\log_a M
\end{aligned}$$

y en general,

$$\log_a\left(M^\alpha\right) = \alpha \log_a M$$

Ahora los estudiantes están listos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas aplicando estas propiedades. Asegúrese que los estudiantes han comprendido evaluándolos mediante ejercicios guiados a través de preguntas, para que los vayan resolviendo paso a paso y ellos mismos vayan viendo el procedimiento y recordándolo cada vez mejor.

4.1.3 $- \times - = +$

Practicamente todos los estudiantes de nivel secundaria conocen las leyes de los signos. Sin embargo aún entre profesores hay muy pocos que realmente conozcan de dónde viene la ley que dice: "*menos por menos es más*"...

Aquí se muestran 3 formas distintas de demostrar este mismo hecho:

Primera demostración.

Enseñanza de
las Matemáticas

Empezamos con la propiedad de los números reales: $a + (-a) = 0$. Multiplicamos ambos lados de la igualdad por el número $-b$ y así obtenemos:

$$(-b)[a + (-a)] = (-b)(0)$$

Ahora aplicamos la ley distributiva en el lado izquierdo de la igualdad y en la parte derecha aplicamos la propiedad del cero[2]:

$$(-b)(a) + (-b)(-a) = 0$$

El primer término del lado izquierdo de la igualdad es igual a: $-ab$. Así que sumamos en ambos lados: ab para cancelar este término:

$$\begin{aligned}(\cancel{ab}) + (-\cancel{ab}) + (-b)(-a) &= 0 + ab \\ (-b)(-a) &= ab\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos de conclusión lo que queríamos demostrar.

Segunda demostración.

Ahora consideramos la siguiente expresión:

$$ab + (-a)(b) + (-a)(-b)$$

y la factorizamos como sigue:

$$\begin{aligned}ab + (-a)(b) + (-a)(-b) &= b\,[a + (-a)] + (-a)(-b) \\ &= b\,[\cancelto{0}{a + (-a)}] + (-a)(-b) \\ &= b\,(0) + (-a)(-b) \\ &= 0 + (-a)(-b) \\ &= (-a)(-b)\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos factorizarla como:

$$\begin{aligned}ab + (-a)(b) + (-a)(-b) &= ab + [(b) + (-b)](-a) \\ &= ab + [\cancelto{0}{(b) + (-b)}](-a) \\ &= ab + (0)(-a) \\ &= ab + 0 \\ &= ab\end{aligned}$$

Pero ambos resultados los obtuvimos a partir de la misma expresión. Esto significa que los dos resultados son equivalentes. Esto es:

$$ab = (-a)(-b)$$

Tercera demostración.

Esta demostración es la más sencilla de las tres. Empezamos considerando la propiedad: $a + (-a) = 0$.

[2]Cualquier número multiplicado por cero es igual a cero.

En palabras ésta nos dice: *"piensa un número, súmale su negativo y siempre obtienes cero..."*

Ahora consideraremos el número $-a$. El negativo de este número es: $-(-a)$, y de acuerdo a la propiedad de cancenlación para la suma, tenemos que:

$$-a + [-(-a)] = 0$$

Pero ya sabíamos que

$$a + (-a) = 0$$

lo cual puede escribirse como:

$$(-a) + a = 0$$

Si comparamos las dos ecuaciones, debemos concluir que $a = -(-a)$, porque los demás términos son iguales:

$$\begin{array}{rcl} (-a) + & a & = 0 \\ -a \;\; + & [-(-a)] & = 0 \end{array}$$

4.1.4 Fórmula General

La fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado se obtiene fácilmente a partir de la ecuación cuadrática:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

al completar cuadrados.

Para este fin, vamos a multiplicar ambos lados de la ecuación por $4\,a$, con lo que obtenemos la siguiente ecuación equivalente a la anterior:

$$4\,a^2x^2 + 4\,ab\,x + 4\,ac = 0$$

Ahora vamos a sumar en ambos lados de la igualdad: $b^2 - 4\,ac$, para obtener:

$$\begin{aligned} 4\,a^2x^2 + 4\,ab\,x + \cancel{4\,ac} + b^2 - \cancel{4\,ac} &= 0 + b^2 - 4\,ac \\ 4\,a^2x^2 + 4\,ab\,x + b^2 &= b^2 - 4\,ac \end{aligned}$$

Ahora podemos factorizar el trinomio cuadrado perfecto que aparece a la izquierda de la igualdad:

$$(2\,ax + b)^2 = b^2 - 4\,ac$$

Y finalmente, despejamos la incógnita de la ecuación:

$$\begin{aligned} (2\,ax + b)^2 &= b^2 - 4\,ac \\ 2\,ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4\,ac} \\ 2\,ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \end{aligned}$$

Si usted olvida qué procedimiento debe realizar para, a partir de la ecuación cuadrática deducir la fórmula general para su solución, basta que trate de llegar a la ecuación de segundo grado a partir de la fórmula general y después lea en orden inverso los pasos que llevó a cabo. Ese es el procedimiento que se acaba de explicar.

4.2 Aplicaciones

> *La práctica siempre debe estar basada en un sólido conocimiento de la teoría*
>
> — Leonardo da Vinci

En matemáticas se conocen muchos *trucos*, lo que formalmente se llaman **artificios matemáticos**.

Por ejemplo, los productos notables son un artificio matemático para realizar operaciones con expresiones algebraicas de una manera más sencilla (aunque también mecánica).

Un ejemplo ilustrativo, para emplear los productos notables es realizar operaciones con números a partir de los productos notables. Por ejemplo, 25^2 puede calcularse empleando el binomio al cuadrado.

Ejemplo 4.2.1

Calcula 25×25 *aplicando un producto notable.*

- Utilizamos el binomio al cuadrado y sustituimos los valores que corresponden:

$$\begin{aligned} 25^2 = (20+5)^2 &= 20^2 + 2\,(20)(5) + 5^2 \\ &= 400 + 200 + 25 \\ &= 625 \end{aligned}$$

  Trucos que usamos dentro de este truco:

  1. Para elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en cero, eleva al cuadrado la cifra de las decenas y agregamos dos ceros a la derecha, porque $(10\,n)^2 = 100\,n^2$.
  2. Es buena idea empezar multiplicando $2\,(20)(5)$, porque es más fácil hacer los cálculos después.

- Evidentemente, podemos calcular cualquier número de dos cifras utilizando este procedimiento.

La representación geométrica de este producto notable que se encuentra en la página 47 le ayudará al estudiante a entender mejor el procedimiento.

Aunque también podemos utilizar otro truco:

✓ Dado que cualquier número de dos cifras que tiene al 5 en las unidades puede escribirse como $10\,k+5$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(10\,k+5)^2 &= 100\,k^2+2\,(10\,k)(5)+25\\
&= 100\,k^2+100\,k+25\\
&= 100\,k\,(k+1)+25
\end{aligned}
$$

Ahora nos detenemos a estudiar este resultado:

- El número k representa la cifra de las decenas del número $10\,k+5$.
- $k\,(k+1)$ es el producto de la cifra de las decenas por su consecutivo.
- Cuando multiplicamos $k\,(k+1)$ por 100, solamente le estamos agregando dos ceros a la derecha (al producto $k\,(k+1)$).
- Cuando sumamos 25 en realidad estamos formando el número que ya teníamos $(100\,k\,(k+1))$ pero ahora terminará en 25.

Entonces, si deseamos elevar al cuadrado un número de dos cifras que tiene al 5 en las unidades, multiplicamos la cifra de las decenas por su consecutivo y le agregamos a la derecha el número 25.

Ejemplo 4.2.2

Calcule los cuadrados de todos los números de dos cifras que terminan en 5 en las unidades.

- Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

n	k	$k\,(k+1)$	n^2
15	1	(1)(2)	**2**25
25	2	(2)(3)	**6**25
35	3	(3)(4)	**12**25
45	4	(4)(5)	**20**25
55	5	(5)(6)	**30**25
65	6	(6)(7)	**42**25
75	7	(7)(8)	**56**25
85	8	(8)(9)	**72**25
95	9	(9)(10)	**90**25

- Ahora usted, profesor, verifique que los resultados son correctos.

Con este truco el estudiante no solamente sabrá cómo calcular cualquier número al cuadrado por medio de un procedimiento más sencillo de elaborar mentalmente que la multiplicación *normal*, sino que tendrá un procedimiento particular para el caso de los números que tienen al 5 en la cifra de las unidades, que es muy fácil de recordar y que además, puede deducir fácilmente.

Otro truco que sirve para hacer cálculos aritméticos, consiste en la ley distributiva.

Ejemplo 4.2.3

Calcula 7×24 utilizando la ley distributiva.

- Podemos escribir $24 = 20 + 4$ y aplicar la ley distributiva:

$$\begin{aligned} 7 \times 24 = 7\,(20+4) &= (7)(20)+(7)(4) \\ &= 140+28 \\ &= 168 \end{aligned}$$

- Entonces, $7 \times 24 = 168$.
- Es evidente que este procedimiento es mucho más cómodo para realizar operaciones mentalmente que utilizar el procedimiento *normal*.

La representación geométrica de la ley distributiva que se encuentra en la página 47 ayudará al estudiante a entender mejor por qué funciona.

Otra aplicación de los productos notables en forma de truco para realizar cálculos aritméticos consiste en el producto conjugado.

Ejemplo 4.2.4

Calcula: 39×41

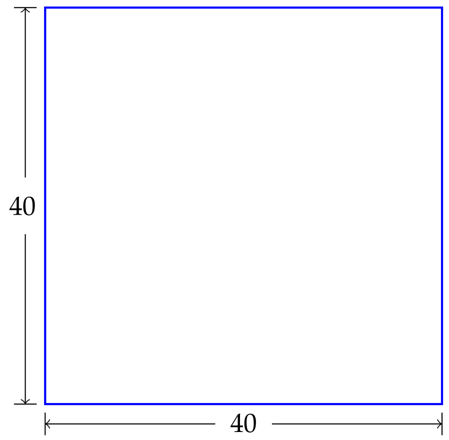
- Debemos notar que: $39 = 40 - 1$, y que $41 = 40 + 1$
- Entonces, multiplicar $39 \times 41 = (40-1)(40+1) = 40^2 - 1 = 1\,600 - 1 = 1\,599$
- **Truco 1:** Para elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en cero, empezamos elevando al cuadrado la cifra de las decenas y agregamos dos ceros a la derecha.
- En realidad en el truco 1 estamos usando una ley de los exponentes:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m \\ (10 \cdot k)^2 &= 10^2 \cdot k^2 \\ &= 100 \cdot k^2 \end{aligned}$$

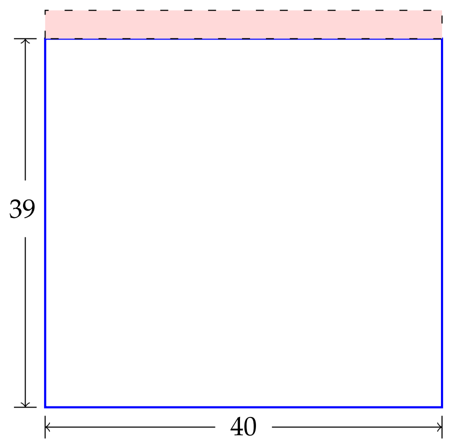
Explicar este truco geométricamente es muy sencillo[3] y puede resultar muy fructífero para los estudiantes.

Puede dibujar un cuadrado en el pizarrón y mostrar que cada lado mide 40 unidades de longitud.

[3]Puede ver la interpretación geométrica del caso general del producto conjugado en la página 48.



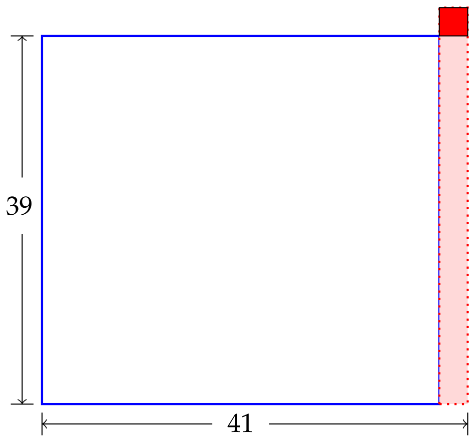
Vamos a cortar "*una rebanada*" del cuadrado de ancho igual a una unidad a lo largo de cualquiera de sus lados. Así nos quedará un rectángulo de base 40 y de altura 39.



Ahora dibujamos "*la rebanada*" que cortamos del cuadrado a la derecha del rectángulo.

Debe ser claro que, dado que la altura del rectángulo nuevo es 39 unidades de longitud, y el largo del rectángulo que dibujaremos es 40 unidades, nos sobrará una unidad. Es decir,

$$\begin{aligned} 40^2 &= 39 \times 41 + 1 \\ 40^2 - 1 &= 39 \times 41 \end{aligned}$$



Igual, podemos partir de un rectángulo de 39 unidades de altura y 41 unidades de base. Cortamos "*la rebanada*" de manera que tenga un ancho de una unidad de longitud y 39 unidades de altura. Esto nos dejará con un rectángulo de 39 unidades de altura y 40 unidades de base.

Si colocamos "*la rebanada*" que cortamos antes haciendo que la altura llegue a 40 unidades, al igual que su base, veremos que nos faltará 1 unidad cuadrada, porque la longitud de "*la rebanada*" es de 39 unidades y la base del rectángulo es de 40 unidades. Es decir,

$$40^2 - 1 = 39 \times 41$$

En palabras esto nos dice que nos falta una unidad de área para completar el cuadrado perfecto a partir del rectángulo de base 41 y altura 39.

Puede encontrar más trucos para aplicar los productos notables en la sección 6.2.

El siguiente ejemplo muestra un truco para la factorización.

Ejemplo 4.2.5

Factoriza el trinomio cuadrado: $x^2 - 12\,x + 35$

- **Truco 1:** Para facilitar la factorización, es una buena idea empezar calculando la mitad del coeficiente del término lineal. Elevamos al cuadrado este resultado.
- Si el resultado es igual al término independiente, entonces se trata de un trinomio cuadrado perfecto, si no es así, se trata de una factorización del tipo: $(x + a)(x + b)$
- En este caso: la mitad de -12 es igual a -6, y $(-6)^2 = 36 \neq 35$, por lo que el trinomio no es cuadrado perfecto.
- **Nota:** Este truco se aplica solamente cuando el coeficiente del término cuadrático es igual a 1.

- Se le queda como ejercicio desarrollar un truco para el caso cuando el coeficiente del término cuadrático es distinto de 1.

- Ahora que sabemos que el trinomio no es cuadrado perfecto, buscamos dos números que sumados den -12 y multiplicados sean 35.

- **Truco 2:** Empiece buscando dos números que multiplicados den 35, porque tiene menos soluciones (enteras) que el problema de encontrar dos números que sumados den -12.

- **Pregunta.** ¿Cuántas soluciones enteras tiene el problema de encontrar dos números que sumados den -12?

- Los números que satisfacen las condiciones impuestas por el problema son: -7 y -5.

- Entonces, $x^2 - 12\,x + 35 = (x - 7)(x - 5)$.

El profesor siempre debe suponer que el estudiante tratará de resolver su problema de la manera más complicada. Por eso es importante que muestre todos los trucos que conoce.

Es importante también explicar por qué funciona cada truco. De otra manera se corre el riesgo que el estudiante adquiera la sensación de que estas cosas solamente pueden entenderlas personas con un cerebro privilegiado, genios o algo así, cuando en realidad están al alcance de ellos.

El autor ha encontrado que muchos estudiantes captan la idea de la sustitución o evaluación de una función en un punto cuando se han explicado previamente los productos notables como máquinas que transforman expresiones algebraicas.

El uso de figuras en lugar de literales ayuda a que capten mejor la idea. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
(x + a)^2 &= (x)^2 + 2\,(a)\,(x) + (a)^2 \\
(\triangle + \square)^2 &= (\triangle)^2 + 2\,(\square)\,(\triangle) + (\square)^2
\end{aligned}$$

Observe también el uso de los colores en los distintos términos[4].

Recuerde explicar con palabras lo que dice cada término. Por ejemplo, el término $(\triangle)^2$ en palabras nos está diciendo: *"Multiplica por sí misma la expresión $\triangle$ (que representa a un número)."*

[4]En caso de que este material esté impreso en blanco y negro, lamento mucho que no pueda notarlo. Se sugiere que utilice colores y ayude a los estudiantes a identificar los términos en base a los mismos.

4.2.1 Juegos de "*piensa un número*"

Este tipo de juegos está basado en la forma como mi maestro enseñaba el tema de ecuaciones lineales. Dos ejemplos se mostraron como problemas motivadores en la página 16.

Usted puede inventar un problema de este tipo generando ejercicios de ecuaciones lineales.

Por ejemplo, si usted desea que la solución del juego sea 12, multiplique por otro número, digamos, $7 \times 12 = 84$, y ahora sume o reste una cantidad, por ejemplo, sumamos 6, y obtenemos como resultado 90.

Entonces, el juego para sus estudiantes será:

> *Pensé un número, lo multipliqué por 7, al resultado le sumé 6 y finalmente obtuve 41. ¿Qué número pensé?*

Pida a sus estudiantes que expliquen la forma en que llegaron a la solución.

Usted puede usar ese procedimiento para que entiendan por qué los "*despejes*" se realizan de esa forma.

Por ejemplo en el ejemplo anterior, antes de que el número fuera 41 le sumamos 6, esto significa que teníamos $41 - 6 = 35$. En forma de despeje tenemos:

$$\begin{aligned} 7\,x + 6 &= 41 \\ 7\,x + \underbrace{\cancel{6} - 6}_{0} &= 41 - 6 \\ 7\,x &= 35 \end{aligned}$$

Y antes de tener 35 teníamos $35 \div 7 = 5$, en forma algebraica:

$$\begin{aligned} 7\,x &= 35 \\ \frac{\cancel{7}\,x}{\cancel{7}} &= \frac{35}{7} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Después de resolver varios ejemplos numéricos puede sugerir a los estudiantes resolverla ecuación:

$$a\,x + b = c$$

Puede basarse en el procedimiento que utilizó en el juego "*pensé un número*" y tomarlo como una sugerencia para resolver este problema.

Intente que los estudiantes hagan todo el esfuerzo mental para resolver el problema. Usted puede guiarle con preguntas para que los estudiantes vayan teniendo una guía para encontrar está la solución.

4.2.2 Números racionales

Supongamos que vamos a dividir algún número $a \in \mathbb{Z}$ entre 7. ¿Cuáles son los posibles residuos que podemos obtener de la división? La respuesta a esta pregunta es: "*los posibles residuos que podemos obtener de la división de algún número arbitrario $a \in \mathbb{Z}$ entre 7 son 0 (división exacta), 1, 2, 3, 4, 5, ó 6*". Aquí ya no es posible obtener 7 como residuo, porque si este fuera el caso, entonces el cociente se debería aumentar en 1 (o como dicen los niños en la primaria, cabe una vez más el número 7 en el número a) y el residuo que obtendríamos debería ser entonces cero.

Ahora, si vamos a expresar un número racional (fracción) como número con decimales, suponiendo que existan decimales distintos de cero, cuando realicemos la división, irán apareciendo los residuos. Estos residuos no pueden ser sino los que hemos mencionado (para el caso del 7, tenemos que los residuos son 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6).

Entonces en algún punto de la división el residuo se repetirá y con esto, también lo hará el dígito del cociente que le corresponde (estamos suponiendo que ya estamos en la parte decimal del denominador). Por ejemplo, si realizamos la división $1/3$ obtenemos:

$$\begin{array}{r|l}
 & 0.3333\cdots \\ \hline
3 & 1.00000\cdots \\
 & \;\;10 \\
 & \;\;\;\;10 \\
 & \;\;\;\;\;\;10 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;10 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\vdots
\end{array}$$

En este caso hay un dígito que se repite en el cociente: el 3.

Sin embargo, este no es el único caso. Por ejemplo, si realizamos la división $1/7$ obtenemos:

$$\begin{array}{r|l}
 & 0.142857142857\cdots \\ \hline
7 & 1.000000000000\cdots \\
 & \;\;30 \\
 & \;\;\;\;20 \\
 & \;\;\;\;\;\;60 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;40 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;10 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;30 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;20 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 \\
 & \;50 \\
 & \;1 \\
 & \;\vdots
\end{array}$$

es decir, $\dfrac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$ Vemos que la cadena de números 142857 se repite una y otra vez. Diremos que el número $1/7$ tiene una *expresión decimal periódica infinita* porque se va repitiendo la cadena de números 142857 una y otra vez. A esta cadena de números que se va repitiendo lo llamaremos *periodo*. La longitud del periodo es el número de dígitos que la cadena contiene. Este caso la longitud del periodo es de 6 dígitos. Aquí es conveniente notar que la longitud del periodo puede ser 1, 2, 3, 4, 5 ó 6, pero nunca será igual a 7, puesto que si aparece el cero como residuo, la división debería detenerse entonces.

Por ejemplo consideremos el siguiente caso:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

Aquí, si realizamos la división, veremos que como resultó cero en el residuo no fue necesario seguir realizando la división. Entonces, el número $1/2$ no tiene expresión decimal infinita, sino finita.

Ahora, se ve inmediatamente que $1/2$ no tiene periodo (o si se quiere ver desde otra perspectiva, su periodo tiene una longitud igual a uno y la cadena consta de un dígito solamente: el cero, en cuyo caso sería un número con expresión decimal infinita). Entonces, es natural hacer la siguiente pregunta: ¿cómo podemos saber si un número tiene expresión decimal finita (como el caso de $1/2$) o si tiene expresión final infinita (como el caso de $1/7$)?

Números decimales periódicos finitos e infinitos

Ahora consideraremos el problema de determinar qué números racionales tienen expresión decimal finita y cuáles tienen expresión decimal infinita.

Primero mencionaremos la respuesta a esta pregunta, y después justificaremos este hecho.

La respuesta es como sigue: los números racionales tienen expresión decimal finita, si y solamente si, su expresión como número racional en su expresión mínima (es decir, si se ha simplificado la fracción al máximo posible) tiene en el denominador una descomposición en factores primos con potencias del 2 y del 5 solamente.

Para justificar este hecho simplemente debemos notar que, en caso de que esto sea cierto, entonces podemos escribir el número racional r de la siguiente forma[5]:

$$r = \frac{p}{q} = \frac{p}{2^m \cdot 5^n}$$

Ahora, suponiendo que $m > n$, podemos multiplicar la última fracción por el número 5^{m-n} en el numerador y en el denominador, lo que nos dará:

$$r = \frac{p}{2^m \cdot 5^n} = \frac{5^{m-n} \cdot p}{2^m \cdot 5^{m-n} \cdot 5^n} = \frac{5^{m-n} \cdot p}{2^m \cdot 5^m} = \frac{5^{m-n} \cdot p}{(2 \cdot 5)^m} = \frac{5^{m-n} \cdot p}{10^m}$$

Ahora, es bastante evidente que cuando dividimos un número por una potencia de diez, por ejemplo 10^m, el resultado es el mismo número inicial, pero con el punto decimal recorrido hacia la izquierda m posiciones, indicando que el número racional tiene una expresión decimal periódica finita.

Por ejemplo, consideremos el número $r = \dfrac{1}{4}$

[5]Aquí se hace uso de las leyes de los exponentes.

En este caso, $r = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100} = 0.25$

¿Podremos justificar que en cualquier otro caso el número racional tendrá expresión decimal infinita?

Para ver que esto es así, simplemente debemos considerar lo mencionado en el estudio anterior de la periodicidad. Vemos que en cualquier otro caso, la división por un número distinto de diez implica la repetición de la cadena de números a la cual hemos llamado periodo.

4.2.3 Sucesiones y series aritméticas

Ya se mencionó la importancia de diferenciar entre una sucesión y una serie.

Para enseñar este tema es una buena idea referir primero la ecuación lineal. Cuando basamos nuevo conocimiento en el conocimiento previo el aprendizaje tiene una base más sólida y el nuevo conocimiento ayuda a reforzar el previo.

Puede empezar recordando la ecuación de la recta de la forma: $y = m\,x + b$. Cuando $x = 0$, tenemos que $y = b$. Podemos definir este punto como el término inicial de la sucesión. Si tabulamos distintos valores enteros de x, la diferencia de dos valores enteros consecutivos que le corresponden a la variable y vemos que la diferencia siempre es igual a la constante m, la pendiente de la recta.

En una sucesión se definen el primer término a_1, la diferencia entre dos términos consecutivos d, y a partir de estos dos datos podemos encontrar cualquier término de la sucesión.

Es una buena idea que los estudiantes logren deducir la fórmula para encontrar los valores de $a_n = a_1 + d\,(n-1)$, a partir de una tabla como la que sigue:

n	**Fórmula:**
1	$a_1 = a_1$
2	$a_2 = a_1 + d$
3	$a_3 = a_1 + 2\,d$
4	$a_4 = a_1 + 3\,d$
$\vdots$	$\vdots$
k	$a_k = a_1 + d\,(k-1)$

El estudiante debe reconocer que estamos hablando hasta aquí de una sucesión, no de una serie.

La serie es la suma de los términos de una sucesión. Cuando estamos hablando de una sucesión finita, estamos considerando un número finito de términos.

Cuando consideramos una sucesión infinita, hablamos de un número infinito de términos.

Si sumamos los términos de la sucesión, desde a_1 hasta a_k, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_i &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2\,d) + \cdots + (a_1 + d\,(k-1)) \\ &= k \cdot a_1 + d\,(1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1))\end{aligned}$$

Ahora consideramos la suma: $1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)$, la cual se conoce como la suma de Gauss, la cual se estudia con detalle en la página 38. Usando la fórmula de la suma de Gauss, obtenemos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)\,k}{2}$$

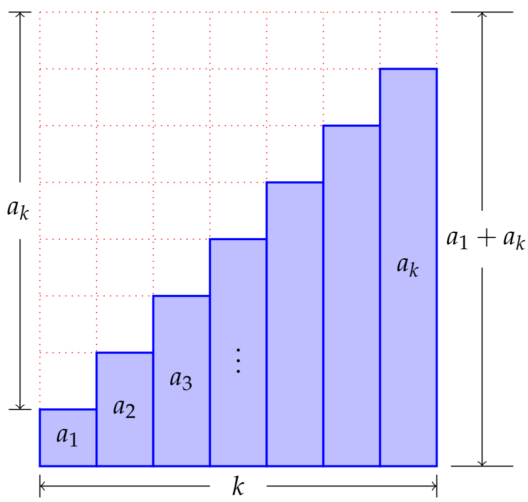
Sustituyendo este resultado obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_i &= k \cdot a_1 + d\,(1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)) \\ &= k \cdot a_1 + d\,\frac{(k-1)\,k}{2}\end{aligned}$$

Ahora vemos que podemos factorizar el número k:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_i &= k \cdot \left(a_1 + d\,\frac{k-1}{2}\right) \\ &= k \cdot \left(\frac{2\,a_1}{2} + \frac{d\,(k-1)}{2}\right) = k \cdot \left(\frac{2\,a_1 + d\,(k-1)}{2}\right) \\ &= k \cdot \left(\frac{a_1 + [a_1 + d\,(k-1)]}{2}\right) = k \cdot \left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right)\end{aligned}$$

Podemos generar una interpretación geométrica muy similar a la que se muestra en la suma de Gauss en la página 38. La diferencia consiste en que en este caso la altura del $i-$ésimo rectángulo será de a_i unidades.



Ahora observe la fórmula para encontrar la serie:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = k \cdot \left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right)$$

Encontramos la suma multiplicando el número de términos (k) por el promedio del primer y último términos. Geométricamente esto significa que tomamos la mitad, bien en forma de diagonal, como formando escalones, o bien, dividiendo en dos el rectángulo, exactamente a la mitad de la altura del mismo.

Algunos autores utilizan la notación S_k para indicar $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$.

Nota 4.2.1. *En caso de que sus estudiantes no conozcan la notación* $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$*, es preferible escribir:* $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$*, o bien* S_k *en su lugar.*

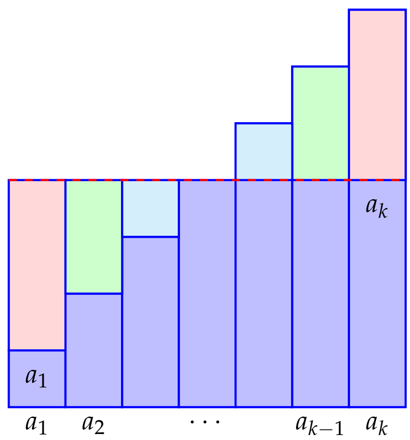
Utilizando el método de Gauss podemos justificar de una manera más sencilla la fórmula para encontrar la suma de los primeros k términos de una sucesión lineal:

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & a_1 & + & a_1 + d & + & \cdots & + & a_1 + d\,(k-1) \\ S & = & a_1 + d\,(k-1) & + & a_1 + d\,(k-2) & + & \cdots & + & a_1 \\ \hline 2\,S & = & a_1 + a_k & + & a_1 + a_k & + & \cdots & + & a_1 + a_k \end{array}$$

Entonces, al sumar $2\,S$ estamos en realidad sumando k veces el número $a_1 + a_k$, y esto es igual a: $k\,(a_1 + a_k)$. Pero no deseamos encontrar el valor de $2\,S$, sino el valor de S. Así que sacamos la mitad de $2\,S$ y así terminamos:

$$S = \frac{k\,(a_1 + a_k)}{2} = k\left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right)$$

Ahora, $a_1 + a_k$ dividido entre dos es el promedio del primer y el k-ésimo términos. Geométricamente también podemos imaginar que "*lo que le falta*" al término a_1 para llegar al promedio $(a_1 + a_k)/2$ se lo proporciona el término a_k:



Igual, es una buena idea mostrar un ejemplo antes de deducir la fórmula y con base en este ejemplo, escribir:

En el ejemplo:	**En general:**
$\begin{aligned} a_2 &= 5+6 \\ a_3 &= a_2 + d \\ &= (5+6)+6 = 5+2\,(6) \\ a_4 &= a_3 + d \\ &= (5+2\,(6))+d = 5+3\,(6) \\ a_5 &= a_4 + d \\ &= (5+3\,(6))+d = 5+4\,(6) \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ &= (a_1+d)+d = a_1+2\,d \\ a_4 &= a_3 + d \\ &= (a_1+2\,d)+d = a_1+3\,d \\ a_5 &= a_4 + d \\ &= (a_1+3\,d)+d = a_1+4\,d \end{aligned}$

y para ambos casos en general:

$$a_k = a_1 + (k-1)\,d$$

y mostrar en cada línea lo que representa cada término en cada una de las igualdades. Después continuar con la deducción del n-ésimo término y finalmente con la serie aritmética.

4.2.4 Factorial de cero

Empezamos dando la definición de factorial de un número.

Definición 4.2.1

FACTORIAL
El factorial de un número natural n, que se denota por $n!$ se define como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(2)\cdot(1)$$

En muchos libros se menciona que la definición de $0!$ es por convención, 0!=1.

Pero en realidad esta definición es una deducción inmediata de las propiedades del factorial. Recuerde que en matemáticas todas las afirmaciones, a excepción de los axiomas, deben justificarse de manera irrefutable, basándonos en las propiedades de los objetos con los que estamos trabajando.

En particular, sabemos que el factorial del número $k+1$ satisface:

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$$

Ahora podemos sustituir $k = 0$ y así obtener:

$$\begin{aligned} (0+1)! &= (0+1)\cdot 0! \\ 1! &= 1\cdot 0! \end{aligned}$$

para que esta igualdad se cumpla se requiere que $0! = 1$. De aquí viene esa definición.

Cinco

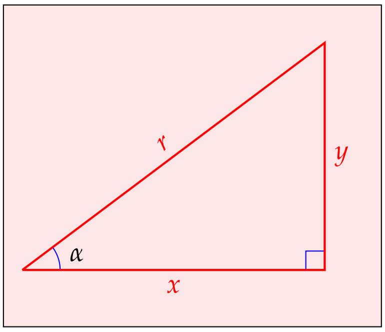
Trigonometría

> *No te preocupes por tus dificultades en matemáticas. Te puedo asegurar que las mías son todavía mayores.*
>
> — Albert Einstein.

5.1

5.1 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones que caracterizan a un ángulo α. Estas funciones se definen a partir de un triángulo rectángulo, de acuerdo a las proporciones de sus lados.



✓ $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$

✓ $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$

✓ $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

✓ $\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$

✓ $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

✓ $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Puede encontrar la interpretación geométrica de las funciones trigonométricas en la página 61.

5.1.1 Identidades Recíprocas

Las demostraciones de las siguientes identidades es muy sencilla. Basta sustituir las definiciones para verificar que se cumple la igualdad en cada una de ellas.

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{r}{y}\right)} = \dfrac{y}{r}$

2) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{r}{x}\right)} = \dfrac{x}{r}$

3) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)} = \dfrac{y}{x}$

La siguiente identidad es también evidente.

✓ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Para demostrar esta identidad, escribimos:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\left(\dfrac{y}{r}\right)}{\left(\dfrac{x}{r}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

La división por r está justificada porque $r > 0$.

5.1.2 Propiedades de las funciones trigonométricas

Estas propiedades son evidentes al graficar las funciones trigonométricas a partir del círculo unitario.

1) $\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)$
2) $\cos\alpha = \sin(90^o - \alpha)$
3) $\tan\alpha = \cot(90^o - \alpha)$
4) $\cot\alpha = \tan(90^o - \alpha)$
5) $\csc\alpha = \sec(90^o - \alpha)$
6) $\sec\alpha = \csc(90^o - \alpha)$

5.1.3 Identidades trigonométricas pitagóricas

Para demostrar cada una de las siguientes debemos recordar cómo se definen las funciones trigonométricas.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Demostración. ....
Por definición: $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$, y $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$, pero por el teorema de Pitágoras, x, y, r satisfacen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} &= \frac{r^2}{r^2} \\ \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 &= 1 \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \end{aligned}$$

Dividir por r^2 es siempre válido, dado que $r > 0$.
Esta es la primera identidad trigonométrica pitagórica.

....

2) $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

Demostración. ....
Dividimos ambos lados de la identidad anterior entre $\cos^2\alpha$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \\ \tan^2\alpha + 1 &= \sec^2\alpha \end{aligned}$$

....

3) $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

Demostración. ....
La tercera identidad trigonométrica pitagórica se obtiene de manera similar a la segunda. En este caso dividimos ambos lados de la primera identidad trigonométrica por $\sin^2\alpha$:

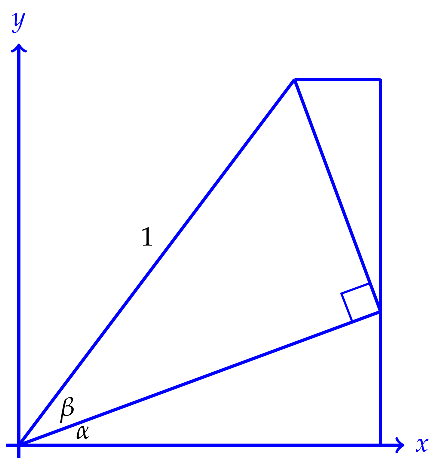
$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\\
\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} &= \frac{1}{\sin^2\alpha}\\
\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2\\
1 + \cot^2\alpha &= \csc^2\alpha
\end{aligned}$$

....

5.1.4 Identidades de suma y diferencia de ángulos

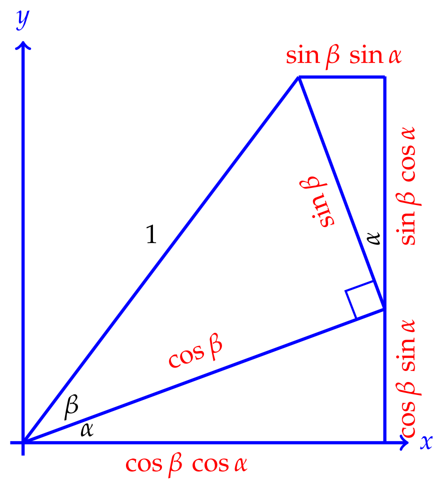
1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$

Demostración. ....
Para demostrar esta identidad, empezamos dibujando los ángulos α y β de manera que podamos apreciar la suma de los dos:

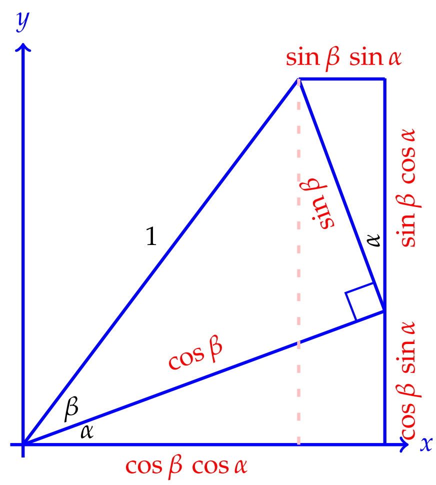


Ahora nos basamos en la interpretación geométrica de las funciones básicas: Observe que la proyección de cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la hipotenusa multiplicada por una función trigonométrica, seno para la componente vertical y coseno para la componente horizontal.

Basándonos en este hecho es muy sencillo deducir el siguiente diagrama:



En este diagrama, podemos dibujar un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud 1, el cual se muestra en el siguiente diagrama:



Y de acuerdo a la interpretación geométrica de las funciones trigonométricas básicas, dada en la página 60, la proyección vertical es equivalente a $\sin(\alpha + \beta)$.

Encontrando el resultado buscado:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$$

Lo cual se muestra a la derecha de la figura.

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$

Demostración.
Utilizando la figura de la identidad anterior, podemos fácilmente ver que

la proyección horizontal es $\cos(\alpha+\beta)$, y este resultado es: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\cos\beta$.

Puede ver este resultado más claramente si consideramos que la proyección horizontal del triángulo rectángulo con hipotenusa 1 la obtenemos restando el segmento que queda en la parte superior de la figura que mide: $\sin\beta\,\sin\alpha$ al segmento que está sobre el eje x, y mide: $\cos\beta\,\cos\alpha$.

....

3) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha$

Demostración. ....
Aplicando las propiedades de las funciones trigonométricas que se dieron antes, podemos fácilmente deducir esta identidad sustituyendo $-\sin\beta$ en lugar de $\sin(-\beta)$, y $\cos\beta$ en lugar de $\cos(-\beta)$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+(-\beta)\right) &= \sin\alpha\,\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\,\cos\alpha\\ &= \sin\alpha\,\cos\beta-\sin\beta\,\cos\alpha\end{aligned}$$

....

4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

Demostración. ....
De manera semejante a la identidad anterior, podemos sustituir en la identidad correspondiente a $\cos(\alpha+\beta)$ y calcular, en su lugar $\cos(\alpha-\beta)$ y así obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha+(-\beta)\right) &= \cos\alpha\,\cos(-\beta)-\sin\alpha\,\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

Esta identidad es importante en el álgebra lineal al considerar el producto punto de dos vectores.

....

5) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta}$

Demostración. ....
Podemos utilizar la identidad de cociente para $\tan x$, siendo $x = \alpha-\beta$ y simplificar la expresión así obtenida:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos\beta+\sin\beta\,\cos\alpha}{\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta}\end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión basta dividir en el numerador como en el denominador por $\cos\alpha\,\cos\beta$:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin\alpha\,\cos\beta+\sin\beta\,\cos\alpha}{\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\sin\beta\,\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}\\ &= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}\end{aligned}$$

....

6) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta}$

Demostración. ....

Se procede de manera semejante al ejercicio anterior:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos\beta-\sin\beta\,\cos\alpha}{\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}-\dfrac{\sin\beta\,\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}\\ &= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}\end{aligned}$$

Aunque también podemos obtenerla sustituyendo $\tan(-\beta) = -\tan\beta$ en donde se requiera:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+(-\beta)) &= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\,\tan(-\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta}\end{aligned}$$

dado que:

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

se sigue que:

$$\tan(-\beta) = \frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} = \frac{-\sin\beta}{\cos\beta} = -\tan\beta$$

....

7) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

Demostración. ....

Procedemos de manera semejante a las anteriores identidades:

$$
\begin{aligned}
\cot(\alpha+\beta) &= \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta} - \dfrac{\cancel{\sin\alpha}\,\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\sin\alpha}\,\cancel{\sin\beta}}}{\dfrac{\cancel{\sin\alpha}\,\cos\beta}{\cancel{\sin\alpha}\,\sin\beta} + \dfrac{\cancel{\sin\beta}\,\cos\alpha}{\sin\alpha\,\cancel{\sin\beta}}}\\
&= \frac{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) - 1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\cot\alpha\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}
\end{aligned}
$$

Sin embargo, también podemos simplificar la deducción de esta identidad utilizando las identidades recíprocas:

$$
\cot(\alpha+\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\left(\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}\right)} = \frac{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}
$$

Así hemos obtenido dos resultados equivalentes para $\cot(\alpha+\beta)$.

....

8) $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

Demostración. ....

Procedemos de manera semejante a la identidad anterior:

$$
\begin{aligned}
\cot(\alpha-\beta) &= \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\\
&= \frac{\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta} + \dfrac{\cancel{\sin\alpha}\,\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\sin\alpha}\,\cancel{\sin\beta}}}{\dfrac{\cancel{\sin\alpha}\,\cos\beta}{\cancel{\sin\alpha}\,\sin\beta} - \dfrac{\cancel{\sin\beta}\,\cos\alpha}{\sin\alpha\,\cancel{\sin\beta}}}\\
&= \frac{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) + 1}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cot\alpha\,\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}
\end{aligned}
$$

Utilizando la identidad recíproca, simplificamos el procedimiento y obtenemos un resultado equivalente:

$$
\cot(\alpha-\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\left(\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta}\right)} = \frac{1 + \tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}
$$

O bien, podemos utilizar la propiedad: $\cot(-\beta) = -\cot\beta$:

$$\cot(\alpha + (-\beta)) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot(-\beta) - 1}{\cot\alpha + \cot(-\beta)} = \frac{-\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{\cot\alpha\ \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

. . . .

5.1.5 Suma de funciones trigonométricas

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Demostración. . . . .
Para deducir esta identidad se requieren de las siguientes:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha \end{aligned}$$

Sumando las dos identidades obtenemos:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\,\sin\alpha\,\cos\beta$$

Por otra parte, si en lugar de sumar las identidades las restamos obtenemos:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\,\sin\beta\,\cos\alpha$$

Ahora definimos: $A = \alpha + \beta$, y $B = \alpha - \beta$. Al sumar primero y restar después, estas dos ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\,\alpha &= A + B \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{A+B}{2} \\ 2\,\beta &= A - B \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

Ahora sustituimos estos valores que acabamos de encontrar:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= 2\,\sin\alpha\,\cos\beta \\ \sin A + \sin B &= 2\,\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\,\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{aligned}$$

. . . .

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\,\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Demostración. . . . .
Continuando con el procedimiento utilizado para deducir la identidad anterior, podemos decir que, de acuerdo a las definiciones dadas,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) &= 2\,\sin\beta\,\cos\alpha \\ \sin A - \sin B &= 2\,\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\,\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \end{aligned}$$

. . . .

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Demostración. ....
Ahora utilizaremos las identidades:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

Al sumar las identidades obtenemos:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\,\cos\alpha\,\cos\beta$$

Y al restarlas obtenemos:

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\,\sin\alpha\,\sin\beta$$

De la misma manera, definimos: $A = \alpha+\beta$, y $B = \alpha-\beta$, tal que,

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{A-B}{2}$$

Y al sustituir estos valores en las igualdades antes encontradas obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\,\cos\alpha\,\cos\beta\\ \cos A + \cos B &= 2\,\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\,\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\end{aligned}$$

....

4) $\cos\beta - \cos\alpha = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Demostración. ....
Si continuamos con el desarrollo utilizado en la identidad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) &= 2\,\sin\alpha\,\sin\beta\\ \cos B - \cos A &= 2\,\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\,\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\end{aligned}$$

....

5.1.6 Otras Identidades trigonométricas

1) $\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$

Demostración. ....
Es muy sencillo obtener esta identidad a partir de la identidad:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$$

sustituyendo $\beta = \alpha$.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\alpha) &= \sin\alpha\,\cos\alpha + \sin\alpha\,\cos\alpha \\ &= 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha \end{aligned}$$

. . . .

2) $\cos(2\,\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Demostración. . . . .
Procedemos de manera semejante a la identidad anterior:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\alpha) &= \cos\alpha\,\cos\alpha - \sin\alpha\,\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

. . . .

3) $\tan(2\,\alpha) = \dfrac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Demostración. . . . .
Seguimos utilizando el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\alpha) &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha} \\ &= \frac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{aligned}$$

. . . .

Ahora se queda como ejercicio:

- Deducir la identidad: $\tan(3\,\alpha)$, haciendo $\tan(\alpha + 2\,\alpha)$.
- Deducir la identidad: $\tan(4\,\alpha)$, utilizando $\tan(\alpha + 3\,\alpha)$ primero y luego $\tan(2\,\alpha + 2\,\alpha)$.

4) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

Demostración. . . . .
Para demostrar esta identidad haremos uso de las siguientes indentidades que ya han sido demostradas:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha &= \cos(2\,\alpha) \end{aligned}$$

Si reemplazamos α por $\dfrac{\alpha}{2}$, obtenemos las siguientes identidades, igualmente válidas:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 \\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Al sumar estas dos últimas identidades, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1+\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \end{aligned}$$

. . . .

5) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Demostración. . . . .
De nuevo, consideramos las identidades:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 \\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Ahora, en lugar de sumar, restamos para obtener:

$$\begin{aligned} 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1-\cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \end{aligned}$$

. . . .

6) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Demostración. . . . .
Considerando las identidades:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \end{aligned}$$

nos damos cuenta que:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

. . . .

7) $\sin\alpha = 2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Demostración. ....

Considerando las siguientes identidades:

$$\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$$

hacemos $\xi = 2\,\alpha$, y al sustituir este valor en las identidades, obtenemos:

$$\sin(\xi) = 2\,\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

....

8) $\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Demostración. ....

Igual que en el caso anterior, empezamos considerando la identidad:

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

y haciendo $\xi = 2\,\alpha$, y al sustituir este valor en las identidades, obtenemos:

$$\cos(\xi) = \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Con lo que hemos demostrado lo que buscábamos.

....

9) $\tan\alpha = \dfrac{2\,\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Demostración. ....

Considerando la identidad:

$$\tan(2\,\alpha) = \frac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

y sustituyendo: $\xi = 2\,\alpha$, obtenemos:

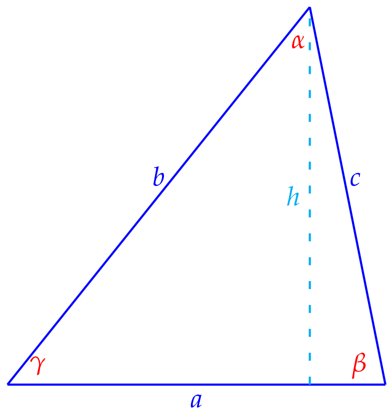
$$\tan\xi = \frac{2\,\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}$$

....

5.1.7 Leyes de senos y de cosenos

1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

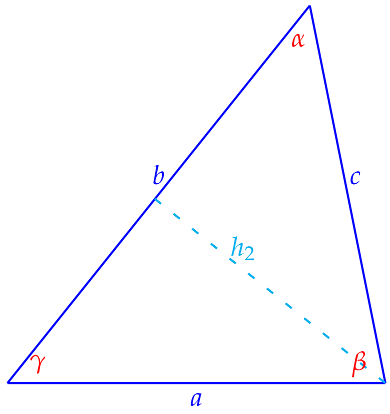
Empezamos con un triángulo cualquiera.



Es claro, de la figura que $h = c\,\sin\beta$. Pero también, $h = b\,\sin\gamma$.
Al igualar los dos valores de h encontrados obtenemos:

$$\begin{aligned} h = c\,\sin\beta &= b\,\sin\gamma \\ \frac{c}{\sin\gamma} &= \frac{b}{\sin\beta} \end{aligned}$$

Pero esa no es la única altura que tiene el triángulo.
Si dibujamos otra altura h_2, como se muestra enseguida:



Ahora tenemos que $h_2 = a\,\sin\gamma$, y también se cumple: $h_2 = c\,\sin\alpha$. Al igualar estos valores obtenemos:

$$\begin{aligned} h_2 = a\,\sin\gamma &= c\,\sin\alpha \\ \frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{c}{\sin\gamma} \end{aligned}$$

Pero ya habíamos encontrado que:

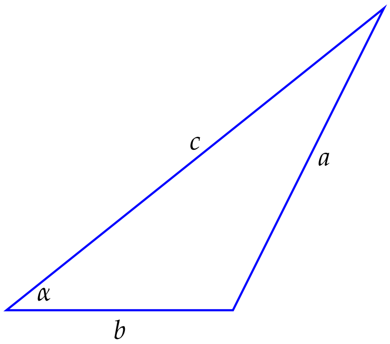
$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Entonces, por transitividad[1], podemos escribir:

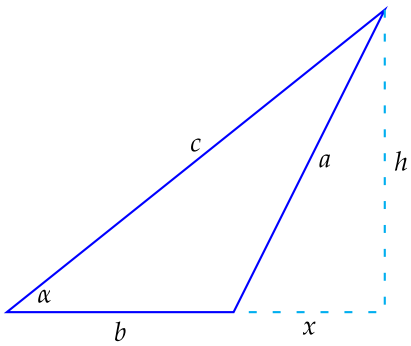
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$

Para demostrar la ley de cosenos empezamos realizando el diagrama que le corresponde:



Ahora realizamos los siguientes trazos auxiliares para formar un triángulo rectángulo:



Ahora, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$x^2 + h^2 = a^2$$

Por otra parte, también se cumple,

$$\begin{aligned} b + x &= c\,\cos\alpha \\ h &= c\,\sin\alpha \end{aligned}$$

[1]Puede encontrar la propiedad de transitividad de la igualdad en la página 70.

Esto nos permite escribir:

$$x = c\,\cos\alpha - b$$

Y al sustituir estas igualdades en la primera ecuación que obtuvimos con el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
a^2 &= (c\,\cos\alpha - b)^2 + (c\,\sin\alpha)^2\\
&= c^2\cos^2\alpha - 2\,bc\,\cos\alpha + b^2 + c^2\sin^2\alpha\\
&= b^2 - 2\,bc\,\cos\alpha + c^2\cdot(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\\
&= b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos\alpha
\end{aligned}$$

porque, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

De manera semejante podemos demostrar las siguientes identidades equivalentes a la anterior:

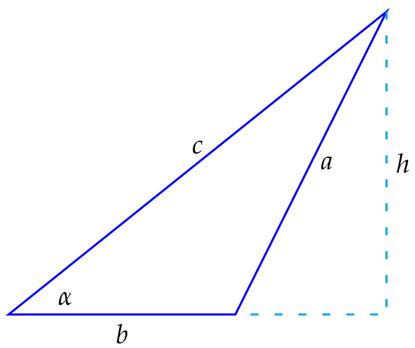
3) $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$ 4) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$

✓ $A = \dfrac{a\,b\,\sin\gamma}{2} = \dfrac{a\,c\,\sin\beta}{2} = \dfrac{b\,c\,\sin\alpha}{2}$
Donde: A es el área del triángulo con lados a, b, c.

Para demostrar esta fórmula, simplemente dibujamos un triángulo con lados a, b, c, lados opuestos de los ángulos α, β, γ, respectivamente.

El área del triángulo se define como base por altura entre dos. La altura en cada caso es un lado por el seno del ángulo que forma la base con otro lado adyacente. El área del triángulo es la mitad del producto de la longitud de la base, por la longitud del lado adyancente por el seno del ángulo.

Por ejemplo, del siguiente triángulo:



inmediatamente vemos que la base del triángulo es b, la altura $h = c\cdot\sin\alpha$, y el área es el semiproducto de la base por la altura, es decir,

$$A = \frac{b\,c\,\sin\alpha}{2}$$

De manera semejante podemos deducir las otras dos fórmulas.

Seis

Sugerencias para la enseñanza

"¿Podría decirme, por favor, qué camino debo seguir a partir de aquí?" —"Eso depende mucho de a dónde quiera llegar".

— Lewis Carrol (Alicia en el país de las maravillas)

6.1 Cómo enseñar

> *¿Por qué debemos formar profesionales si podemos criar científicos?*
>
> — Julio César Sanjuán González.

- **Haga preguntas frecuentemente**
  Preparar preguntas adecuadas al nivel de cada estudiante ayuda a *homogenizar* el nivel de los estudiantes en el grupo.

  Cuando el estudiante debe responder a una pregunta debe primero ordenar sus ideas.

  No exija que el estudiante conteste inmediatamente. Ayude dando algunas sugerencias o realizando otras preguntas para guiarlo a la solución de la pregunta inicial.

  Sugiera dar explicación a problemas para que puedan entender el concepto de manera más profunda. Cuando los estudiantes intentan explicar un procedimiento o solución primero deben haberlo entendido. Así, muchas veces se darán cuenta por qué el procedimiento se realiza de esa manera.

  En cada oportunidad los estudiantes deben expresar sus ideas. El profesor de esta manera puede identificar errores en la forma del pensamiento (lógica) o en las interpretaciones incorrectas sobre las propiedades de un objeto matemático, por ejemplo, una función.

  Permita que los estudiantes resuelvan problemas, no ejercicios. Un ejercicio sirve para que los estudiantes puedan memorizar un procedimiento y mecanizarlo. Pero un problema les ayuda a construir la base del pensamiento lógico y poder profundizar en su entendimiento de ese objeto matemático.

  Cuando un estudiante logra resolver un problema adquiere otra visión de las matemáticas. No se las imagina como un conjunto de reglas y conceptos, vocabularios, etc., que deben ser memorizados, sino de una ciencia que les ayuda a mejorar las condiciones de vida y a mejorar la situación local, nacional e internacional.

  Recuerde que los estudiantes necesitan aprender los principios de las matemáticas, adquirir habilidades de razonamiento y madurarlas en el proceso de aprendizaje, entender cuándo y por qué es aplicable un método y entender para qué le sirven esos procedimientos.

  Trate de proponer preguntas abiertas durante su clase. Los estudiantes deben sentir que cada pregunta es un reto alcanzable. De otra forma, una vez que resuelvan la cuestión no sentirán que merezcan un crédito por su respuesta o solución. Así ellos adquieren confianza en que pueden resolver problemas cada vez más difíciles y reconocen que están aprendiendo.

No se recomienda realizar preguntas del tipo [si/no] o [falso/verdadero], aunque algunas veces resulta conveniente. Este tipo de preguntas la mayoría de las veces no exige de un pensamiento profundo, a menos que para contestarla se requiera de un procedimiento tal vez nuevo o desconocido.

Por ejemplo, si la pregunta es:

> *En Chiapas, año con año se talan clandestinamente árboles. Según la revista* X*, cada año se talan 25 hectáreas de la selva. Se sabe que en el año 2000 había 120 hectáreas de selva en un municipio particular de Chiapas y además, el Ejército Mexicano está colaborando con la reforestación de la selva de manera continua, precisamente donde se han encontrado claros de selva. Si el Ejército Mexicano logra reforestar 35 hectáreas por año, y se requiere que los árboles tengan una edad de 35 años para que se considere explotable, ¿tenemos suficiente selva para que, si esas condiciones continuan como hasta hoy, la selva de ese municipio se siga explotando hasta el año 2050?*

Responder sí o no a esta pregunta requiere de un procedimiento que no es inmediato.

Aquí podemos aprender otra lección: en matemáticas, la respuesta a una pregunta no siempre es un número o una ecuación. En este caso se trató de un sí o un no.

- **La voz es importante**
  Algunos profesores a pesar de que saben mucho de matemáticas, y en realidad creo que tienen muy buen nivel de matemáticas, que sobrepasan por mucho lo que normalmente enseñan en sus aulas, son muy ordenados en sus clases, encadenan sus argumentos de manera lógica y constructiva, pero para desgracia de nuestro sistema educativo, tienen un tono de voz que, según sus alumnos, *"los arrulla"*...

  Cuando explicamos un concepto no solamente es importante proporcionar ejemplos ilustrativos que saquen el mayor provecho del esfuerzo mental que el estudiante realiza para entenderlo, sino que también ese desempeño se ve afectado por la forma como se expone.

  Cuando la voz del profesor es monótona, cuando se habla siempre a la misma velocidad, sin cambiar el volumen de la voz, sin enfatizar los puntos importantes, cuando no utiliza ademanes, y peor aún, cuando le habla al pizarrón... los estudiantes tienden a perder la atención con extrema facilidad. ¿Qué más se requiere, si la materia de por sí es considerada como la menos atractiva por el promedio de los estudiantes en nuestro pais?

  Por otra parte, el autor ha reconocido, a través de revisar varias decenas de entrevistas en documentales y en televisión, que las personas que más atención ganan de su auditorio son las que hablan a una velocidad relativamente rápida, respecto a como hablamos normalmente (por ejemplo, Dr. Alan Wolf del documental *What the bleep do we know*), los ademanes les sirven para enfatizar los puntos importantes, cambian el volumen de la voz cuando se quiere hacer incapié en la importancia de un punto o de un argumento en la cadena de razonamientos.

Evidentemente, no es de lo más sano para el ambiente en el aula que el profesor se la pase dando cátedra cada segundo de la clase. Dirigir preguntas a los estudiantes ayuda mucho a la evaluación diagnóstica por parte del profesor para tener una idea de qué tan profundo puede abordar un tema o un problema, indicarle a los estudiantes (no explícita, sino tácitamente) que se requiere de su estudio extra-clase para poder continuar sin rezagarse en el curso, preparar actividades en equipo les ayuda a desarrollar el espíritu de cooperación y tolerancia.

Sin embargo algunos temas requieren de una buena dosis de participación del profesor y éste debe prepararse para sacar el mayor provecho.

La oratoria ayuda, pero no es suficiente. Se requiere frescura, espíritu motivador, entusiasmo, carisma... que en mi opinión, tiene todo aquel que en realidad está convencido de que todo el mundo debería entender las matemáticas, precisamente porque se crearon para eso: para facilitarnos la vida y para poder seguir creciendo en lo personal, cultural, intelectual, científico, tecnológico... como personas individuales y como seres humanos, como raza...

Trate de hacer un diagnóstico honesto de su situación y busque maneras de mejorar su estilo de enseñanza y así mejorar su clase. Sus estudiantes lo agradecerán.

No se preocupe si el cambio no ocurre de un día para otro... De hecho, lo mejor es que se dé una transición suave, para el bien de su clase y de usted.

Importante: No es suficiente con enganchar a los estudiantes con bromas o comentarios que llamen la atención. Debe ocasionar en el estudiante la necesidad de entender un concepto. El estudiante debe hacer un esfuerzo mental por resolver el problema que usted propone. No es fácil lograr eso con un grupo completo, pero es posible.

- **Relacionar distintas ramas de las matemáticas**
  En matemáticas, es muy frecuente encontrar una telaraña de relaciones entre sus distintas ramas.

  Un concepto de álgebra básica puede explicarse a través de una interpretación geométrica, una operación aritmética puede representarse con rectángulos, el resultado de un problema de probabilidad puede aclararse con la teoría de conjuntos, las propiedades del determinante pueden ser explicadas a partir del concepto de área, el resultado de una integral definida puede ser un trabajo, presión, área, volumen, masa, etc., la antiderivada de una función es una familia de funciones (no un escalar, como la integral definida), la derivada de una función puede interpretarse como una razón de cambio, que a su vez nos indica algo acerca del proceso que modela la función que derivamos: podría tratarse de la cantidad de carga eléctrica que pasa por una sección transversal de un conductor por unidad de tiempo, qué tan rápido se acumula un medicamento en la sangre de un paciente, el crecimiento de una población conforme avanza el tiempo, etc.

  Los estudiantes aprecian mejor el valor de las matemáticas cuando tienen a su alcance (intelectual) ejemplos donde se aplican los conceptos que están estudiando.

Cuando una persona sabe para qué le sirve una cosa, se empieza a interesar en adquirirla, entenderla y usarla. Cuando tiene que realizar un procedimiento y todavía no conoce para qué le sirve o para qué le servirá, de manera natural su cerebro empieza a discriminarlo, dejándolo de lado, dando prioridad a las cosas que sabe cómo podrá utilizar.

Los problemas motivadores son el arma principal para que los estudiantes empiecen a dar el valor a las matemáticas que se merecen.

Obviamente, mientras más libros consulte en busca de aplicaciones de un concepto particular, más rica podrá presentar su clase y mayor probabilidad de éxito tendrá.

Recuerde, cada estudiante tiene intereses particulares distintos. Es cierto que los jóvenes tienen muchas cosas en común, pero también las diferencias son importantes.

Considere, por ejemplo, el caso de las personas que están interesadas en el aprendizaje de la música. A ellos les interesa mucho la lectura de las partituras, para lo cual requieren del ágil uso de las fracciones. A otro estudiante tal vez le atraiga la medicina. Tal vez le parezca interesante saber que ocho décimas partes del calor que perdemos los humanos se cede al aire atmosférico a través de la cabeza, siendo que la superficie de ésta es mucho menor que la del resto del cuerpo. Otro estudiante puede estar interesado en los negocios, tal vez le sirva saber cómo calcular porcentajes a partir de fracciones. Alguien más interesado en la tecnología, podrá encontrar igual que reducir a la mitad el tamaño de los procesadores de computadora puede costar el doble, triple, etc., de dinero, dependiendo del avance tecnológico. Alguien interesado en pintura tal vez desee conocer las proporciones para, a partir de los colores básicos obtener otros.

Alguien más interesado en la ciencia ficción, tal vez le motive resolver el problema de calcular el tiempo que requiere la luz del sol en llegar a la tierra, o saber cuántas vueltas da la luz a la tierra en un segundo, o cuánto tiempo tardaremos viajando a la velocidad de la luz en llegar a una estrella "*cercana*", etc. A alguien interesado en el diseño puede motivarlo encontrar el máximo volumen de la caja que podrá construir con una hoja de papel, o conocer las relaciones entre los distintos sistemas de medidas, etc.

A alguien interesado en la computación le motivarán los sistemas de numeración, y saber que los polinomios no son sino una generalización de estos sistemas de contar. Realizar operaciones con polinomios será más sencillo para todos si entienden esta generalización. Cualquier operación con polinomios es una extensión de las operaciones con números.

- **Dar definiciones claras para los estudiantes, pero precisas**
  Investigue cada definición y busque ejemplos prácticos donde pueda aplicarla.

  Cada definición debe darse por primera vez de manera que los estudiantes logren captar la idea con los conceptos que ya han formado en su estudio previo. Es buena idea relacionar un concepto nuevo con un evento o fenómeno natural que les sea cotidiano.

La simetría aparece en la anatomía de la mayoría de los animales, las cónicas aparecen en distintos fenómenos (las trayectorias de los planetas alrededor del sol son elipses, la trayectoria de una piedra que fue lanzada es una parábola, una hipérbola se aplica en la medición de tiempo de transmisión de señales desde fuentes que están en movimiento, la circunferencia se utiliza en el movimiento rotatorio del planeta o de giro de muchas partes de motores...), las funciones trigonométricas aparecen también en muchos fenómenos, el teorema de Pitágoras tiene también múltiples aplicaciones, etc.

- **Aplicar en distintos contextos cada concepto**
  Para que el aprendizaje sea significativo para el estudiante, éste debe ver cómo utilizará ese conocimiento en la vida real o en otras ramas de la matemática.

  Por ejemplo, en el caso de la división, tenemos tres casos:

  - Solución única, por ejemplo cuando dividimos diez entre cinco.
  - Ninguna solución, por ejemplo, cuando dividimos diez entre cero.
  - Un número infinito de soluciones, por ejemplo, cuando dividimos cero entre cero.

  Este mismo concepto puede aplicarse en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, gracias a la regla de Cramer.

  - Cuando el determinante del sistema de ecuaciones es distinto de cero, tenemos solución única.
  - Cuando el determinante es igual a cero, y las rectas son paralelas y distintas una de la otra, el sistema de ecuaciones no tiene ni una solución.
  - Cuando el determinante es igual a cero, y una ecuación es múltiplo de otra, el sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

  Siempre que sea posible, de acuerdo a la naturaleza del tema, empiece la clase con preguntas aplicadas para motivar las definiciones que los estudiantes deben aprender en esa clase.

  Haga el mayor esfuerzo por mostrar ejemplos iniciales que tengan un contexto que le sea familiar al estudiante.

  Utilice espejos para explicar simetría, problemas de distancias en geometría analítica, construcción de cajas en álgebra, cercado de terrenos en geometría plana, uso de celulares en el cálculo de distancias (por cuestiones de la señal), etc.

  Tenga siempre en mente que el estudiante debe poder describir procesos que ocurren alrededor de él de una manera completa y correcta de acuerdo a ciertos conceptos que ha adquirido en clase y debe ser capaz de asociar estos conceptos con el conocimiento previo.

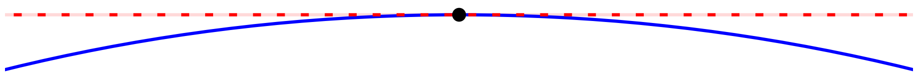
Muchas veces los estudiantes cuando se les pregunta qué es una derivada, o cómo debo intrepretarla, siempre contestan: *"es una recta tangente a la función que se derivó..."*, y es correcto, pero esta respuesta no muestra un entendimiento profundo.

Un proceso adecuado para presentar un tema es el siguiente:

i. Prepare a los estudiantes con una pregunta (capte la atención)
Una derivada es la mejor aproximación lineal a una curva en la cercanía de un punto. Este concepto puede aproximarse con la siguiente pregunta: *"¿Por qué creen que durante mucho tiempo los humanos creyeron que la tierra era plana?"*.

Seguramente habrá muchas respuestas, pero lo que el profesor debe hacer notar es que el radio de la tierra es muy grande comparado con la altura del ser humano. Esto implica que una persona solamente puede ver alrededor de él una parte muy pequeña de toda la superficie de la tierra.

ii. Transmita la solución de la pregunta
Si trazamos un círculo[1] muy grande, y una recta tangente a él, podemos observar que cerca del punto de tangencia, la recta y la circunferencia se confunden, es decir, la recta es una muy buena aproximación de la circunferencia en la cercanía de un punto. Por eso creían que la tierra era plana.



iii. Motive la definición que desea explicar
Bueno, de ahí para adelante, es tarea suya continuar con más ejemplos donde pueda explicar cuándo se requieren aproximaciones lineales a procesos que no lo son, dar la definición de derivada, su interpretación geométrica, etc.

iv. Aplique el conocimiento en otros contextos
No es necesario que desde la primera clase resuelva problemas aplicados utilizando la derivada para su solución. Simplemente puede mencionar al final de clase qué otros tipos de problemas se resuelven con él.

Por ejemplo, si atamos una piedra con una cuerda y le hacemos dar vueltas alrededor nuestro (sobre nuestra cabeza), la velocidad de la piedra, para su estudio se descompone en dos, una tangencial (aquí entra el concepto de derivada) y otra radial... (muestre el diagrama correspondiente y explique por qué se involucra el concepto de derivada), si una función (del tiempo) nos ayuda a predecir la población de una especie animal, la derivada nos dice qué tan

[1]Ya sabemos que la tierra no es una esfera perfecta, pero podemos suponer esto con el fin de explicar la respuesta a la pregunta inicial.

rápido crece la población en cada unidad de tiempo, si la función nos dice la distancia recorrida por un paracaidista, la derivada nos dirá qué velocidad lleva en un instante de su trayectoria, etc...

v. Mencione la definición formal
Muchas veces los estudiantes se quedan con la definición más elemental de un concepto debido a que al inicio se dió la definición formal, cuando no tenían un panorama general del concepto y no pudieron captar la esencia del mismo.

Después de mencionar varios ejemplos es hora de mostrar la definición formal de derivada. El estudiante debe reconocer que la derivada es un límite. Cuando vea la notación:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

el estudiante debe entender que *la fracción* que aparece a la derecha no es en realidad un cociente de dos cantidades, sino el *límite* del cociente de dos cantidades cuando el denominador se acerca mucho a cero.

Si usted motivó el concepto con un problema de física, por ejemplo, caida libre, puede graficar posición vs. tiempo y explicar la interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto y así motivar la definición formal. Muchos libros de cálculo introducen el concepto de derivada con la interpretación geométrica, lo cual es también buena idea.

Algunas veces la forma como explicamos la solución de algunos problemas que involucran la diferencial, parece sugerir que la derivada es un cociente cuando en realidad se trata de un límite, pero no es así... He aquí la importancia de que el profesor conozca con profundidad cada concepto que debe explicar en clase.

vi. Prepárese para lo peor...
Imagine que un estudiante le preguntara: *"Si la derivada no es un cociente, entonces ¿por qué dice usted que pasamos dx multiplicando del otro lado para integrar ambos lados de la igualdad? Si tratamos igual al límite como a un cociente para el despeje, ¿qué tiene de distinto?"*

Evidentemente, esta pregunta ocurrirá cuando estén estudiando el concepto de diferencial.

- **Mostrar los trucos**
  A lo largo de este libro puede encontrar muchos artificios matemáticos, a lo que el autor prefiere llamar "*trucos.*"

  Los estudiantes sienten emoción al saber cómo realizar un cálculo mental de manera rápida, pero más entusiasmo les da el saber por qué funciona el *truco*. De esa manera las ideas que tienen en su banco de información acumulada sigue creciendo y relacionando cosas que parecían estar desconectadas.

  Es muy buena idea mostrar los *trucos* al enseñar matemáticas porque los estudiantes entonces se dan cuenta de que las matemáticas sí tienen sentido y que son capaces, no solo de entenderlas, sino de explicarlas.

Para ubicar de manera rápida algunos trucos que se comparten en este libro y que puede utilizar en clase lea el número de página del truco que le interese en el índice alfabético[2].

- **Indicar los casos especiales o particulares**

  ✓ División por cero (los dos casos)
  Cuando dividimos dos números, por ejemplo,

  $$\frac{27}{3} = 9$$

  el resultado nos indica que el dividendo (el numerador, 27 en este caso), es 9 veces más grande que el divisor (3 en este caso).

  Otra forma de interpretar este mismo resultado consiste en que $3 \times 9 = 27$. Es decir, para resolver la división, para encontrar el cociente (9), buscamos un número que multiplicado por el divisor (3) dé como resultado el dividendo (27).

  Cuando consideramos el caso:

  $$\frac{27}{0} = x$$

  necesitamos encontrar el número x tal que al multiplicarlo por 0, obtengamos como resultado 27.

  Pero cualquier número multiplicado por cero da cero. Esto indica que no existe algún número que sea el resultado de dividir 27 entre cero.

  Podemos considerar ahora el siguiente caso:

  $$\frac{0}{0} = y$$

  Debemos encontrar el número y tal que al multiplicarlo por 0 nos dé cero. Pero, como ya dijimos, cualquier número multiplicado por cero es igual a cero. Esto nos indica que en este caso tenemos *un número infinito de soluciones*, porque cualquier valor que asignemos a y satisface: $y \times 0 = 0$.

  Debe notar que **no** es que la solución de la división sea infinito. Hay un número infinito de soluciones distintas, pero ninguna de ellas es infinito. De hecho, el resultado de una división siempre es un número, y como ya sabemos, infinito no es un número, sino una expresión que nos indica que algo no tiene fin[3]...

  ¿Entonces, por qué algunos libros dicen que $1/0 = \infty$? En cálculo estudiamos los límites. Es erróneo afirmar $1/0 = \infty$, porque el resultado de una división siempre es un número. Ojo, solamente un número debe satisfacer la condición. En el caso de $0/0$ tenemos

[2]El índice alfabético aparece al final del libro

[3]Considere la siguiente experiencia de un matemático con su hijo. *"Papá, ¿cuál es el número más grande?"* A lo que el padre responde: *"Caramba! Hijo, infinito..."*. Y su hijo prosigue: *"Ah!, gracias... me acabas de ahorrar mucho trabajo. Infinito uno, infinito dos, infinito tres, ..."* Moraleja: infinito **no** es un número.

muchas soluciones distintas, y en el caso de $1/0$ no existe ninguna solución. Por esto decimos que no podemos definir la división por cero.

Volviendo al caso de $1/0 = \infty$, en los libros de cálculo se refieren al siguiente hecho:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Pero un límite no es lo mismo que un cociente. Ciertamente estamos calculando el límite de un cociente, pero el resultado no es el de una división, sino el de un límite.

Mucho ojo con las definiciones. Es importante que haga notar la diferencia entre los estudiantes, pues pueden fácilmente confundir los conceptos.

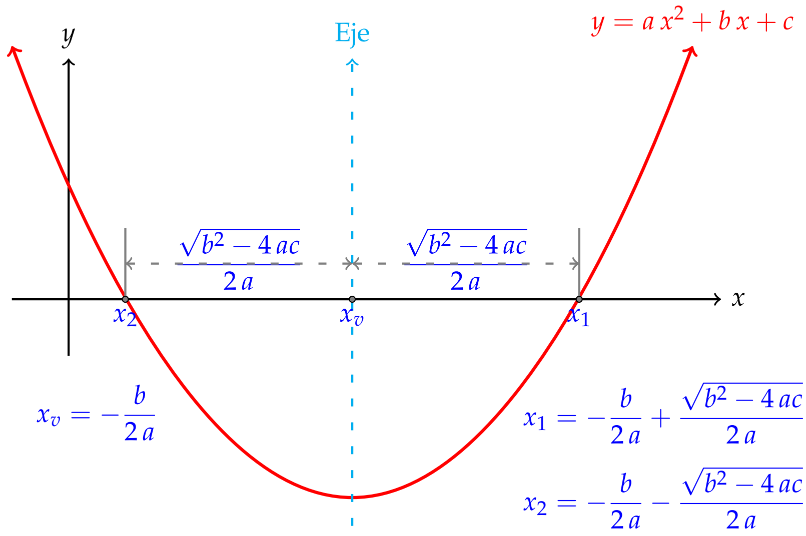
✓ Por qué cuando sacamos raíz cuadrada se presentan dos signos... Esta pregunta surge casi siempre que se estudia por primera vez el despeje y se consideran términos cuadráticos o cuando se estudia la solución de las ecuaciones cuadráticas, por medio de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

Aquí es importante empezar traduciendo a palabras lo que una ecuación cuadrática sencilla nos dice. Por ejemplo, "*¿Qué nos dice en palabras la ecuación:* $x^2 = 16$*?*", pues nos dice: "*Pensé un número... cuando lo multiplico por sí mismo obtengo 16... ¿Qué número pensé?*".

Los estudiantes fácilmente encontrarán la solución positiva: $x = 4$. Pero este problema no tiene solamente una solución. En el caso de que $x = -4$, la ecuación también se cumple, es decir: $(-4)^2 = 16$. Ellos deben entender que el signo $\pm$ indica que hay dos soluciones en esa ecuación. Una de ellas es positiva y la otra negativa.

En el caso de la fórmula general, y dependiendo del orden de los temas, en caso de que ya hayan estudiado las funciones cuadráticas, pueden explicar la interpretación geométrica de las raíces de una ecuación cuadrática con el siguiente diagrama:



Del diagrama se observa que el eje de la parábola está en la coordenada $x_v = -\frac{b}{2\,a}$ y que las raíces de la función están en los puntos[4] x_1 y x_2.

Podemos escribir la fórmula general de la siguiente manera:

$$x = -\frac{b}{2\,a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

que en realidad significa:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{2\,a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \\ x_2 &= -\frac{b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \end{aligned}$$

Ahora, del diagrama podemos ver que x_1 está a la derecha de x_v. Esto es así porque sumamos una cantidad positiva: $\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}$. Entonces los estudiantes fácilmente podrán deducir por qué x_2 está a la izquierda de x_v, pues se le ha restado la misma cantidad.

Si consideran en clase que conforme el vértice de la parábola va trasladándose verticalmente la longitud $x_1 - x_v$, es decir, el valor de $\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}$ va disminuyendo, caerán en cuenta de que cuando ese número es cero, las dos raíces de la parábola coinciden en el mismo punto del eje x. Esto es, si $x_1 - x_v = 0$, se sigue que $x_1 = x_v$.

Pero si van más ayá y consideran el caso en que la parábola no toca el eje x, podrán ver que la fórmula no tiene sentido... y entonces puede introducir los números imaginarios y después los números complejos.

[4]En este ejemplo consideramos que las raíces de la función cuadrática son reales y distintas.

6.1.1 Solución de problemas

Existe un método infalible para resolver cualquier problema. Todo el mundo lo conoce, pero generalmente no lo toma en cuenta de una manera consciente.

El algoritmo de este método es el siguiente:

0. *Entiende el problema completamente.*
1. *Intenta un procedimiento.*
2. *¿Encontraste la solución?*

- ✓ ***SI:*** *Ir al paso* **5**
- ✓ ***NO:*** *Ir al paso* **3**

3. *Intenta otro procedimiento.*
4. *Ir al paso* **2**
5. *Fin*

Moraleja: Lo importante es que no nos rindamos ante un problema.

El paso **0** se incluye, y se enumera con el número cero, porque cuando alguien intenta resolver un problema se entiende que ya lo comprendió completamente.

No tiene ningún sentido intentar resolver un problema cuando no se ha entendido. ¿Cómo esperamos encontrar la respuesta de una pregunta que no se ha entendido completamente?

Es importante hacer mención que en matemáticas, el tipo de problema sugiere el tipo de metodología a utilizar para su solución. Eso no significa que todos los problemas tengan un método único de solución. De hecho, lo mejor es permitir que los estudiantes apliquen su creatividad para resolver problemas.

Imagine que el profesor que le ordenó sumar $1 + 2 + \cdots + 100$ a Gauss[5], le hubiera exigido sumar un número detrás de otro hasta llegar a 100. A pesar de que Gauss tenía una solución mucho más eficiente, hubiera tenido que forzarse a trabajar de acuerdo a lo que el profesor hubiera ordenado.

Ciertamente no tenemos a Gauss en el aula de clase, pero eso no significa que los estudiantes no deban intentar sus propias metodologías.

Una de las tareas del profesor es motivar a los estudiantes para que intenten resolver los problemas de una manera que ellos puedan justificar. Si ellos entienden por qué pueden utilizar el procedimiento que están utilizando, podrán considerar más caminos para llegar al mismo lugar, lo cual es no solamente muy saludable, sino también muy deseable.

Sugerencias

[5]La suma de Gauss aparece en la página 38.

Para resolver problemas frente a clase existen algunas estrategias que han probado ser muy efectivas para lograr un aprendizaje de calidad. Enseguida se muestran algunas.

✓ **Entiendan el problema**

Asegúrese que todos los estudiantes del grupo entienden completamente el problema y las condiciones que el mismo impone. De otra forma la discusión no tendrá el efecto que usted espera, o peor aún, causará confusión entre los estudiantes de los conceptos y procedimientos que usted explique.

✓ **Usar tablas, diagramas y dibujos**

En muchos problemas una tabla o un diagrama ayuda a visualizar y entender mejor el problema. Algunas veces el texto del problema sugiere más una idea visual, que a su vez ayuda a los estudiantes a traducir esas ideas a ecuaciones.

Por ejemplo[5]:

> *Un laboratorista cuenta con ácido sulfúrico (H_2SO_4) al 30% de concentración. Desea obtener 100 mL de ese ácido con una concentración de 12%. ¿Cuántos mililitros de agua y cuántos del ácido debe mezclar para obtener la solución química que necesita?*

Una tabla ayuda a ordenar la información y esta misma tabla sugiere cómo escribir la ecuación para la solución del problema:

	Volumen (mL)	**Concentración (%)**	**Ácido (mL)**
$\mathbf{H_2SO_4}$	$100 - x$	30	$0.30 \cdot (100 - x)$
Agua	x	0	0
Nueva Solución	100	12	$0.12 \cdot (100)$

De manera semejante, pudimos haber dibujado tres matraces, correspondiendo cada uno a la solución original de H_2SO_4 al 30%, Agua y H_2SO_4 al 12% (la mezcla que obtendremos al mezclar los dos anteriores). Escribimos los datos conocidos (que están incluidos en la tabla) encerrados en los matraces que corresponden y de ahí escribir la ecuación:

$$0.30 \cdot (100 - x) = 0.12 \cdot (100)$$

✓ **Interpretar cada parte de la ecuación en palabras**

Esta parte no siempre es sencilla, pero en los casos en que sí sea, es muy conveniente traducir a palabras para que el estudiante pueda reconocer qué partes de la ecuación representan qué condición del problema.

En palabras, la ecuación del problema anterior dice: "*La cantidad de ácido que se obtenga del H_2SO_4 al 30% (miembro izquierdo de la ecuación) debe* *ser igual al ácido que debe contener la nueva solución (miembro derecho de la ecuación).”*

$$\begin{array}{rcl} 0.30\cdot(100-x) & = & 0.12\cdot(100) \\ \left.\begin{array}{l}\text{Cantidad de ácido que contienen}\\ \text{los } (100-x) \text{ mL de ácido al 30\%}\end{array}\right\} & = & \left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad de ácido que}\\ \text{contendrán los 100 mL al 12\%}\end{array}\right. \end{array}$$

Ahora, esto puede parecer una contradicción para algunos estudiantes... lo que significa en realidad es que la cantidad de ácido (puro) que se provee de la solución inicial (H_2SO_4 al 30%) debe ser la cantidad que haga una nueva solución al 12%.

✓ **Interpretar el resultado de acuerdo al contexto del problema (traducir a palabras)**

Este problema es muy sencillo, y su solución es inmediata:

$$\begin{aligned} 0.30\cdot(100-x) &= 0.12\cdot(100) \\ 30-0.3\,x &= 12 \\ 30-12 &= 0.3\,x \\ \frac{18}{0.3} &= x \\ x &= 60 \end{aligned}$$

El estudiante debe reconocer que x representa la cantidad de *agua* que debe incluir la mezcla, porque $100-x$ es la cantidad de ácido que debe contener (por eso multiplicamos a esta cantidad por la concentración de la solución inicial: H_2SO_4 al 30%).

Haga énfasis en no cometer el error de considerar al valor de x como la solución del problema, porque eso ocurre frecuentemente.

Los estudiantes resuelven correctamente el problema, pero interpretan incorrectamente el resultado, porque suponen que el valor que buscan es el primero que encuentran.

✓ **Verificar que la solución encontrada realmente satisface las condiciones del problema**

Este paso nos ayuda a detectar errores en el procedimiento que utilizamos para resolver un problema.

En el ejemplo del H_2SO_4, basta verificar que si agregamos 60 mL de agua, los otros 40 mL deben ser de H_2SO_4 al 30%.

De los 40 mL de la solución inicial, el 30% es ácido puro, es decir: $0.30\times 40 = 12$ mL. Y dado que el agua no contiene ácido, los 100 mL de nuestra nueva mezcla contendrá 12 mL de ácido puro, con lo que obtendremos una solución al 12% de H_2SO_4.

✓ **Identificar problemas sin solución física**

Este tipo de casos ocurren frecuentemente porque algunas veces es imposible, físicamente, resolver un problema.

Por ejemplo, basándonos en la información del problema anterior, consideremos que el laboratorista no desea obtener una nueva solución de H_2SO_4 al 12%, sino al 50%. La ecuación que obtendríamos en ese caso será:

$$0.30 \cdot (100 - x) = 0.50 \cdot (100)$$

y su solución es:

$$\begin{aligned} 0.30 \cdot (100 - x) &= 0.50 \cdot (100) \\ 30 - 0.3\,x &= 50 \\ 30 - 50 &= 0.3\,x \\ -\frac{20}{0.3} &= x \\ x &= -66.\bar{6} \end{aligned}$$

Pero es imposible agregar $-66.\bar{6}$ mL de agua, porque se trata de un número negativo.

Este resultado nos está diciendo dos cosas:

- Físicamente no podemos agregar agua para obtener una solución al 50% de ácido a partir de una solución (de ese ácido) al 30%.
- Lo que debemos hacer en realidad es remover $66.\bar{6}$ mL de agua[6] que ya contiene la solución al 30% para obtener la solución de ácido al 50%.

Esto es porque se le agregó más agua de la que se requería para que tuviera 50%, de manera que la concentración llegó hasta el 30%. Si se hubiera agregado menos agua (“*heme aquí...*”, dijo el signo menos) hubieramos conseguido una solución con mayor concentración.

El hecho de que es imposible aumentar la concentración de una solución agregándole agua es evidente, y esto nos ayuda a descubrir que la solución de este problema (desde el punto de vista físico) es imposible cuando observamos que nos están pidiendo preparar solución con concentración mayor a la solución que nos dieron para prepararla.

✓ **Identificar problemas sin solución matemática**

El caso anterior sí tenía solución matemática, aunque esta solución no tenía sentido físico.

Sin embargo, en algunos casos obtendremos problemas en los que la ecuación que obtengamos no tendrá, además, solución matemática.

Considere, por ejemplo el caso en el que se requiriera, a partir de la solución de H_2SO_4 al 0% se tuviera que preparar una nueva solución con un 10% de concentración. La ecuación ahora será:

$$0 \cdot (100 - x) = 0.10 \cdot (100)$$

y al realizar las operaciones indicadas obtenemos:

$$0 = 10$$

[6] Por cada 100 mL de solución de ese ácido.

lo cual no tiene sentido.

Y es que el problema en sí no tiene sentido... lo que nos está diciendo esta igualdad (sin sentido) es que es imposible preparar una solución de H_2SO_4 al 10% a partir de agua, que es en sí una solución de H_2SO_4 al 0%.

✓ **Enfatizar cuándo funciona y cuándo NO**

Cuando un profesor utiliza un procedimiento para resolver un problema, o un *truco* para resolver una parte del mismo, por ejemplo para realizar un cálculo, debe especificar a los estudiantes por qué funciona ese *truco* o procedimiento y en qué casos no va a funcionar.

Por ejemplo, si se requiere calcular 75^2, y utiliza el truco que aparece en la página 100, indique que solamente funciona para números de dos cifras que terminan en 5.

Otro caso, por ejemplo si desea mostrar un truco para multiplicar por 21, por ejemplo, funciona el siguiente: *dublica el otro factor, ágregale un cero a la derecha y súmalo...*

Por ejemplo, 21×34 puede calcularse como sigue:

✓ Duplicamos el otro factor: $34 \times 2 = 68$

✓ Agregamos un cero a la derecha y obtenemos 680.

✓ Finalmente sumamos el factor 34: $680 + 34 = 714$

Esto puede justificarlo de la siguiente manera: supongamos que queremos encontrar $21 \times k$.

1. En el primer paso encontramos: $2 \cdot k$
2. En el segundo paso agregamos un cero a la derecha, que es equivalente a multiplicar por diez. Así obtenemos: $20 \cdot k$
3. Finalmente, en el tercer paso sumamos el número k, es decir, obtenemos: $20\,k + k = 21\,k$

Usted debe mencionar que este truco sirve solamente para multiplicar por 21.

Sugiera a los estudiantes que ellos encuentren un truco similar para multiplicar por 31. Pronto se darán cuenta que en lugar de aumentar al doble tendrán que aumentar al triple, luego agregar el cero a la derecha y finalmente sumar el otro factor.

Pueden generalizar este procedimiento para encontrar rápidamente el producto de 41 ó 51, ó 61, etc., por cualquier otro número sin realizar directamente la multiplicación.

Y todavía podemos generalizar aún más si deseamos multiplicar por 23 en lugar de 21. En este último caso, tendremos que:

✓ duplicar el otro factor, es decir, calcular $2\,k$,

✓ agregar un cero a la derecha para obtener $20\,k$,

✓ y ahora, sumar el triple del factor k: $20\,k + 3\,k = 23\,k$.

Es importante que los estudiantes entiendan por qué deben sumar el triple al final y que se aplica solamente cuando vamos a multiplicar por 23.

Al obtener la ecuación del problema de la preparación de la solución de H_2SO_4 al 12%, multiplicamos las cantidades que había en las columnas para obtener los miembros de la ecuación.

Es importante que el estudiante entienda por qué debe multiplicar el volumen de la solución por su concentración para obtener cantidad de ácido (mL). Si se requiere defina la concentración como el cociente de la cantidad de material disuelto entre el volumen de la solución.

Explique con un despeje por qué debemos multiplicar en ese caso... y recuerde a los estudiantes que no siempre que haga una tabla debe multiplicar el contenido de las columnas para encontrar los miembros de la ecuación.

Cada procedimiento debe estar justificado.

✓ **Relacionar diferentes ramas de la matemática**

Si usted sabe que un sistema de ecuaciones no tiene solución, o tal vez no única, y les dice a sus estudiantes este resultado, indique que se dió cuenta porque una ecuación es múltiplo de otra, o porque calculó el determinante del sistema de ecuaciones dió cero, y por qué es así, utilizando la interpretación geométrica del sistema de ecuaciones y explicando (o recordando) cuándo tiene un S.E.L. solución única, a partir de las gráficas de las ecuaciones que forman el S.E.L. En este caso está utilizando la geometría para explicar un concepto de álgebra.

Si están estudiando la probabilidad binomial puede explicar el binomio de Pascal y mostrar algunas de sus propiedades (simetría, etc.) y recordarles a los estudiantes que el triángulo se estudia en álgebra, al estudiar productos notables.

Evidentemente, al estudiar el triángulo de Pascal en el curso de álgebra, puede adelantar que este mismo procedimiento facilita los cálculos de la probabilidad binomial y dar algunos ejemplos sencillos de este tema, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda cinco veces consecutivas se puede simular utilizando el binomio:

$$(a+s)^5 = a^5 + 5\,a^4s^1 + 10\,a^3s^2 + 10\,a^2s^3 + 5\,a^1s^4 + s^5$$

Puede mostrar que en cada término, la suma de los exponentes siempre es 5, que los coeficientes de los términos son simétricos, etc.

Para simplificar las cosas, a representa la probabilidad de que la moneda caiga *águila*, y s representa la probabilidad de que la moneda caiga *sol*. Si la moneda es *honesta*, ambos valores: $a = s = 0.5$

El exponente de cada literal indica cuántas veces cayó ese resultado. Por ejemplo, el término $10\,a^2s^3$ indica que en promedio, si realizamos el experimento muchas veces, de cada 2^5 (es decir, 32) experimentos, 10 de ellos tendrán el siguiente resultado: habrán caido 2 águilas (a^2) y 3 soles (s^3).

Las interpretaciones geométricas que aparecen en la sección 1.4 serán de gran ayuda en esta tarea.

✓ **Construir las definiciones a partir de problemas que las sugieran**

Los estudiantes retienen mejor una definición cuando ellos mismos han visto la necesidad de crearla a partir de un problema que requiere el uso de ese concepto. Es muy buena idea empezar una clase con un problema que sugiere la definición que planea que los estudiantes entiendan en esa clase.

Es una buena idea sugerir a los estudiantes que ellos mismos propongan la definición y usted, como profesor, debe guiarlos en esta tarea para que la definición sea completa y precisa.

Un ejemplo muy sencillo sería definir: x representa la cantidad de mililitros que debemos agregar a $100 - x$ mililitros de H_2SO_4 al 30% para preparar una solución de ese mismo ácido al 12%.

En casos más específicos, podría tratarse de una definición más formal, por ejemplo de los números primos.

6.1.2 La importancia de las definiciones precisas

En matemáticas, como en cualquier otra ciencia, las definiciones deben ser precisas.

Cuestiones que no tienen una misma definición en dos personas distintas nunca llegan a conclusiones sólida y mucho menos irrefutables, como lo requieren las matemáticas.

Una definición debe ser completa. Esto significa que debe considerar todas las cuestiones particulares del objeto definido.

Una definición también debe ser precisa. Esto significa que no debemos incluir cosas que no corresponden a lo que estamos definiendo.

Por ejemplo, si deseamos definir una circunferencia, no basta con decir: "*es una figura cerrada*", porque el cuadrado, la elipse, el hexágono y aún la esfera cumplen con esta condición. Esta definición no es precisa, porque abarca otras cosas que no son circunferencias.

En caso de que la definieramos como "*el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, que corresponde al centro*", todavía estamos incluyendo en esa definición a la esfera. Necesariamente debemos mencionar que esos puntos deben estar sobre un plano, para que se trate de la circunferencia.

Si deseamos definir lo que es una función, esta definición debe dejar clara la diferencia con una ecuación.

Algunas veces el mostrar ejemplos sencillos del objeto que estamos definiendo y después objetos que no son del tipo de objeto definido ayuda a los estudiantes a identificarlos. Evidentemente en cada ejemplo debe mencionarse por qué cumple o no cada objeto con la definición que se está estudiando.

También es importante mencionar los casos particulares o excepciones de una o varias definiciones relacionadas entre sí.

Enseguida se muestran algunos ejemplos.

- **Primos, compuestos y el 1**

  Un número primo se define como un número natural que tiene exactamente dos divisores naturales.

  Un número compuesto se define como un número natural que tiene más de dos divisores.

  Esto deja al número 1 como un número especial. No es primo porque no tiene exactamente dos divisores naturales. Tampoco es un número compuesto porque no tiene más de dos divisores.

  Estos casos especiales tienen que ser puntualizados con especial énfasis para que los estudiantes realmente comprendan las definiciones con mayor profundidad.

- **Ecuación y función**

  Una ecuación se define como la igualdad entre dos expresiones algebraicas.

  Una función se define como una relación entre dos conjuntos, de manera que para cada elemento del primer conjunto (dominio) le corresponde a lo más un único elemento del segundo conjunto (rango o contradominio).

  Todas las funciones pueden ser consideradas ecuaciones, pero no todas las ecuaciones son funciones. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia unitaria con centro en el origen $x^2 + y^2 = 1$, no es una función.

  Una ecuación puede tener solamente una variable. Por ejemplo, $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, pero la función requiere de dos variables, para que una esté en función de la otra.

  El caso especial de la recta horizontal: $y = k$, es la única excepción a la regla que se acaba de dar. Esta ecuación satisface la definición de función, por eso se le considera como tal. En palabras esta función dice: "*independientemente del valor de x que me des, yo voy a asignar a y el valor k siempre.*" [7]

  Al explicar este concepto a los estudiantes es muy recomendable iniciar con una definición informal y algunos ejemplos para después resolver algunos ejercicios y terminar con la definición formal.

  Por ejemplo, para definir una función de manera informal, podemos decir:

[7] Igual, podemos escribirla como: $y = 0\,x + k$.

Definición 6.1.1

FUNCIÓN (DEFINICIÓN INFORMAL)
Es una máquina en forma de una fórmula que nos ayuda a transformar los números. Nosotros le damos un valor y la máquina nos devuelve a lo más otro valor. Es posible que nosotros le demos un valor y ella no nos devuelva alguno, pero ***no*** *es posible que cuando le demos un valor la máquina nos devuelva más de uno.*
Los valores que la máquina puede transformar, o sea, los valores que nosotros le vamos a dar a la máquina forman un conjunto que se llama dominio de la función.
Los valores que la máquina nos devuelve forman otro conjunto que se llama rango o contradominio de la función.

Algunos ejemplos de funciones son:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-2x \\ g(x) &= x^2 \\ h(x) &= \sqrt{x+1} \\ y &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Después explique algunos ejemplos de funciones que se aplican normalmente en el comercio. Por ejemplo:

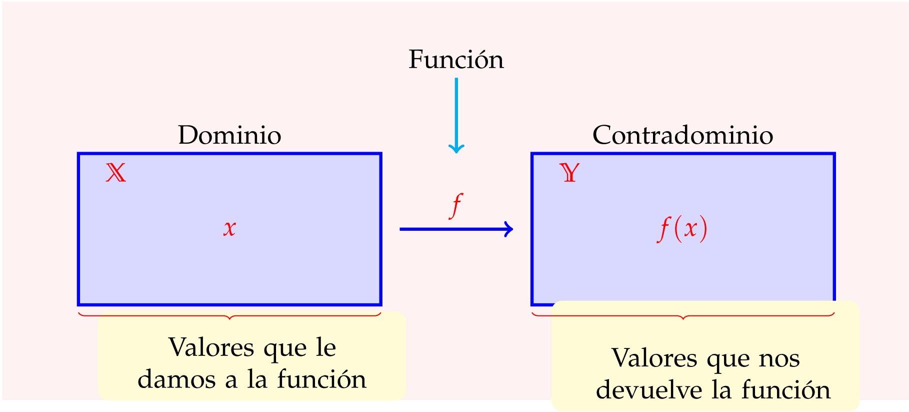
Una compañía de transporte urbano cobra \$350.00 pesos por solicitar el servicio y \$12.00 pesos por cada kilómetro recorrido. La función que nos transforma el número de kilómetros recorridos en el precio que debo pagar por ese servicio es: $y = 12\,x + 350$, *donde x es el número de kilómetros del recorrido y y representa lo que debemos pagar.*

Agregue un ejemplo numérico para que capten mejor el concepto de transformación de un número. Mencione otros ejemplos prácticos.

Cuando está explicando por primera vez un concepto muchas veces ayuda a aclararlo un diagrama. Igual, puede explicar el concepto de función de manera informal como una máquina que transforma números con un diagrama.

Considere de esta manera cuantos conceptos le sea posible. Mientras más sencillos y reales le parezcan a los estudiantes los ejemplos que muestra al definir el nuevo concepto, ellos realizarán una representación mental de ese concepto más adecuada y menos abstracta que les ayudará a entenderlo mejor.

Después de que los estudiantes hayan captado la idea general de lo que es una función puede explicarla de manera más formal también, con un diagrama, mencionando los elementos de la función, como el siguiente:



Haga incapié en la importancia de diferenciar la notación y reconocer cada cosa por su nombre y su símbolo.

- **Igualdad e identidad**

  Una igualdad es una relación que indica que dos cantidades tienen el mismo valor. Por ejemplo, $2 + 3 = 5$ es una igualdad.

  Una identidad es una igualdad que se cumple para todos los valores de las literales que se encuentran en ella.

Igualdad	**Identidad**
$5x + 2 = 22$	$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

  Si sustituimos valores en las literales de la igualdad, ésta no siempre se cumplirá. De hecho se cumple, en este caso, solamente para un valor, $x = 4$. En cambio para el caso de la identidad, la igualdad se cumple para cualesquiera valores que se asignen a las variables x, y.

  En otras palabras, la identidad es un caso particular de la igualdad.

- **Sucesión y serie**

  Una sucesión es una lista de números que siguen una regla predefinida. Por ejemplo, 2, 5, 8, 11, etc. es una sucesión.

  Una serie es la suma (finita o infinita, según sea el caso) de los términos de una sucesión.

- **Círculo y circunferencia**

  En matemáticas la circunferencia es el conjunto de puntos que se encuentran sobre un plano a una distancia fija (radio) de un punto fijo (centro de la circunferencia).

  El círculo es el área que queda encerrada por la circunferencia.

  La circunferencia representa la "*orilla*" del círculo, es decir, el perímetro.

  Podemos encontrar el área de un círculo, pero no así con la circunferencia.

En matemáticas existen muchas otras instancias en las cuales usted tendrá que puntualizar los casos especiales, indicar por qué funciona en un caso particular un método y por qué no funciona en otro caso particular, etc.

Es importante que los estudiantes vayan construyendo su conocimiento a partir de lo que ya conocen y que la base quede bien cimentada, porque eso servirá para avanzar más rápido en cursos posteriores.

6.2 Algunos ejemplos

> *No se trata de que los maestros entiendan las matemáticas, sino que sean capaces de traducirlas de manera que al transmitirlas a sus alumnos, a éstos les parezcan impresionantes, y de paso, aprendan a pensar analíticamente.*
>
> — Anónimo.

En esta sección se muestran algunos ejemplos de cómo puede explicar algunos conceptos básicos de las matemáticas.

Muchos de los trucos que se explican en esta sección bien pueden emplearse en un curso básico de álgebra, porque la justificación de muchos de ellos la utiliza ampliamente. De esta manera, los estudiantes adquieren una imagen más apegada a la realidad: las matemáticas se crearon para facilitarnos la vida.

6.2.1 Cálculo mental

Enseguida se muestran algunos trucos que permiten a los estudiantes puedan realizar cálculos aritméticos de una manera muy sencilla.

Es importante que el estudiante entienda en cada caso por qué funciona el truco, porque de esta manera podrá aplicar este mismo método en otros casos similares.

Recuerde en cada caso a los estudiantes que mientras menos utilicen la calculadora y más practiquen estos trucos mayor habilidad adquirirán.

- **Sumar 9**

  Cuando sumamos 9 a un número, el resultado se encuentra fácilmente agregando uno a las decenas y quitando uno a las unidades.

  Por ejemplo: $17 + 9 = 26$. Agregamos 1 al 1 del 17 y quitamos 1 al 7, para obtener 26.

  Esto se debe a que sumar 9 es lo mismo que sumar $10 - 1$. Al sumar 10, en realidad estamos agregando uno en las decenas y al restar 1 (para no sumar 10, sino 9), estamos quitando uno en las unidades.

- **Restar 9**

  Para restar 9, es más fácil restar mejor 10, y después sumar 1. Esto porque $-9 = -10 + 1$.

  Por ejemplo, para restar 9 de 345, restamos primero 10, obteniendo 335, y después sumamos uno a este resultado, con lo que obtenemos: 336.

- **Multiplicar por 9**

  Agregar un cero a la derecha y restar el factor.

  Por ejemplo, $9 \times 123 = 1\,230 - 123 = 1\,107$.

  La justificación de este procedimiento es muy sencilla. Cuando multiplicamos un número k por 9, en realidad estamos sumando $k + k + \cdots + k$ nueve veces. Cuando agregamos un cero a la derecha del número k, obtenemos el resultado de multiplicarlo por 10. Cuando restamos k a este resultado, obtenemos $9\,k$.

  Es decir, $10\,k - k = 9\,k$.

- **Multiplicar por 99**

  Este caso es similar al anterior: agregamos dos ceros a la derecha del otro factor y restamos el número.

  Por ejemplo: $99 \times 23 = 2\,300 - 23 = 2\,277$.

  La justificación está en que $100 = 99 - 1$. Es decir, multiplicamos 100 por el otro factor y después lo restamos, con lo que terminamos multiplicando por 99.

  $$99\,k = 100\,k - k$$

  Ahora usted generalice este procedimiento para poder multiplicar por cualquier número cuyos dígitos sean solamente nueves.

- **Multiplicar un número de dos cifras por 11**

  La regla es muy sencilla. Sumar las dos cifras, y escribir el número en medio de las cifras. Cuando la suma es mayor o igual a 10, escribe en medio la cifra de las unidades (de la suma) y suma uno a la cifra de las decenas para escribirlo en las centenas.

  Por ejemplo: $11 \times 23 = 253$.

  Este truco se explica fácilmente cuando se desarrolla la multiplicación de manera convencional.

  $$\begin{array}{rrr} & 2 & 3 \\ \times & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \\ \hline 2 & 5 & 3 \end{array}$$

  Siempre quedan “*en medio*” los dígitos del otro factor y se deben sumar. Por eso, cuando la suma es mayor o igual a 10, debemos escribir el dígito de las unidades (de la suma) y sumar uno al dígito de las decenas para escribirlo en las centenas.

  Otra forma alternativa de realizar esta misma multiplicación consiste en agregar un cero a la derecha del número, que equivale a multiplicar por 10, y después sumar el número. En el caso del ejemplo anterior, tendremos:

  $$11 \times 23 = 230 + 23$$

Cuando agregamos un cero a la derecha estamos multiplicando por diez y cuando sumamos 23, completamos para que en realidad terminemos multiplicando por once.

Este procedimiento se justifica con la ley distributiva[8] para los números reales:

$$11 \times 23 = 23 \times 11 = 23 \times (10+1) = 230 + 23$$

Con cualquiera de estos procedimientos puede generalizar y multiplicar ahora por 22, 33, etc. Para este fin, multiplique primero por 11, y después por 2, 3, etc., y así facilitar los cálculos mentales.

- **Multiplicar por un número entre 12 y 20**

  Para realizar el cálculo mental de 13×45 multiplicamos solamente por la cifra de las unidades del número entre 12 y 20, agregamos un cero al 45 y sumamos los resultados:

  $$13 \times 45 = 450 + 135 = 585$$

  La justificación de este procedimiento también está en la ley distributiva:

  $$13 \times 45 = 45 \times 13 = 45 \times (10+3) = 45 \times 10 + 45 \times 3$$

  Al multiplicar 45×10 estamos agregando un cero a la derecha del número 45, y a este resultado le sumamos 43×3.

  En general, si vamos a multiplicar el número a por $10 + k$, siendo $2 \leq k \leq 9$, aplicamos de nuevo la ley distributiva y obtenemos:

  $$(10+k) \times a = 10\,a + k \cdot a$$

  Observe que el caso de la multiplicación por 11 está incluido en esta justificación.

- **Multiplicar por 15**

  La multiplicación por 15 es muy sencilla: agregue un cero al otro factor y después sume la mitad del número que obtuvo.

  Por ejemplo, para multiplicar 15×37, agregamos un cero al 37 y obtenemos 370, después sumamos a este número su mitad, es decir, sumamos 185. Entonces, $15 \times 37 = 370 + 185 = 555$.

  Lo que justifica este procedimiento consiste en que al agregar un cero al otro factor (37 en este caso), equivale a haberlo multiplicado por 10. Cuando calculamos la mitad de este número, en realidad estamos calculando el resultado de multiplicar el factor (37) por cinco, porque:

  $$\frac{37 \times 10}{2} = 37 \times 5$$

[8]Puede ver la interpretación geométrica de la ley distributiva de los números reales en la página: 47.

Entonces, si desea multiplicar el número k por 15, agregue un cero a la derecha y sáquele mitad, sume estos dos últimos números y terminó.

- **Multiplicar dos números de dos dígitos**

  Este truco solamente sirve para el siguiente caso: cuando el dígito de las decenas en ambos factores es igual y la suma de los dígitos de las decenas es 10.

  Supongamos que deseamos multiplicar los números 34×36. En este caso, el dígito de las decenas de ambos factores es el mismo (3) y la suma de los dígitos de las unidades es: 4 + 6 = 10.

  Para calcular 34×36, tomamos el dígito de las decenas de un factor (en ambos es el mismo) y lo multiplicamos por su consecutivo. En este caso, multiplicaremos $3 \times 4 = 12$. A su derecha escribimos el producto de los dígitos de las unidades, en este caso $4 \times 6 = 24$. Obtenemos como resultado: $34 \times 36 = 1224$. Puede verificar este resultado *manualmente*.

  ¿Por qué funciona? Vamos a utilizar un poco de álgebra para justificarlo.

  En primer lugar, vamos a escribir los números de la siguiente manera: primer factor: $10\,k + a$, y segundo factor: $10\,k + b$.

  En nuestro ejemplo numérico, $k = 3$, $a = 4$ y $b = 6$. Tenemos como requisito que $a + b = 10$. Al multiplicar estas expresiones obtenemos:

  $$(10\,k + a) \cdot (10\,k + b) = 100\,k^2 + (a + b)\,10\,k + a\,b$$

  pero $a + b = 10$, luego,

  $$\begin{aligned} (10\,k + a) \cdot (10\,k + b) &= 100\,k^2 + (a + b)\,10\,k + a\,b \\ &= 100\,k^2 + 100\,k + a\,b \\ &= 100\,k\,(k + 1) + a\,b \end{aligned}$$

  ✓ El producto $k\,(k + 1)$ representa la multiplicación del dígito de las decenas por su consecutivo.

  ✓ Cuando multiplicamos por 100, en realidad estamos agregando dos ceros a la derecha, por lo que al sumar el producto $a\,b$, en realidad los estamos agregando a la derecha.

  ✓ El producto $a\,b$ representa la multiplicación de los dígitos de las unidades de cada factor.

  ✓ Debido a que $a + b = 10$, el mínimo producto se da cuando tenemos $9 \times 1 = 9$. En este caso, debemos escribir 09 a la derecha del producto $k\,(k + 1)$.

  ✓ El mayor producto ocurre cuando $a = b = 5$, y en este caso, $5 \times 5 = 25$.

- **Multiplicar por un número que termina en 9**

  Como es muy fácil multiplicar por un número que es múltiplo de 10, cuando debemos multiplicar por un número que termina en 9, es muy buena idea sumar 1 a ese número, realizar la multiplicación y después restar el otro factor. Esto porque:

  $$m \cdot (10\,k + 9) = m \cdot (10\,k + 10 - 1) = m \cdot [10\,(k + 1) - 1] = 10\,(k + 1)\,m - m$$

donde hemos aplicado la ley distributiva para los números.

Por ejemplo,

$$29 \times 47 = 30 \times 47 - 47 = 1\,410 - 47 = 1\,363$$

- **Multiplicar por divisores de 100**

  Por ejemplo, multiplicar 17×50. Es muy sencillo multiplicar por 100, pues solamente agregamos dos ceros a la derecha del otro factor.

  Sabemos que $2 \times 50 = 100$, entonces, para multiplicar por 50, basta hacer:

$$17 \times 50 = 17 \times \frac{2 \times 50}{2} = \frac{17 \times 100}{2} = \frac{1\,700}{2} = 850$$

  En conclusión, si vamos a multiplicar por un número d que es divisor de 100, es mejor agregar dos ceros a la derecha del otro factor (que equivale a multiplicar por 100) y después dividir entre $100 \div d$.

  Otro ejemplo. 25×37, se resolverá así: como $100 = 25 \times 4$, agregamos dos ceros al otro factor (37) y después dividimos entre 4.

$$25 \times 37 = \frac{3\,700}{4} = \frac{1\,850}{2} = 925$$

- **Multiplicar por 5**

  A pesar de que 5 es un divisor de 100, vamos a mostrar un truco más sencillo, pero que tiene como base el mismo principio que el truco anterior.

  Agregamos un cero a la derecha del otro factor y después sacamos la mitad.

  Por ejemplo:

$$5 \times 37 = \frac{370}{2} = 185$$

  Esto se justifica con lo siguiente:

$$5 \cdot k = \frac{2}{2} \times 5 \times k = \frac{10 \cdot k}{2}$$

- **Dividir entre 5**

  La justificación del procedimiento para dividir por 5 es similar al truco anterior.

  Dado que dividir por 10 significa correr el punto decimal un lugar a la izquierda, y que $10 = 2 \times 5$, mejor multiplicamos por 2 y al resultado le corremos el punto decimal un lugar a la izquierda.

  Por ejemplo,

$$\frac{37}{5} = 37 \times \frac{1}{5} = 37 \times \frac{2}{10} = \frac{37 \times 2}{10} = \frac{74}{10} = 7.4$$

- **Multiplicación a través de la ley distributiva**

  Este truco para realizar cálculos mentales es muy sencillo de aplicar. Consideremos, por ejemplo que queremos calcular 3×27. Este producto podemos expresarlo así:

$$\begin{aligned} 3 \times (20 + 7) &= 3 \times 20 + 3 \times 7 \\ &= 60 + 21 \\ &= 81 \end{aligned}$$

  Este caso se considera una multiplicación de un número de una cifra por uno de dos cifras.

  Podemos utilizar el mismo procedimiento para calcular un número de una cifra por tres o más cifras[9].

- **Elevar al cuadrado a través del binomio al cuadrado**

  En este truco vamos a utilizar el famoso binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ para calcular el cuadrado de un número de dos cifras.

  Por ejemplo, digamos que queremos calcular 47^2. En este caso hacemos: $a = 40$ y $b = 7$, con lo cual empezamos los cálculos:

$$\begin{aligned} (40 + 7)^2 &= 40^2 + 2\,(40)(7) + 7^2 \\ &= 1600 + 560 + 49 \\ &= 2209 \end{aligned}$$

  Es más sencillo empezar calculando el producto $2\,ab$, después sumar a^2 y finalmente sumar b^2.

  De esta manera podemos calcular el cuadrado de cualquier número entero de dos cifras. Otro ejemplo se muestra en la página 99.

  Para el caso particular de elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en 5, puede explicar el truco más sencillo que se explica en la página 100.

- **Multiplicar dos números con** $(a + b)(a - b)$

  Otro producto notable que se puede utilizar para realizar operaciones mentalmente de una manera ágil consiste en el producto conjugado.

  Por ejemplo, para multiplicar $14 \times 16 = 16 \times 14$, podemos definir: $a = 15$ y $b = 1$, con lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\ 16 \times 14 &= (15 + 1)(15 - 1) \\ &= 15^2 - 1^2 \end{aligned}$$

  Ahora aplicamos el truco para elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en 5: $15^2 = 225$, y el resultado de la multiplicación:

$$\begin{aligned} 16 \times 14 &= 15^2 - 1^2 \\ &= 225 - 1 \\ &= 224 \end{aligned}$$

[9] La interpretación geométrica de la ley distributiva se encuentra en la página 47.

Un caso más sencillo sería, por ejemplo, multiplicar 29×31, para lo cual escribimos:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\\ 31 \times 29 &= (30+1)(30-1)\\ &= 30^2 - 1^2\\ &= 900 - 1\\ &= 899\end{aligned}$$

Puede verificar los resultados realizando la multiplicación *a mano*.

Un ejemplo menos sencillo que los dos anteriores será encontrar el resultado de multiplicar 13×19.

Ahora encontramos el promedio de 13 y 19, que es 16, y la diferencia entre 16 y 13 es 3 (que es igual que la diferencia de 19 y 16). Esto nos permite definir $a = 16$ y $b = 3$ y proceder como sigue:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\\ 19 \times 13 &= (16+3)(16-3)\\ &= 16^2 - 3^2\end{aligned}$$

Ahora debemos elevar al cuadrado 16 utilizando el truco de elevar al cuadrado un número de dos cifras.

$$\begin{aligned}(10+6)^2 &= 10^2 + 2\,(10)(6) + 6^2\\ &= 100 + 120 + 36\\ &= 256\end{aligned}$$

y finalmente, terminamos el producto calculando la diferencia de cuadrados que quedaron indicados:

$$\begin{aligned}19 \times 13 &= 16^2 - 3^2\\ &= 256 - 9\\ &= 247\end{aligned}$$

Una forma de tener evidencia de que el resultado podría estar correcto consiste en multiplicar las unidades de los factores, en este caso, $3 \times 9 = 27$. La cifra de las unidades debe coincidir con el resultado del producto que estamos buscando[10].

Debe notar que este truco se puede realizar siempre que los factores sean, bien ambos pares, bien ambos impares, porque en estos casos la suma de los dos factores es un número par y el promedio de ellos (a) es otro número entero. Esto nos ayuda porque la diferencia entre ellos b será un número entero.

[10] Esto se justifica por la forma como realizamos la multiplicación: multiplicamos unidad por unidad y en el siguiente renglón no hay ningún dígito, porque lo escribimos en las decenas, dado que multiplicamos unidades por decenas.

Igual, podemos aplicar el truco de multiplicar por un número que termine en 9:

$$\begin{aligned} 19 \times 13 &= (20-1)(13) \\ &= 20 \times 13 - 13 \\ &= 260 - 13 \\ &= 247 \end{aligned}$$

- **Operaciones con fracciones (simplificar)**

  Siempre sugiera a los estudiantes simplificar las fracciones antes de empezar a realizar las operaciones.

  Una forma muy instructiva que Dr. Sanjuán mostró esto en clase consistió en pedir a los estudiantes calcular la siguiente suma:

$$\frac{789}{1\,578} + \frac{967}{1\,934}$$

  Si los estudiantes desean ir por el camino más largo, empezarán por calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores[11], y continuarán con el procedimiento que ya deben conocer.

  Sin embargo, si observamos con cuidado, veremos que el denominador de la primera fracción es igual al doble del numerador. Es decir, si simplificamos debemos obtener:

$$\frac{789}{1\,578} = \frac{1}{2}$$

  Lo mismo ocurre con la segunda fracción:

$$\frac{967}{1\,934} = \frac{1}{2}$$

  Entonces, si queremos sumar estas fracciones es lo mismo que sumar un medio más un medio:

$$\frac{789}{1\,578} + \frac{967}{1\,934} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

  La lección aquí debe generalizarse a las expresiones algebraicas. Cuando trabajamos con fracciones algebraicas algunas veces es más fácil factorizar tanto el numerador como el denominador. Sin embargo, aquí se debe tener cuidado con las suposiciones, porque si el denominador es $(x-\alpha)(x-\beta)$, estamos suponiendo que $x \neq \alpha$ y que $x \neq \beta$ para que la división tenga sentido.

  Así que si al simplificar la fracción se *cancela* uno de los factores del denominador que se pueda hacer cero, por ejemplo, $x-\delta$, debe seguir teniendo en mente que $x \neq \delta$.

[11] Imagínese la dificultad que tendrán cuando los denominadores sean primos relativos y no se den cuenta de ello.

- **Dividir entre múltiplos de diez**

  Para dividir entre un múltiplo de diez, por ejemplo 30, es mejor dividir primero entre 3 y después entre 10, porque:

$$\frac{k}{30} = \frac{k}{3} \cdot \frac{1}{10}$$

  Por ejemplo, para calcular el resultado de dividir 1 entre 30, primero calculamos $1/3$ que ya sabemos que es $0.33333\cdots$. Para terminar dividimos entre diez.

  Pero dividir entre diez significa que debemos correr el punto decimal un lugar a la derecha, entonces,

$$\frac{1}{30} = 0.03333\cdots$$

  Para calcular $3/80$, mejor hacemos:

$$\frac{3}{80} = 3 \cdot \frac{1}{80} = 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} = (3)(0.125)(0.1) = (3)(0.0125) = 0.0375$$

  Para facilitar estos cálculos facilitará mucho la tarea el memorizar las siguientes fracciones:

  ✓ $\frac{1}{2} = 0.5$ ✓ $\frac{1}{5} = 0.2$ ✓ $\frac{1}{9} = 0.1111\cdots$

  ✓ $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots$ ✓ $\frac{1}{6} = 0.1666\cdots$ ✓ $\frac{1}{10} = 0.1$

  ✓ $\frac{1}{4} = 0.25$ ✓ $\frac{1}{8} = 0.125$

  Pero siempre es más fácil correr el punto decimal un lugar a la derecha en lugar de dividir entre diez (manualmente).

- **Criterios de divisibilidad, leyes de los exponentes y multiplicaciones**

  Algunas veces sirve de mucho utilizar los criterios de divisibilidad para realizar multiplicaciones "*tramposamente*" para evitarnos dificultades.

  Por ejemplo, alguna vez un amigo requirió multiplicar 50×27. Para realizar esta multiplicación usamos el siguiente *truco*:

$$\begin{aligned} 50 \times 27 &= 2 \times 25 \times 27 \\ &= 2 \times (26-1) \times (26+1) \end{aligned}$$

  o bien, el siguiente truco:

$$\begin{aligned} 50 \times 27 &= 2 \times 25 \times 27 \\ &= 2 \times 5^2 \times 3^3 \\ &= 2 \times 3 \times 5^2 \times 3^2 \\ &= 2 \times 3 \times (5 \times 3)^2 \\ &= 6 \times 15^2 \\ &= 6 \times 225 \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} 50 \times 27 &= 5 \times 10 \times 27 \\ &= 10 \times 5 \times (20 + 7) \\ &= 10 \times (100 + 35) \\ &= 10 \times 135 \\ &= 1\,350 \end{aligned}$$

o el más sencillo:

$$\begin{aligned} 50 \times 27 &= \frac{2}{2} \times 50 \times 27 = \frac{2 \times 50}{2} \times 27 \\ &= \frac{100 \times 27}{2} \\ &= \frac{2\,700}{2} = 1\,350 \end{aligned}$$

En distintos casos utilizaremos el *truco* más conveniente. Cuál aplicar depende de la situación. Esto lo aprenderá[12] con práctica.

Como puede ver, se omiten los casos demasiado evidentes, como multiplicar por 10, por 100, etc.

6.2.2

6.2.2 Operaciones con polinomios

Cuando realizamos la suma de dos o más polinomios sumamos términos semejantes con términos semejantes. El estudiante al escuchar esto puede causarle confusión si no ha comprendido a profundidad por qué decimos que los términos $7\,x$ y $-2\,x$ son términos semejantes.

Sin embargo, un ejemplo explicado como se muestra enseguida puede ayudarle a generalizar la idea de sistema de numeración y a comprender mejor los polinomios:

Ejemplo 6.2.1

Calcula la siguiente suma:

$$(x^2 + 5\,x - 3) + (2\,x^2 - 7\,x + 12) =$$

Profesor:

Lea el problema motivador de la página 18.

- Podemos considerar al coeficiente del término que contiene a x^2 como el dígito de las *centenas* del polinomio.
- De manera semejante, podemos considerar al término que contiene a x como el dígito de las *decenas* del polinomio.

[12]Tanto el estudiante como el profesor

- Finalmente, podemos considerar al término independiente (que no contiene a x) como el dígito de las *unidades* del polinomio.
- Cuando realizamos operaciones con números sumamos unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.
- De la misma manera realicemos la suma con los polinomios:

$$\begin{array}{r} x^2 + 5\,x - 3 \\ +\,2\,x^2 - 7\,x + 12 \\ \hline 3\,x^2 - 2\,x + 9 \end{array}$$

- El estudiante debe notar que sumamos por separado términos semejantes:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\,x^2 &= 3\,x^2 \\ 5\,x - 7\,x &= -2\,x \\ -3 + 12 &= 9 \end{aligned}$$

- Y finalmente escribimos el resultado: $3\,x^2 - 2\,x + 9$.

El estudiante debe observar que no podemos sumar un término que tiene a x^2 con otro que tiene a x, porque es como si estuvieramos sumando centenas con decenas...

Aquí surge la clásica pregunta: "*¿Sumarías peras con manzanas?*"... El error consistiría en que no acomodamos los números correctamente alineados con respecto al punto decimal.

El estudiante fácilmente puede ahora comprender por qué debemos sumar los términos semejantes y a partir de ahí, usted como profesor, puede ahora generalizar el concepto de término semejante introduciendo términos con varias literales, por ejemplo: x^2y.

En caso de que un estudiante pregunte a otro si podemos sumar unidades con decenas, el segundo estudiante debe corregir diciendo: *estás sumando dos términos que no son semejantes, y siempre debemos sumar téminos semejantes...*

Todas las operaciones con polinomios se pueden generalizar con esta idea.

Ahora consideramos la multiplicación de un binomio por un trinomio.

El procedimiento para calcular el siguiente producto es, en esencia, el mismo que el de la multiplicación de números enteros. El estudiante debe saber aplicar la ley distributiva, una por cada término del binomio.

Así que el estudiante no debe espantarse por ver muchos términos en cada uno de los polinomios que se están multiplicando: aplicamos la ley distributiva para cada uno de los términos del primer polinomio, multiplicando por todos los términos del segundo polinomio.

Al final, simplificamos sumando términos semejantes y así obtenemos el resultado de esa multiplicación.

Ejemplo 6.2.2

Multiplica:

$$(x-5)\left(2\,x^2+11\,x-9\right) =$$

- El estudiante debe reconcer que vamos a aplicar la ley distributiva dos veces, una por cada término del primer factor:
- **Primera** vez que aplicamos la ley distributiva:

$$(x)\left(2\,x^2+11\,x-9\right) = 2\,x^3+11\,x^2-9\,x$$

- **Segunda** vez que aplicamos la ley distributiva:

$$(-5)\left(2\,x^2+11\,x-9\right) = -10\,x^2-55\,x+45$$

- Ahora sumamos los términos semejantes y terminamos:

$$\begin{aligned}(x-5)\left(2\,x^2+11\,x-9\right) &= [2\,x^3+11\,x^2-9\,x]+[-10\,x^2-55\,x+45]\\ &= 2\,x^3+x^2-64\,x+45\end{aligned}$$

- Podemos explicar la analogía con los números enteros realizando una operación y comparando los procedimientos.

Antes de continuar con la división de un polinomio entre un binomio, es muy buena idea recordar el procedimiento para realizar la división entre números. Esto les sirve a los estudiantes para reconocer las similitudes y entender por qué se realiza ese procedimiento.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente división:

$$12\,\overline{\big)\;401\;}$$

Para realizar esta operación buscamos un número que multiplicado por 12 resulte 40, o un poco menor. Ese número es 3, porque $3 \times 12 = 36$.

Escribimos el 3 "*sobre la casita*" y 36 debajo del número 40:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3 \\ \cline{2-2} 12 & 401 \\ & 36 \end{array}$$

Lo siguiente consiste en cambiar de signo al número 36 y hacer la suma de los números 40 y -36:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3 \\ \cline{2-2} 12 & \;401 \\ & -36 \\ \cline{2-2} & \;\;\;\,4 \end{array}$$

Ahora "*bajamos*" el número 1 (del 401) y volvemos a buscar un número que multiplicado por 12 sea igual a 41 o un poco menos. Ese número es, de nuevo 3, porque $12 \times 3 = 36$.

Continuamos con el procedimiento:

$$\begin{array}{r|l} & \;33 \\ \cline{2-2} 12 & \;401 \\ & -36 \\ \cline{2-2} & \;\;\;41 \\ & \;-36 \\ \cline{2-2} & \;\;\;\;\;5 \end{array}$$

Entonces, el resultado de dividir 401 entre 12 es igual a 33 enteros y $\dfrac{5}{12}$.

El estudiante debe observar que el residuo de la división se dividió entre 12 (el divisor), porque todavía no lo habíamos dividido (todavía estaba dentro de "*la casita*").

Exactamente el mismo procedimiento es el que seguiremos cuando hagamos una división entre polinomios.

Ejemplo 6.2.3

Calcula:

$$(x^2 - 5\,x - 10) \div (x - 3) =$$

- Empezamos colocando el dividendo y el divisor en "*la casita*":

$$\begin{array}{r|l} & \\ \cline{2-2} x-3 & x^2 - 5\,x - 10 \end{array}$$

- Ahora buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a x^2. Esa expresión es: x.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} x-3 & x^2 - 5\,x - 10 \end{array}$$

- Ahora, vamos a multiplicar la expresión que acabamos de encontrar por $x-3$. Igual que con la división con números, vamos a cambiar el signo al resultado y después sumamos algebraicamente.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-3 & \cancel{x^2} - 5\,x - 10 \\ & -\cancel{x^2} + 3\,x \\ \hline & \quad -2\,x \end{array}$$

- A continuación bajamos el número -10 del divisor.
- Al igual que en el caso de la división con números, buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a: $-2\,x$
- En este caso, necesitamos: -2
- Ahora multiplicamos este número por $x-3$ y el resultado lo escribimos debajo del último renglón...

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x-3 & x^2 - 5\,x - 10 \\ & -\cancel{x^2} + 3\,x \\ \hline & \quad -\cancel{2\,x} - 10 \\ & \quad \cancel{2\,x} - \ 6 \\ \hline & \qquad -16 \end{array}$$

- Entonces,

$$\frac{x^2 - 5\,x - 10}{x-3} = x - 2 - \frac{16}{x-3}$$

Recuerde al estudiante: *"Si se te llega a olvidar cómo realizar una operación con polinomios, basta recordar cómo realizas esa operación con números"*.

Exactamente el mismo procedimiento es el que debe utilizar con los polinomios. Esto gracias a que los polinomios en realidad representan números, y como tales deben ser tratados.

En el ejemplo dado el residuo de la división fue distinta de cero, pero esto no siempre será así. Es una buena idea explicar un ejemplo más en el que el residuo de la división sea cero y explique por qué no aparece la parte fraccionaria en el cociente, con la similitud de la división con números enteros, cómo se escribe el resultado de esa división.

Puede ver un problema motivador relacionado con este tema en la página 18.

6.2.3 División sintética y evaluación de un polinomio

Podemos utilizar el procedimiento de la división sintética para evaluar a un polinomio de una manera muy sencilla y rápida.

Por ejemplo, si desea evaluar el polinomio $3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ en $x = 2$, aplicamos la división sintética de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrr|l}
3 & -5 & 7 & -2 & 2 \\
 & 6 & 2 & 18 & \\
\hline
3 & 1 & 9 & \boxed{16} &
\end{array}$$

Ahora consideramos la misma división y la resolvemos por el procedimiento de la *división larga*:

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + x + 9 \\
\cline{2-2}
x - 2 & 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \\
 & -3x^3 + 6x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad x^2 + 7x \\
 & \qquad -x^2 + 2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 9x - 2 \\
 & \qquad\qquad -9x + 18 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 16
\end{array}$$

Ahora observe el procedimiento que realizamos en la división sintética y trate de explicar qué representa cada número en el arreglo de números de acuerdo a la división larga que se muestra.

Nuestro siguiente paso consiste en evaluar $P_3(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ en $x = 2$.

Al realizar los cálculos vemos que $P_3(2) = 16$. Observe que podemos calcularlo con la división sintética. Las preguntas que ahora debemos responder son: "*¿funciona siempre?*", y si es así, "*¿por qué funciona?*"

Para responderlas, empezamos notando que dividimos $P_3(x)$ por $x - 2$, y estamos evaluando, al mismo tiempo en $x = 2$, esto es, igualamos a cero el divisor y despejamos la incógnita.

En el procedimiento de la división sintética vamos multiplicando los coeficientes de $P_3(x)$ por el valor de x que queremos sustituir en el polinomio.

Para considerar un caso más general, supongamos que vamos a evaluar el polinomio $3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ en $x = k$. Entonces, de acuerdo al procedimiento que estamos utilizando obtenemos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
3 & -5 & 7 & -2 & k \\
 & 3k & 3k^2 - 5k & 3k^3 - 5k^2 + 7k & \\
\hline
3 & 3k - 5 & 3k^2 - 5k + 7 & \boxed{3k^3 - 5k^2 + 7k - 2} &
\end{array}$$

y en pasos:

✓ **Paso 1** $\quad 3k$

✓ **Paso 2** $3\,k-5$

✓ **Paso 3** $(3\,k-5)\cdot k = 3\,k^2 - 5\,k$

✓ **Paso 4** $3\,k^2 - 5\,k + 7$

✓ **Paso 5** $\left(3\,k^2 - 5\,k + 7\right)\cdot k = 3\,k^3 - 5\,k^2 + 7\,k$

✓ **Paso 6** $3\,k^3 - 5\,k^2 + 7\,k - 2$

que es precisamente lo que deseabamos calcular.

Usted debe darse cuenta que si el resultado de la evaluación es cero, entonces tenemos una raíz del polinomio. Por eso es que el polinomio puede factorizarse teniendo como uno de sus factores al binomio: $x-k$, porque si $x=k$, entonces $x-k=0$ y al multiplicar por los demás factores el resultado es cero.

La ventaja de este procedimiento es que no tenemos que calcular potencias del número k, sino solamente productos y sumas de los coeficientes y el valor a evaluar $x=k$.

Otra forma de argumentar este mismo procedimiento es como sigue:

✓ Si $x=2$, $3\,x^3 = 6\,x^2$, porque de las 3 x's que se están multiplicando, sustituyo en una $x=2$ y obtengo $2\cdot 3\,x^2 = 6\,x^2$.

✓ Ahora considerando el siguiente término del polinomio, podemos simplificar, con lo que obtenemos:

$$6\,x^2 - 5\,x^2 = x^2$$

pero $x=2$, entonces, $x^2 = 2\,x$.

PROFESOR:

¿Puede justificar el procedimiento de la división sintética usando este argumento?

✓ Considerando el siguiente término, $x^2 + 7\,x = 2\,x + 7\,x = 9\,x = 18$

✓ y finalmente: $18-2=16$, como ya sabíamos.

Este método se conoce como reducción descendiente.

Con esto, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 6.2.1
Cuando dividimos el polinomio de grado n:

$$P_n(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

entre el binomio $(x-k)$, el residuo de la división es igual a $P_n(k)$, es decir, el polinomio evaluado en $x=k$.

A partir de este teorema se desprenden inmediatamente los siguientes resultados:

✓ Si $P_n(k)=0$, entonces $P_n(x)$ es divisible por $x-k$.

✓ Cualquier polinomio en x es divisible por $x - 1$ cuando la suma de los coeficientes de sus términos es cero.

✓ Cualquier polinomio en x es divisible por $x + 1$ cuando la suma de los coeficientes de sus términos con exponente par es igual a la suma de sus términos con exponente impar (El término a_0 es considerado como un término con exponente par, dado que $a_0 = a_0 \cdot x^0$).

✓ $P_n(x) - P_n(k)$ siempre es divisible por $x - k$. Un caso particular que se estudia en el tema de factorización es: $x^n - k^n$ es divisible por $x - k$.

Con estos resultados podemos resolver problemas nuevos. [6]

Ejemplo 6.2.4

Demuestra que $a \cdot (a + 2\,b)^3 - b \cdot (2\,a + b)^3$ es divisible por $a + b$.

- Si la expresión es divisible por $a + b$ el residuo de la división debe ser cero.
- Hacemos $a + b = 0$ y sustituimos a en lugar de $-b$ en la expresión y al simplificar debemos obtener cero:

$$\begin{aligned} a \cdot (a + 2\,b)^3 - b \cdot (2\,a + b)^3 &= a \cdot (a - 2\,a)^3 + a \cdot (2\,a - a)^3 \\ &= -a^4 + a^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Este resultado indica que la expresión es divisible por $a + b$.

6.2.4 Aplicaciones del binomio al cuadrado

El binomio al cuadrado puede utilizarse para dar una introducción al proceso de iteración, por ejemplo, para aproximar números irracionales a través de números racionales.

Suponga que desea aproximar el número $\sqrt{2}$ con un número racional.

Sabemos que $1^2 = 1$, y que $2^2 = 4$, lo que nos indica que $1 < \sqrt{2} < 2$. Entonces, podemos empezar con:

$$\begin{aligned} (1 + a)^2 = 1 + 2\,a + a^2 &= 2 \\ 2\,a + a^2 &= 1 \\ a^2 + 2\,a - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos suponer que a^2 es muy pequeño. De hecho $a^2 < a$. Entonces, haciendo esa suposición para evitarnos resolver la ecuación cuadrática, lo cual nos daría la solución con raíces y nosotros deseamos aproximar el valor de $\sqrt{2}$ utilizando números racionales, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\,a - 1 &= 0 \\ 2\,a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces, $1 + a = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Vamos a ver qué tan buena aproximación es:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$$

Ahora podemos mejorar la aproximación realizando el mismo procedimiento, pero ahora en lugar de utilizar $1 + a$ como la aproximación utilizaremos $\dfrac{3}{2} + b$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} + b\right)^2 = \frac{9}{4} + 3\,b + b^2 &= 2 \\ \Rightarrow \qquad 3\,b + b^2 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Y de nuevo, podemos suponer que b es muy pequeño (de hecho, lo es) y despreciar por el momento el valor b^2 para encontrar la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} 3\,b &= -\frac{1}{4} \\ b &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Esto indica que $\sqrt{2} \approx \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{17}{12}$.

Ahora verificamos que esta aproximación es mejor que la anterior:

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144} = 2.0069\bar{4}$$

Esta ya es una muy buena aproximación.

Así podemos continuar hasta obtener la aproximación tan buena como deseemos.

Cuando calculamos el valor de b, obtuvimos un número negativo. Esto era de esperarse porque $\dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$. Para obtener una mejor aproximación, se requiere reducir el valor de $\dfrac{3}{2}$.

En este ejemplo estamos utilizando un producto notable para resolver de manera aproximada una ecuación cuadrática. Esto es útil por ejemplo cuando queremos dividir algo en esa cantidad. Por ejemplo, es muy difícil dividir una cuerda en $\sqrt{2}$ partes iguales, pero es mucho más sencillo dividirla en $\frac{17}{12}$ partes iguales.

6.2.5 Solución de ecuaciones lineales

Una forma muy intuitiva para que los estudiantes entiendan realmente lo que estamos haciendo cuando resolvemos una ecuación lineal y a partir de ese conocimiento sean capaces de justificar el procedimiento que se usa para realizar despejes consiste en el juego: *"Pensé un número..."*

Por ejemplo, considere la ecuación:

$$3\,x + 5 = 26$$

Si traducimos a palabras utilizando el juego *"Pensé un número..."*, encontramos que la ecuación nos está diciendo: *"Pensé un número, lo multipliqué por 3, al resultado le sumé 5 y obtuve 26..."* La solución de la ecuación consiste en encontrar el número que *"pensó"* la ecuación, es decir, el valor de x que hace que la igualdad se cumpla.

Es importante que para este punto del curso los estudiantes conozcan la prioridad de las operaciones. Ellos deben saber qué operación se realiza primero y cuál después para resolver una ecuación.

Después de que los estudiantes hayan encontrado la solución de la ecuación, pida a un estudiante que explique cómo lo resolvió mentalmente. Si la explicación que dan es del tipo: *"fui sustituyendo valores hasta que obtuve el resultado correcto..."*, entonces sugiera la siguiente forma de proceder:

✓ Entienda el problema: *"Pensé un número, lo multipliqué por 3, al resultado le sumé 5 y obtuve como suma 26..."*

✓ Vaya de atrás para adelante (en reversa):

- Antes de obtener 26 le sumó 5, esto significa que no tenía 26, sino $26 - 5 = 21$.
- Antes de obtener 21 multiplicó al número que pensó por 3, entonces no tenía 21, sino $21 \div 3 = 7$

✓ Entonces, el número que pensó es 7.

Los estudiantes pueden más adelante justificar el procedimiento que se utiliza al despejar una variable de una ecuación argumentando como en el ejemplo anterior[13]: *"antes de que obtuviera esto, le hice esto otro, esto me indica que en realidad tenía..."*

[13] Es una mejor idea justificar el *despeje* a partir de las propiedades de la igualdad y de los números reales, porque en realidad eso es lo que estamos aplicando.

Igual puede después intentar ecuaciones que no tengan por soluciones números enteros, y más adelante considere ecuaciones que incluyen la incógnita en ambos lados de la igualdad.

Algunas veces nos encontramos con ecuaciones lineales que se pueden resolver inmediatamente. De hecho inclusive algunos sistemas de ecuaciones lineales se pueden resolver por inspección. El truco consiste en observar antes de arrancarnos con la solución del problema.

Problemas del tipo: "*tres números consecutivos suman 81. Encuentra el menor de ellos*", pueden resolverse de una manera muy sencilla.

Si los 3 números son consecutivos, podemos definir el de enmedio como x, entonces el antecesor es $x - 1$ y el sucesor es $x + 1$.

La suma de los 3 números es $3\,x$ y la suma es 81, es decir, $3\,x = 81$, lo que implica que $x = 27$. Los otros números son 26 y 28.

Este mismo *truco* sigue aplicándose en el caso de que los números sean pares o impares consecutivos, porque la diferencia entre ellos sigue siendo constante y en ese caso, nombraríamos al intermedio como x, al menor $x - 2$ y al mayor $x + 2$, de manera que el promedio sea igual al número intermedio de la lista creciente de ellos.

6.2.6 Solución de sistemas de ecuaciones

Algunas veces se presentan problemas que estamos acostumbrados a resolver por medio de un sistema de ecuaciones que se puede resolver con una sola ecuación.

Por ejemplo, el problema:

> *Eliza tiene 32 monedas. Algunas son de \$5.00 pesos y las demás son de \$2.00 pesos. En total ella tiene \$115.00 pesos. ¿Cuántas monedas tiene de cada denominación?*

sugiere el uso de dos literales por el hecho de que Eliza tiene dos tipos de monedas, pero también podemos resolverlo usando solamente una ecuación, porque si tiene x monedas de \$5.00 pesos, las demás deben ser $32 - x$ monedas de \$2.00 pesos.

Como es obvio, si sumamos las monedas de \$5.00 y las de \$2.00 debemos obtener 32: $x + (32 - x) = 32$.

La única ecuación que necesitamos para resolver este problema es:

$$5\,x + 2\,(32 - x) = 115$$

Sin embargo, no todos los sistemas de ecuaciones lineales son de ese tipo.

Algunos problemas requieren de las dos ecuaciones y, sin embargo, no se requiere de un procedimiento para resolverlo.

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales nos dice en palabras: "*pensé dos números, cuando los sumo obtengo 10 y cuando los resto obtengo 2... ¿Qué números pensé?*"

Intente ahora resolver este problema sin utilizar un método algebraico.

Por la segunda ecuación sabemos que la diferencia entre los números es 2, es decir, podrían ser 5 y 3, 6 y 4, 7 y 5, etc.

Los números que satisfacen la primera ecuación son 6 y 4.

Conocer estos *trucos* algunas veces ayudan a trabajar más rápido en clase y el hecho de explicarlos a los estudiantes les da confianza en que las matemáticas son "*digeribles*" por cualquiera.

6.2.7 Graficación de funciones sin tabulación

Cuando se les solicita a los estudiantes que grafiquen una función lineal o cuadrática, es muy común que los estudiantes empiecen tabulando valores de x y y y a partir de la función, $y = f(x)$ empiecen a calcular los valores de y que le corresponden a x.

No está mal elaborar esto. De hecho, es útil cuando se tiene el propósito de que practiquen la evaluación de una expresión algebraica en un valor dado.

Sin embargo, es posible hacer más atractivo este tema[14] a través de la aplicación de algunos "*trucos*" para la graficación de funciones elementales.

A continuación se muestra una forma en que el estudiante puede "*visualizar*" las gráficas de las funciones a partir de unas pocas transformaciones del plano.

Estas transformaciones se pueden aplicar a distintas funciones y nos ayudan a comprender mejor cómo se comportan y a graficarlas de una manera muy sencilla[15].

De hecho, es posible que algunos estudiantes, después de haber terminado con este tema, puedan graficar una función lineal o de segundo grado inmediatamente después de leerla del pizarrón, sin esfuerzo aparente.

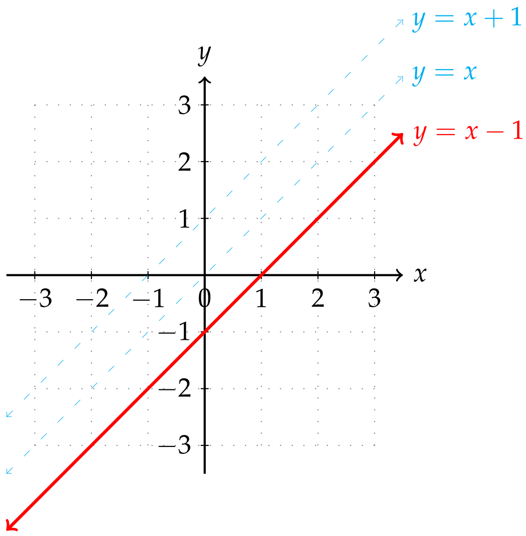
Ejemplo 6.2.5

Grafica la función: $y = x - 1$.

[14] La experiencia ha mostrado que el realizar cálculos de manera repetida con o sin apoyo de la calculadora frecuentemente es causa de la pérdida del interés en la clase de muchos estudiantes.

[15] El autor aprendió por primera vez este método para graficar funciones en el curso de Cálculo impartido por Dr. César Cristóbal Escalante en la Universidad de Quintana Roo, quien es autor del libro: *Graficación de funciones sin cálculo.*

- Esta función, en palabras dice: *"al valor que me des de x le restaré 1, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*
- Es una buena idea graficar primero la función: $y = x$, que en palabras dice: *"Asignaré el valor de x que me dés a y."*
- La gráfica de la función: $y = x - 1$, no pasa por el origen del sistema de coordenadas. La gráfica fue trasladada en una unidad hacia abajo[16]:



- La gráfica en palabras nos dice: *"A los antiguos valores de y (de la función $y = x$) les resto 1; en otras palabras, estoy moviendo la gráfica de la función $y = x$ una unidad hacia abajo y obtendo la gráfica de la función $y = x - 1$".*

Es importante que el estudiante sepa justificar por qué la gráfica se mueve verticalmente y no horizontalmente.

Esta transformación, que consiste en la traslación vertical se aplica a cualquier función.

A partir del ejemplo anterior es muy fácil realizar el siguiente:

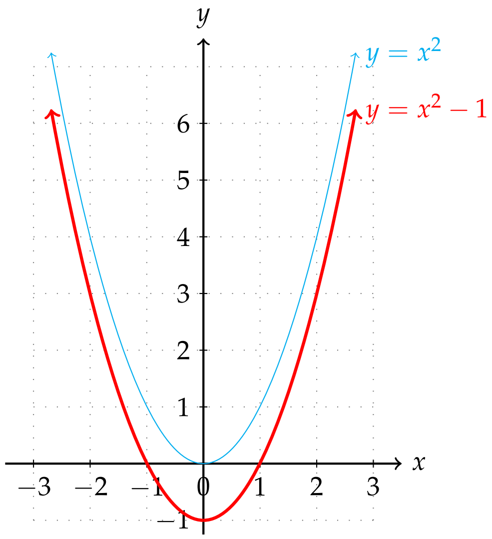
Ejemplo 6.2.6

Grafica la función: $y = x^2 - 1$.

- Esta función polinomial en palabras dice: *"El número que tú le asignes a la variable x lo multiplicaré por sí mismo, al resultado le restaré 1 y el valor así obtenido se lo asignaré a la variable y".*

[16]Respecto a la gráfica de la función $y = x$.

- Para graficar esta función observe que se transformó la función $y = x^2$ con una traslación vertical.



- Explique a los estudiantes qué nos dice en palabras el término independiente: *"A los valores de y, que es igual a x^2, les voy a restar 1"*, es decir, *"voy a mover la gráfica de $y = x^2$ una unidad en el sentido negativo del eje y."*

- Es importante que los estudiantes comprendan que estamos transformando la gráfica de la función con una traslación (vertical).

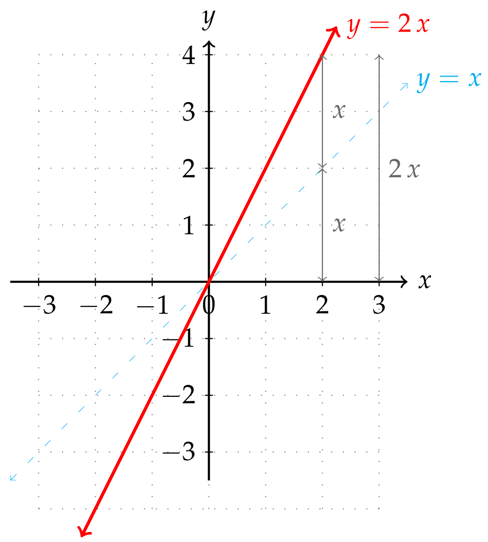
- De manera semejante, puede introducir el concepto de transformación de coordenadas, al hacer un nuevo eje y', teniendo $y' = y + 1$.

Ahora veremos una nueva transformación.

Ejemplo 6.2.7

Grafica la función: $y = 2\,x$.

- Esta función, en palabras dice: *"al valor que me des de x lo multiplicaré por 2, y ese valor se lo asignaré a la variable y"*.



- Al comparar las dos gráficas, vemos que la transformación consistió en un cambio en la inclinación de la recta. Ahora tiene más "*pendiente*".
- Generalmente los estudiantes captan mejor la idea de la dilatación del plano si sugiere que imaginen al plano como una película flexible. Si estiramos esa película al doble verticalmente, estaremos dilatando el plano en la dirección del eje y y la gráfica de la función $y = x$ se transforma en la gráfica de la función $y = 2\,x$.
- De manera semejante, si consideramos $y = 3\,x$, estamos estirando esa película ahora, no al doble, sino al triple, y así sucesivamente.
- Esto puede estimular la imaginación pictográfica de los estudiantes.

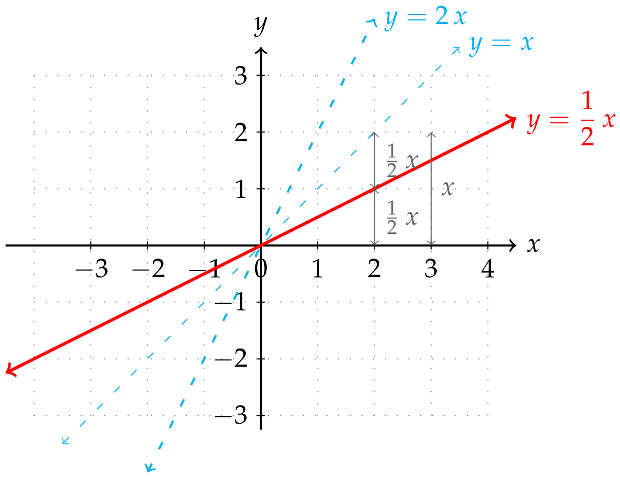
En este caso la *pendiente* crece porque el coeficiente (2) es mayor que 1, pero también puede ocurrir que *la pendiente* no aumente, sino decremente, pero de manera que la función siga creciendo... esto ocurre cuando el coeficiente está entre cero y 1.

Ejemplo 6.2.8

Grafica la función: $y = \dfrac{1}{2}\,x.$

- La gráfica de esta función es el reflejo de la función $y = 2\,x$ respecto a la función $y = x$. Esta función, en palabras dice: "*al valor que me des de x le sacaré la mitad*[17]*, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*"

[17]Observe que multiplicar por un medio se traduce como "*sacar mitad.*"



- En el ejemplo anterior la “*pendiente*” aumentó al doble; en este ejemplo la “*pendiente*” disminuyó a la mitad.

Entonces podemos introducir el concepto de pendiente, dado que ya surgió la necesidad de caracterizar la forma en que “*crece*” el valor de y conforme nos movemos sobre la recta.

La pendiente m de una recta se define así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

¿Qué nos dice esto en palabras? Dice: “*La pendiente de una recta es igual al incremento de* y *entre el incremento de* x”.

Ahora la pregunta del millón: “*... ¿y cómo debo interpretar eso?*”

Bien, empezamos primero recordando una interpretación para la división: cuando dividimos diez entre cinco obtenemos como resultado dos; esto lo podemos interpretar de varias maneras. Por ejemplo, una interpretación correcta del resultado de la división es que: $2 \times 5 = 10$.

Otra interpretación correcta, equivalente a la anterior consiste en decir que el número diez es dos veces más grande que el número cinco. Pero la interpretación que más ayudará a los estudiantes es la siguiente: “*por cada uno que hay en el denominador de la fracción* $\frac{10}{5}$, *hay dos en el numerador*”; o dicho de otra manera: “*para tener una fracción equivalente, o el mismo valor, por cada uno que aumentemos en el denominador, tenemos que aumentar dos en el numerador.*”

Esto mismo podemos generalizarlo y aplicarlo a la fórmula de la pendiente. En este caso, la interpretación dice: “*por cada uno que incrementamos en* x, *hay* *que incrementar m en y"*. Así, la pendiente nos dice cuánto debemos subir (en la dirección del eje y) por cada unidad que avancemos hacia la derecha (en la dirección del eje x).

Combinando las dos transformaciones que hemos estudiado para las gráficas de las funciones hasta ahora, podemos darnos cuenta que las funciones lineales están entre las más fáciles de graficar.

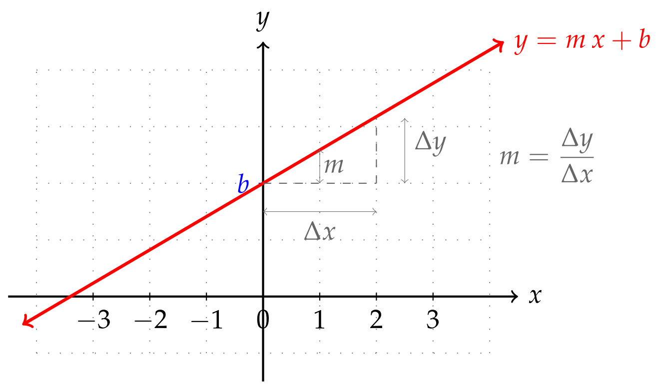
Si deseamos graficar la función: $y = m\,x + b$, es muy obvio que si $x = 0$, entonces $y = b$. Esto nos está diciendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, b)$ (la ordenada al origen). Pregunte a los estudiantes: *"¿Puedes asociar esto a la primera transformación sobre las gráficas de las funciones?"*

La pendiente es la segunda transformación que estudiamos. Esta nos indica cuánto debemos "*subir*" en y por cada uno que avancemos en la dirección positiva del eje x.

Entonces, para graficar la función: $y = m\,x + b$, empezamos en el punto $(0, b)$. A partir de ahí el estudiante debe ubicar los puntos siguientes. Usted puede sugerir: *"mueve tu lápiz a la posición $(1, b)$ y después sube m unidades si m es positivo, o baja m unidades si m es negativo, para que dibujes el siguiente punto en las coordenadas $(1, b + m)$, o $(1, b - m)$"*.

A los estudiantes les resulta más sencillo graficar la recta cuando la pendiente es un número entero. Cuando se trata de un número racional, por ejemplo, m/n es buena idea sugerir avanzar n unidades en el sentido positivo del eje x, y m unidades en el sentido del eje y, dependiendo del signo de la fracción, y ahí graficar el siguiente punto por donde debe pasar la recta.

La siguiente gráfica le ayudará a explicar este concepto de una manera más visual:



"... Continúa con el proceso hasta que tengas varios puntos y así tienes el bosquejo de la gráfica. En realidad no requieres más de dos puntos, porque si conoces dos puntos de una recta ya puedes trazarla."

Recuerde a los estudiantes que después de que haya graficado la función verifique de nuevo, para detectar algún error.

Usted explique esto con un caso particular, por ejemplo, $y = 2\,x + 3$.

Ahora haga la pregunta: *¿Qué deben hacer si $m = 0$?* Si $m = 0$, la función es constante. Este es un caso especial, porque no podemos ir en la dirección positiva del eje y, dado que m no es positiva. Pero tampoco podemos ir en la dirección negativa del eje y, porque m tampoco es negativa. ¿Qué opción nos queda? Pues no ir ni para arriba ni para abajo, sino graficar una recta horizontal.

NOTA: *Una* línea recta horizontal *SÍ* es una función, pero una línea recta vertical *NO*. Permita que el estudiante justifique esto. ✓

Indique a los estudiantes que las funciones lineales son funciones polinomiales de grado 1. Es decir, $n = 1$ en $y = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$, quedando en: $y = a_1\,x + a_0$.

De acuerdo a la notación anterior, en la que definimos a la función lineal como: $y = m\,x + b$, tenemos que: $a_1 = m$, es decir, el coeficiente del término lineal es la pendiente de la recta, y $a_0 = b$, esto es, el término independiente es la ordenada al origen.

En el caso de una función constante se obtiene cuando $n = 0$. Entonces, la función polinomial se reduce a: $y = a_0$. Esta es una de las funciones más holgazanas. En palabras dice: "*Independientemente del valor que le asignes a x, yo siempre le asignaré a la variable y el valor a_0*". ¿Es claro por qué es de las más holgazanas?

Ejemplo 6.2.9

Grafica la función: $y = -2\,x + 1$.

- Realizaremos la gráfica de esta función en 4 pasos:

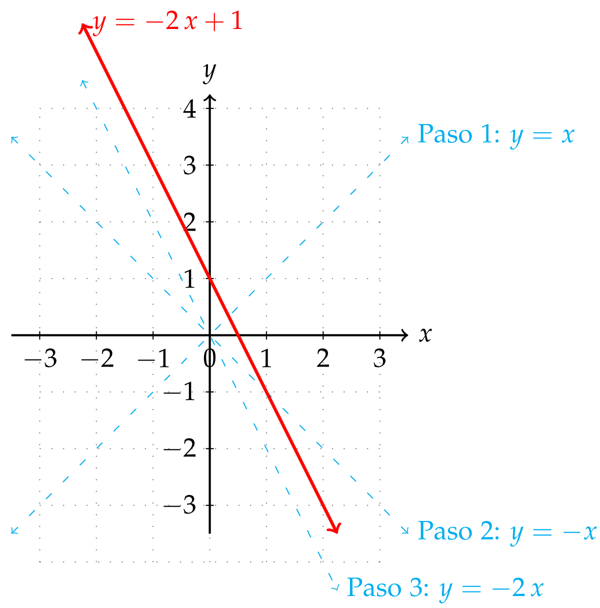
Paso 1. Graficamos la función $y = x$.

Paso 2. Hacemos la reflexión del la gráfica anterior para obtener la gráfica de la función $y = -x$.

Paso 3. Dilatamos la función $y = -x$ multiplicándola por 2, así obtenemos la gráfica de la función: $y = -2\,x$.

Paso 4. Hacemos una traslación vertical: sumamos 1 a la función anterior y obtenemos la gráfica de: $y = -2\,x + 1$

- Cada uno de los pasos se muestra en la siguiente gráfica:



- Ahora permita que el estudiante encuentre la pendiente de la recta y tanto el dominio como el contradominio de la función.

En realidad, graficar una función lineal es muy sencillo. Solamente tenemos que pensar en términos de las transformaciones sucesivas que se realizaron sobre las gráficas.

Para graficar una función cuadrática utilizamos como base la gráfica de la función $y = x^2$.

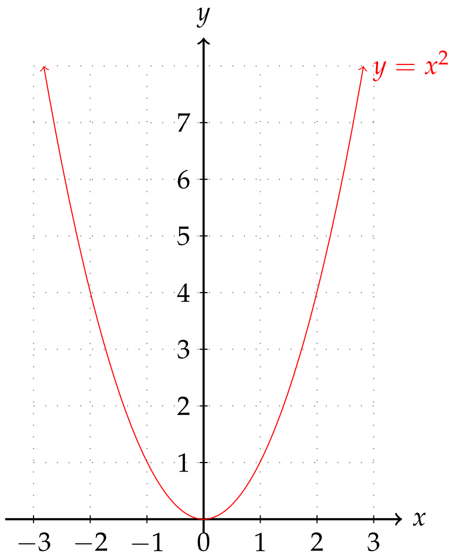
Ejemplo 6.2.10

Grafica la función: $y = x^2$.

- Inclusive para la gráfica de esta función tenemos algunos trucos que pueden simplificar su graficación.
- Considerando la interpretación geométrica de la suma de los números impares podemos rápidamente graficar esta función[18].
- Observe que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, etc., la diferencia entre dos cuadrados perfectos siempre es un número impar.
- Esto puede ayudar a graficar: empezamos en el punto $(0, 0)$.
- Nos movemos una unidad a la derecha y "*subimos*" una unidad (uno es el primer impar), para llegar al punto (1,1).

[18]En la página 39 puede ver esta interpretación geométrica.

- Nos movemos una unidad más a la derecha y subimos tres unidades (tres es el siguiente impar), para llegar al punto $(2, 4)$.
- Nos movemos una unidad más a la derecha y subimos cinco unidades (cinco es el siguiente impar), para llegar al punto $(3, 9)$.
- Nos movemos una unidad más a la derecha y subimos siete unidades (siete es el siguiente impar), para llegar al punto $(4, 16)$.
- Y así sucesivamente...



- Para graficar la otra parte sin repetir este procedimiento puede argumentar que $(-x)^2 = x^2$, es decir, el cuadrado de un número negativo es igual al cuadrado de ese mismo número, pero positivo.
- Esto no indica que la gráfica de la función es simétrica respecto del eje y.
- Así solamente debe encontrar el simétrico respecto del eje y de cada punto que ya ha dibujado en el plano.

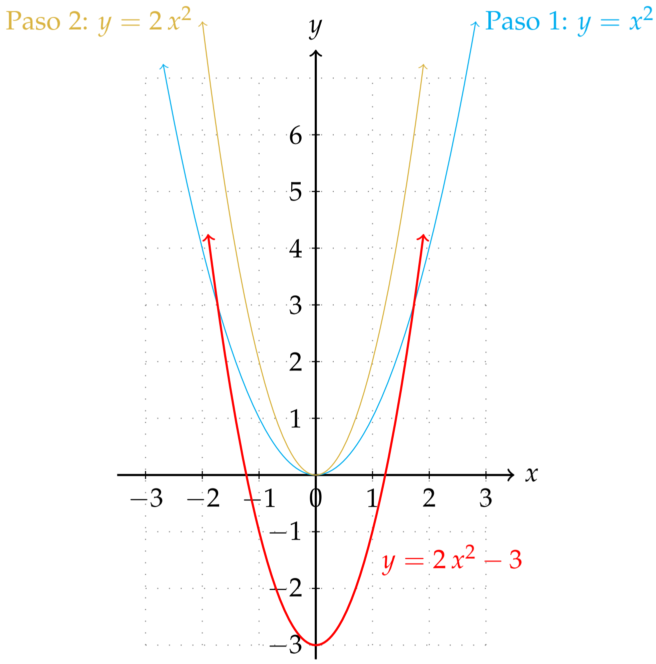
Ahora puede mostrar ejemplos más elaborados:

Ejemplo 6.2.11

Grafica la función: $y = 2\,x^2 - 3$.

- **Paso 1.** Graficamos la función $y = x^2$
- **Paso 2.** Dilatamos la gráfica multiplicando la función por 2; así obtenemos la gráfica de $y = 2\,x^2$.

- **Paso 3.** Hacemos una traslación vertical restando 3 a la función $y = 2\,x^2$; así obtenemos la gráfica de $y = 2\,x^2 - 3$.

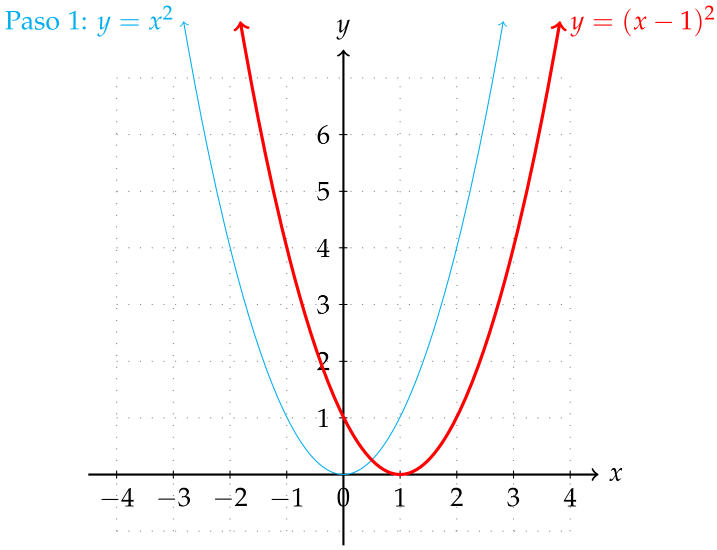


Una última transformación que conviene incluir consiste en la traslación horizontal.

Ejemplo 6.2.12

Grafica la función: $y = (x - 1)^2$.

- La gráfica de esta función es otra parábola, porque está elevada al cuadrado.
- Como el binomio $x - 1$ es el que está elevado al cuadrado, la parábola abre hacia arriba.
- La primer pregunta que el estudiante debe hacer cuando tenga este tipo de función es: *"¿qué valor debo darle a x para que y tenga el mínimo valor?"*...
- O en otras palabras: *"¿qué valor de x hace que $x - 1$ sea igual a cero?"*
- Y la respuesta es: si $x = 1$, entonces $x - 1 = 0$.



- Podemos ver que la función: $y = (x-1)^2$, tiene su vértice en el punto $(1, 0)$. Es decir, $y = x^2$ (que tiene su vértice en $(0, 0)$) se trasladó horizontalmente hacia la derecha en una unidad. En otras palabras, sufrió una traslación horizontal.

Con esta nueva transformación podremos graficar fácilmente cualquier función cuadrática. En caso de que encuentre una función con la forma: $y = a\,x^2 + b\,x + c$, basta completar cuadrados[19] y convertir la función a la forma: $y = (x-\alpha)^2 + \beta$.

El número α causa una traslación horizontal; el número β causa una traslación vertical. El peor de los casos tendremos una función de la forma:

$$y = k\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

con $k < 0$, es decir un número negativo, lo que indica una reflexión respecto al eje x. Es decir, la parábola abre hacia abajo.

Ejemplo 6.2.13

Grafica la función: $y = x^2 - 4\,x + 1$.

- **Método 1.** Completando cuadrados . . . .

- Primero debemos observar que es una función cuadrática, y que se trata de una parábola.

[19] Si los estudiantes no recuerdan cómo completar cuadrados, deben estudiarlo de nuevo.

- Vamos a completar cuadrados.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4\,x + 1 \\ &= (x^2 - 4\,x + 1) + (4 - 4) \\ &= (x^2 - 4\,x + 4) + (1 - 4) \\ &= (x - 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

En esta forma, es mucho más fácil y rápido hacer la gráfica de la función.

TIP: Para completar cuadrados más fácilmente, el truco es el siguiente: "*calcula la mitad del coeficiente del término lineal, en este caso, la mitad de* -4 *es* -2*, y usamos ese valor para completar el binomio.*"

He aquí un segundo método de llegar al mismo resultado.

- **Método 2.** Fórmula general . . . .

- Encontramos las raíces de la función, es decir, los puntos donde la gráfica corta al eje x, con la ayuda de la fórmula general[20]:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

En este caso: $a = 1, b = -4$ y $c = 1$. Sustituimos los valores en la fórmula general y resolvemos para encontrar los valores de x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\,(1)(1)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

- Ahora ubicamos los puntos:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

en el eje x y a partir de estos graficamos la parábola. Sabemos que la parábola abre hacia arriba.

- En caso de que quiera mayor precisión, podemos usar la información del método 1: el vértice se encuentra en el punto $(2, -3)$.

- **Método 3.** Geométricamente . . . .

- Usando la interpretación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática[21], podemos fácilmente encontrar las coordenadas del vértice:

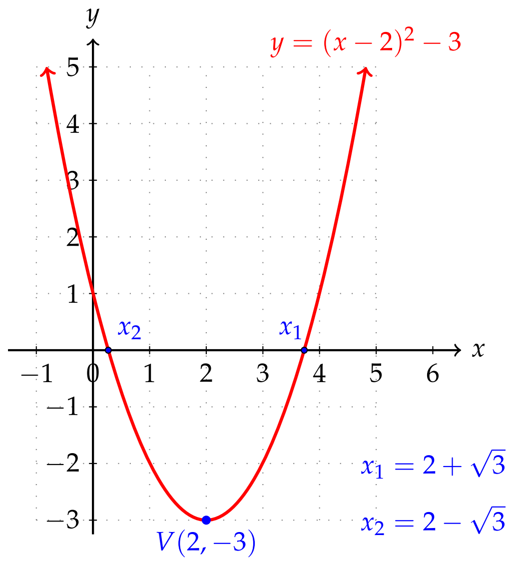
[20] La interpretación geométrica de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ está en la página 52.

[21] Vea la interpretación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática en la página 52.

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{-4}{2\,(1)} = 2$$

Y la ordenada del vértice es: $y(2) = (2)^2 - 4\,(2) + 1 = -3$. Entonces, el vértice es: $(2, -3)$

- Sabemos que la parábola abre hacia arriba porque el coeficiente del término cuadrático es positivo, y ya podemos hacer un bosquejo de la gráfica de la función.



- Pida a los estudiantes que calculen $y(0) = (0-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$.
- Enfatice en la importancia de la prioridad de las operaciones.
- Observe que como el coeficiente del término cuadrático es 1, podemos aplicar el *truco* de los números impares para graficar rápidamente una vez que conozca las coordenadas del vértice de la parábola.

6.2.8 Razones y proporciones

Es muy importante que el estudiante comprenda por qué deben realizarse de esa manera los procedimientos.

Por ejemplo, frecuentemente se explica la regla de tres cuando estudiamos razones y proporciones sin justificar por qué las operaciones se realizan en ese orden. Otro punto importante consiste en que muy pocas veces se explica qué información nos dice una razón o proporción.

En la vida real surgen muchas ocasiones en las que deseamos comparar dos cantidades.

Para compararlas tenemos muchas opciones válidas, pero la que nos provee de información más rápidamente es la razón, que también se conoce como proporción.

Definición 6.2.1

RAZÓN
Considere los números a y b. La razón de ellos es el cociente obtenido al dividirlos:

$$\frac{a}{b}$$

En otras palabras, la razón de dos números es igual al cociente entre ellos.

Ejemplo 6.2.14

En las pasadas elecciones de un pueblo el candidato A obtuvo 4 875 votos a su favor, mientras que el candidato B obtuvo 1 625. ¿En qué proporción están sus respectivas votaciones?

- Por definición, debemos dividir el número de votos que obtuvo el candidato A entre el número de votos que obtuvo el candidato B.

$$\frac{\text{Votos del candidato A}}{\text{Votos del candidato B}} = \frac{4\,875}{1\,625} = 3$$

- Este resultado nos indica que el candidato A obtuvo 3 votos por cada voto que obtuvo el candidato B.
- Esta misma información obtenemos si encontramos la razón de los votos del candidato B con respecto al candidato A:

$$\frac{\text{Votos del candidato B}}{\text{Votos del candidato A}} = \frac{1\,625}{4\,875} = \frac{1}{3}$$

- La fracción $1/3$ nos dice que por cada voto que obtuvo del candidato B, el candidato A obtuvo 3.

En este ejemplo se conocían dos datos y éstos no se pueden cambiar. En algunos casos tenemos más información y la proporción nos puede ayudar a calcular un dato desconocido. Es decir, utilizamos la información conocida para predecir un dato que nos interesa calcular.

Para esto, tenemos que saber que hay varios tipos de proporción. Empezamos con la proporción directa.

Definición 6.2.2

PROPORCIÓN

Es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Esta misma proporción también podemos escribirla como: $a : b :: c : d$.

Definición 6.2.3

PROPORCIÓN DIRECTA

Cuando dos cantidades están relacionadas de tal forma que cuando una cantidad crece la otra también crece el mismo número de veces, entonces tenemos una proporción directa.

Ejemplo 6.2.15

El vendedor de Hot Dogs puede preparar 20 Hot Dogs en 30 minutos. ¿Cuántos puede preparar en 45 minutos?

- Nosotros sabemos que puede preparar 20 hot dogs en 30 minutos, entonces debe preparar la mitad de hot dogs en la mitad del tiempo.
- Eso significa que puede preparar 10 hot dogs en la mitad de 30 minutos, es decir, en 15 minutos.
- De manera semejante, puede preparar el doble de hot dogs en el doble de tiempo.
- Igualmente, puede preparar la cuarta parte de hot dogs en la cuarta parte del tiempo,
- Entonces, si sumamos lo que puede preparar en 30 minutos con lo que puede preparar en 15 minutos, obtenemos lo que puede preparar en 45 minutos.
- En conclusión, puede preparar $20 + 10 = 30$ hot dogs en 45 minutos.

Ejemplo 6.2.16

En un asilo se consumen 14 kg de harina por semana (7 días). ¿Cuántos kilogramos de harina se consumen en 30 días?

- En la séptima parte del tiempo se consume la séptima parte de harina.
- Esto significa que en un día se consumen 2 kilogramos de harina.
- En 30 días se consumen 30 veces más harina de lo que se consume en un día.

- Esto indica que en 30 días se consumen $2 \times 30 = 60$ kilogramos de harina.

Los problemas de proporción directa se resuelven de manera más sencilla si utilizamos la regla de 3 directa.

Por ejemplo, en el caso de los Hot Dogs, escribimos en una columna el número de Hot Dogs que puede preparar y en otra la cantidad de minutos que requiere:

	Hot Dogs	$\Rightarrow$	**Minutos**
Datos conocidos:	20	$\Rightarrow$	30
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	45

Para resolver este problema con este segundo método observe que si dividimos 20 (Hot Dogs) entre 30 (minutos) obtenemos la razón que indica cuántos Hot Dogs prepara el vendedor en un minuto[22]. Si multiplicamos este resultado por 45 (minutos) obtenemos la cantidad de Hot Dogs que prepara en esa cantidad de tiempo.

Entonces,

$$x = 45 \times \frac{20}{30} = \cancel{3} \times 15 \times \frac{2}{\cancel{3}} = 30$$

En el caso del asilo sabemos que se consumen 14 kg de harina en 7 días, la razón 14 / 7 = 2 nos indica que se utilizan 2 kilogramos de harina por día en ese asilo. En 30 días se deben utilizar 30 veces más, es decir, $30 \times 2 = 60$ kilogramos de harina.

En forma de regla de tres directa, tenemos:

	kg de harina	$\Rightarrow$	**Días**
Datos conocidos:	14	$\Rightarrow$	7
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	30

Y al realizar las operaciones, obtenemos:

$$x = 30 \times \frac{14}{7} = 30 \times 2 = 60$$

[22]En realidad, esta razón nos indica que el vendedor prepara 2 Hot Dogs en 3 minutos, o bien, dos tercios de Hot Dogs en un minuto.

Debido a que la multiplicación y la división tienen la misma prioridad como operaciones, no importa cuál de ellas realicemos primero[23]. Bien podemos primero dividir y después multiplicar, bien podemos primero multiplicar y después dividir... en ambos casos siempre obtendremos el mismo resultado.

Por esto, es una costumbre utilizar de la siguiente manera la regla de tres directa. Por ejemplo en la última tabla que escribimos:

	kg de harina		Días
Datos conocidos:	14	$\Rightarrow$	7
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	30

Empezamos multiplicando el único número que conocemos del renglón donde se encuentra nuestra incógnita (30) por el número que se encuentra en el otro renglón y en la otra columna (14) y este resultado lo dividimos por el último número conocido (7).

$$x = \frac{30 \times 14}{7} = 30 \times 2 = 60$$

Explique el porqué de la regla de tres directa para que los estudiantes puedan aplicarla en cualquier situación donde se pueda aplicar y no requieran buscar en un libro o preguntar a alguien más cómo hacerlo... si entienden el procedimiento, ellos mismos podrán deducir qué hacer en cada caso.

Una proporción directa que es muy utilizada comúnmente es el porcentaje.

Definición 6.2.4

PORCENTAJE
Es una proporción de algo a cien. La palabra porciento indica cuántos se tomarán por cada cien.

Ejemplo 6.2.17

Luisa compró un vestido. Como le hicieron un descuento del 25%, solamente pagó \$180.00 pesos. ¿Cuál es el precio original (sin descuento) de ese vestido?

- Para calcular el precio con descuento del vestido, debieron quitar el 25%.
- Definimos P al precio sin descuento del vestido,
- Entonces, $0.25\,P$ es el descuento que se le hizo,

[23] Observe que estamos basando este razonamiento en la prioridad de las operaciones. Es decir, estamos apoyándonos en lo que el estudiante ya debe saber, dado que este tema debió estudiarse con antelación.

- Y el precio con descuento es:

$$P - 0.25\,P = 0.75\,P$$

- Esto indica que pagó solamente el 75% del precio original del vestido.
- Y este precio fue de \$180.00 pesos.
- Entonces,

$$\begin{aligned} 0.75\,P = 180 \qquad \Rightarrow \qquad P &= \frac{180}{0.75} = \frac{180}{\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{4 \times \cancel{180}}{\cancel{3}} \\ &= 4 \times 60 = 240 \end{aligned}$$

- Esto nos dice que el precio original (sin descuento) del vestido era de \$240.00 pesos.
- En efecto, si calculamos el 25% de \$240.00 pesos, entonces debemos sacar la cuarta parte,
- es decir, \$60.00 pesos es el 25% de \$240.00
- A \$240.00 le restamos \$60.00 y obtenemos \$180.00 que es el precio con el 25% de descuento.
- En este caso, es un error común que los estudiantes escriban una regla de tres como sigue:

$$\begin{aligned} 25\,\% &\Rightarrow \$\,180 \\ 100\,\% &\Rightarrow \$\,x \end{aligned}$$

  Explique por qué no es correcto este proceder.

Ejemplo 6.2.18

Un paquete de cereal contiene 15% más gratis. Si el envase inicialmente contenía 680 gr., ¿cuántos gramos contiene ahora?

- Sabemos que originalmente el envase contenía 680 gramos.
- El 10% de esa cantidad es la décima parte, porque 10 es la décima parte de 100
- Y el porcentaje se refiere a la proporción por cada cien...
- la décima parte de 680 gr., es 68 gr.
- Entonces, el 10% de 680 es 68.

- La mitad del 10% es el 5%.
- Entonces, el 5% de 680 es la mitad de 68, es decir, 34.
- Si sumamos el 10% de 680 y el 5% de 680 obtenemos el 15% de 680.
- Esto es, el 15% de 680 es $68 + 34 = 102$
- Entonces, el envase contiene 102 gramos de más... (¡Gratis!)
- Si originalmente contenía 680 gramos, junto con los 102 gramos gratis (el 15%) obtenemos un nuevo total de 782 gramos.
- Este mismo problema puede resolverse con una regla de tres directa.
- Es conveniente mostrar a los estudiantes ambos métodos para que tengan oportunidad de justificar la regla de tres con el método que hemos utilizado en este ejemplo.

Definición 6.2.5

PROPORCIÓN INVERSA
Dos cantidades están en proporción inversa si al crecer una, la otra decrece, con el mismo factor, pero inversamente. Esto es, usamos el recíproco del factor para la segunda cantidad.

Por ejemplo si una aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad.

Ejemplo 6.2.19

Dos trabajadores tardan 32 horas en pintar una barda. ¿Cuántos trabajadores se requieren para que realicen la tarea en 4 horas?

- Si se asignan el doble de trabajadores deben tardar la mitad del tiempo.
  - ✓ Entonces, si hay 4 trabajadores deben tardar 16 horas,
  - ✓ y 8 trabajadores deben tardar 8 horas,
  - ✓ y 16 trabajadores deben tardar 4 horas,
- Todo esto, suponiendo que los trabajadores siempre trabajan al mismo ritmo y que no se estorban entre ellos para realizar la tarea.

Es muy importante que el estudiante comprenda por qué se realiza una operación de una manera. Si el estudiante no comprende el porqué, después, cuando necesite aplicar ese conocimiento, muy difícilmente recordará como aplicarlo. Por el contrario, si entendió el principio que se aplica en ese caso y sabe justificarlo, no requiere de memorizarlo, sino de deducirlo.

Este tipo de razonamiento es el que les ayuda a formar cadenas de argumentos para justificar sus procedimientos.

Siete

Tecnología educativa

> *La cura para el aburrimiento es la curiosidad. No hay cura para la curiosidad.*
>
> — Dorothy Parker

7.1 Software libre

Actualmente hay muchas herramientas tecnológicas que nos ayudan a enseñar las ciencias de una manera más eficiente.

Afortunadamente mucho de ese software puede conseguirlo de manera gratuita.

De cualquier manera, se sugiere que lea las restricciones y condiciones que se le imponen al instalar algún software, sea este gratuito o no. Es la forma más sensata de proceder.

7.1.1 LaTeX 2ε

Es un software originalmente desarrollado por Donald Knuth (TeX) y después mejorado por Leslie Lamport (LaTeX).

Actualmente la comunidad científica utiliza este software por la comodidad que representar para redactar los documentos, especialmente aquellos que incluyen ecuaciones o símbolos matemáticos de cualquier tipo.

De hecho, no solamente las ecuaciones o símbolos se pueden insertar en los documentos generados con este software, sino también gráficos, imágenes, etc., con ayuda de la paquetería que viene incluida en el mismo. [1]

7.1.1.1 Dónde conseguir LaTeX 2ε

LaTeX 2ε es un software libre. Hay versiones para utilizar en Windows, Mac, Linux, etc. Puede descargar la versión para Windows desde la siguiente dirección de internet:

`www.miktex.org`

Usted debe buscar una liga que diga **Install MikTeX**. Después oprima en la liga que dice: **Download Basic MiKTeX installer**.

El MikTeX es un conjunto de librerías que tienen las instrucciones para generar los documentos en el código LaTeX 2ε.

Además de MikTeX requeriremos de un software para editar los documentos que deseemos generar con LaTeX 2ε. El autor de este material utiliza el programa TeXnicCenter.

[1]Este libro se editó con la ayuda de LaTeX 2ε principalmente. Vea los créditos de este material al final del mismo.

El programa TEXnicCenter también es libre y puede descargarlo desde el siguiente sitio de Internet: *www.toolscenter.org*

En este sitio debe encontrar la liga que dice: **Download**. Esto abrirá una nueva página donde debe encontrar la liga: **TEXnicCenter Setup Version [versión]**. Generalmente le enviará a otro sitio de Internet[2] desde donde puede descargar el software.

Ahora debe instalar en su computadora cada uno de los programas. Preferentemente instale primero MikTEX y después TEXnicCenter.

La primera vez que desee utilizar TEXnicCenter para crear su primer documento, el programa le pedirá varias cosas. La mayoría de ellas consisten en comandos para saber con qué opciones abrir los documentos en el software que utilice para visualizar los documentos.

Sin embargo en una de esas le pedirá la dirección donde se encuentran los paquetes de MikTEX para generar los documentos.

Usted debe buscar los archivos ejecutables (`*.exe`) de MikTEX en el disco duro de su computadora. La dirección debe ser parecida a la siguiente:

```
C:\Archivos de programa\MiKTeX\miktex\bin
```

Ahora sí, está listo para redactar su primer documento en LATEX 2$_\varepsilon$.

7.1.1.2 Crear un documento en LATEX 2$_\varepsilon$

Al principio el uso de LATEX 2$_\varepsilon$ parece difícil, pero con el paso del tiempo se acostumbra a su sintaxis.

Es importante que entienda que LATEX 2$_\varepsilon$ es un lenguaje de programación. Así que debe respetar estrictamente la sintaxis del mismo, es decir, si desea que un documento incluya el símbolo: ℓ, y conoce su código, debe escribirlo tal cual es: `$\ell$`.

En LATEX 2$_\varepsilon$ los documentos tienen una calidad superior a cualquier procesador de texto convencional. La gran desventaja del LATEX 2$_\varepsilon$ consiste en que usted no ve el documento tal cual lo verá una vez creado, como en los procesadores de texto convencionales.

Muy bien. Aclarado esto, empezamos con algunos ejemplos básicos.

Código mínimo

Para crear un documento que contenga su nombre, basta el siguiente código:

```
\documentclass{article}
```

[2] SourceForge.net

```
\begin{document}
% Escriba su nombre antes del signo de porcentaje.
Hola, mi nombre es  %

% Aquí puede incluir todo el texto que desee...
\end{document}
```

✓ La instrucción `\documentclass[]{}` le indica a LaTeX 2ε qué tipo de documento crearemos. En este caso se trata de un artículo.

✓ El espacio contenido entre `\documentclass[]{}` y `\begin{document}` se conoce como preámbulo del documento.

✓ La instrucción `\begin{document}` indica el inicio del documento.

✓ La instrucción `\end{document}` indica el fin del documento.

Cualquier texto que aparezca después de un símbolo de porcentaje (%) LaTeX 2ε lo ignorará. En otras palabras, cualquier comentario que desee agregar a su documento puede incluirlo iniciándolo con %.

En LaTeX 2ε existen ambientes. Por ejemplo, para centrar un texto, puede incluir el texto que desea que aparezca centrado entre los comandos: `\begin{center}` y `\end{center}`. Por ejemplo[3]:

```
\begin{center}
Este texto aparecerá centrado...
\end{center}
```

✓ La instrucción `\begin{center}` inicia el ambiente centrado.

✓ La instrucción `\end{center}` finaliza el ambiente centrado.

Otros ambientes que pueden ser útiles para empezar con el uso de LaTeX 2ε son:

itemize Crea una lista con viñetas.

enumerate Crea una lista enumerada.

description Crea una lista descriptiva (como la que está leyendo ahora).

minipage Crea una minipágina dentro de una página.

equation Para enumerar ecuaciones y centrarlas.

[3]Se supone que usted teclea el texto que aparece entre las instrucciones `\begin{document}` y `\end{document}`.

eqnarray Para editar un arreglo de ecuaciones.

array Para realizar arreglos de números o letras (matemático).

tabular Para realizar tablas (en ambiente textual).

flushright Justifica el texto a la derecha.

flushleft Justifica el texto a la izquierda.

Cualquier ambiente en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ debe iniciar con la instrucción `\begin{ambiente}`, y finalizar con `\end{ambiente}`, donde `ambiente` es el nombre del ambiente.

Por ejemplo, si desea incluir una ecuación con el ambiente `equation` debe escribir:

```
\begin{equation}
y = mx + b
\end{equation}
```

7.1.1.3 Cómo escribir ecuaciones en $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Donald Knuth creó $\LaTeX\,2_\varepsilon$ con la intención de que los libros que requirieran ecuaciones fueran cada vez mejores.

Para poder incluir una ecuación en $\LaTeX\,2_\varepsilon$, es requisito indispensable estar en el ambiente matemático.

Los ambientes que fueron diseñados para editar ecuaciones no requieren que escribamos las instrucciones: `\begin{math}` y `\end{math}`.

Por ejemplo, para imprimir la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado escribimos:

```
\begin{equation}
x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}
\end{equation}
```

y aparecerá como:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

y para incluir en el documento la fórmula de la pendiente de una recta:

```
\begin{equation}
m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{equation}
```

y aparecerá como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como ya se observó, las fracciones se escriben con el código `\frac`, los subíndices anteponiendo el guión bajo: `x_2`.

Es una buena idea utilizar los símbolos { } como agrupadores cuando desee incluir varios caracteres o símbolos en un subíndice o en un exponente. Por ejemplo:

$$A = [a_{ij}]$$

lo consigue con el siguiente código:

```
\begin{equation}
A = [a_{ij}]
\end{equation}
```

El siguiente ejemplo muestra cómo incluir exponentes:

$$x^n + y^n = z^n$$

que se consigue con el siguiente código:

```
\begin{equation}
x^n + y^n = z^n
\end{equation}
```

Algunas veces requerirá incluir texto dentro del ambiente matemático, por ejemplo los siguientes casos:

$$
\begin{eqnarray}
p(A) &=& \frac{\mbox{número de veces que A ocurrió}}{\mbox{número de veces que se repitió el experimento}}\\
f(x) &=& \left\{\begin{array}{ll} 2\,x-15 & \mbox{ si } x \leq \pi\\ \frac{3\,x}{5}+7 & \mbox{ si } x > \pi \end{array}\right.
\end{eqnarray}
$$

que se consigue con el siguiente código:

```
\begin{eqnarray}
p(A) &=& \frac{\mbox{número de veces que $A$ ocurrió}}
  {\mbox{número de veces que se repitió el experimento}}\\
%
f(x) &=&
   \left\{\begin{array}{ll}
        2\,x-15      & \mbox{ si } x \leq \pi\\
    \frac{3\,x}{5}+7 & \mbox{ si } x > \pi
    \end{array}\right.
\end{eqnarray}
```

donde se incluye la instrucción `\mbox{texto}`, que genera una caja para incluir el texto `texto` dentro del ambiente matemático.

Otro ejemplo donde se requiere agregar texto que puede utilizar para hacer más claro el concepto está en la definición de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mbox{Incremento en }y}{\mbox{Incremento en }x}$$

Esta fórmula se obtiene con el siguiente código:

```
\begin{equation*}
m = \displaystyle
    \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
    = \frac{\Delta y}{\Delta x}
    = \frac{\mbox{Incremento en }y}{\mbox{Incremento en }x}
\end{equation*}
```

Puede notar que ahora se ha utilizado la instrucción `\begin{equation*}`, en lugar de la instrucción `\begin{equation}`. La diferencia, el incluir un asterisco ($*$) al final, le indica a LaTeX 2_ε que no deseamos que enumere esa ecuación.

Los signos de raíz se pueden generar con la instrucción: `\sqrt{}`. Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$$

se obtiene con el código:

```
\begin{equation}
\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}
\end{equation}
```

El índice de la raíz se edita entre corchetes como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\sqrt[n]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{1/n}$$

```
\begin{equation}
\sqrt[n]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}=
   \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{1/n}
\end{equation}
```

Algunas fórmulas útiles para estadística se muestran enseguida:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \\
\sigma &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}
\end{aligned}$$

que se obtuvieron con el código:

```
\begin{eqnarray*}
\bar{x} &=& \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}{x_i}}{n}\\
%
\sigma &=& \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}
           {(\bar{x} - x_i)^2}}{n-1}}%
\end{eqnarray*}
```

Podemos escribir cualquier notación matemática de secundaria o bachillerato usando $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Algunos ejemplos de cálculo:

```
\displaystyle\frac{d(u\cdot v)}{dx} &=&
              u\,\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}\\
\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &=&
 \frac{v\,\displaystyle\frac{du}{dx}-u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}\\
\int\!u\,dv &=& u\cdot v - \int\!v\,du\\
\displaystyle\int\!v^n\,{dv} &=& \frac{v^{n+1}}{n+1}+ C
```

Incluye en el documento:

$$\begin{aligned}
\frac{d(u\cdot v)}{dx} &= u\,\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\,\dfrac{du}{dx}-u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}\\
\int\!u\,dv &= u\cdot v - \int\!v\,du\\
\int\!v^n\,dv &= \frac{v^{n+1}}{n+1}+ C
\end{aligned}$$

Por ejemplo, podemos denotar al conjunto de los números reales con el siguiente código:

```
\begin{equation}
\mathbb{R} = \mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'
\end{equation}
```

Esto incluye en el documento lo siguiente:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$$

Otro ejemplo más avanzado se muestra enseguida:

```
Determinar: $x_1, x_2, \cdots, x_n$, para maximizar:
\begin{equation*}
z=\sum\limits_{j=1}^{n}{c_j\,x_j}
```

```
\end{equation*}
sujeto a:
\begin{eqnarray*}
\sum\limits_{j=1}^{n}{a_i\,x_j\leq b_i}
    \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, m\\
x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \cdots, n
\end{eqnarray*}
```

Lo cual imprime en el documento:

Determinar: $x_1, x_2, \cdots, x_n$, para maximizar:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rl} \sum\limits_{j=1}^{n} a_i\, x_j \leq b_i & \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0 & \qquad j = 1, 2, \cdots, n \end{array}$$

O en forma vectorial:

```
Determinar: $\vec{x}$ para maximizar:
\begin{equation*}
z(\vec{x}) = \vec{c}\cdot\vec{x}
\end{equation*}
sujeto a:
\begin{eqnarray*}
A\,\vec{x}&\leq&\vec{b}\\
\vec{x} & \geq & \vec{0}
\end{eqnarray*}
```

Y en el documento verá:

Determinar: $\vec{x}$ para maximizar:

$$z(\vec{x}) = \vec{c}\cdot\vec{x}$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} A\,\vec{x} & \leq & \vec{b} \\ \vec{x} & \geq & \vec{0} \end{array}$$

Podemos editar una matriz o determinante utilizando el ambiente `array`:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

se obtiene con el código:

```
\begin{equation}
\det(A)=
\left| \begin {array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}\end {array} \right|
\end{equation}
```

Y una matriz aumentada se consigue con el siguiente código:

```
\begin{equation}
A =
\left( \begin {array}{ccc|r}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_1\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2\\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \beta_3
\end {array} \right)
\end{equation}
```

Y en el documento se imprime:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|r} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \beta_3 \end{array} \right)$$

Un arreglo que puede servir para las operaciones con polinomios es:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 5 \\ \cline{2-2} x + 2 & \quad x^2 - 3x - 10 \\ & -\cancel{x^2} - 2x \\ \cline{2-2} & \qquad -\cancel{5x} - \cancel{10} \\ & \qquad\ \ \cancel{5x} + \cancel{10} \\ \cline{2-2} & \qquad\quad 0x + 0 \end{array}$$

```
\begin{center}
\begin{tabular}{rlr}
~ & ~~$x-5$ & ~ \\\cline{2-3}
\multicolumn{1}{c|}{$x+2$}& ~~$x^2-3\,x-10$ & ~ \\
~ & $-\cancel{x^2}-2\,x$ &~\\\cline{2-3}
~ & \hspace{5ex}$-\cancel{5\,x}-\cancel{10}$& \\
~ & \hspace{5.5ex} $\cancel{5\,x}+\cancel{10}$ &~\\\cline{2-3}
~ & \hspace{6ex} $0\,x + 0$ & \\
\end{tabular}
\end{center}
```

Y para la división sintética:

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2\\
  & -2 & 10 & \\\hline
1 & -5 & \textcolor{red}{0} &
\end{array}
$$

```
$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2\\
  & -2 & 10  & \\\hline
1 & -5 & \textcolor{red}{0} &
\end{array}
$$
```

Las tablas se pueden escribir con la ayuda de un arreglo. Por ejemplo:

Los primeros números naturales que son números primos son:

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	73

Que se obtuvo con:

```
Los primeros números naturales
que son números primos son:
\begin{center}
\begin{tabular}{ccccc}
2 & 3 & 5 & 7 & 11\\
13 & 17 & 19 & 23 & 29\\
31 & 37 & 41 & 43 & 47\\
53 & 59 & 61 & 67 & 73
\end{tabular}
\end{center}
```

Note que cuando utilizamos el ambiente `tabular` no se requiere iniciar el ambiente matemático previamente, mientras que en el ambiente `array` sí.

Ya habrá observado que se incluyen varias letras entre llaves después de la instrucción `\begin{array}`. Estos argumentos indican cómo se debe imprimir cada columna, justificada a la derecha (`r`), justificada a la izquierda (`l`), o centrada (`c`). Debe incluir una letra por cada columna.

Si desea que aparezcan líneas horizontales que sirvan de división entre cada renglón de la tabla, incluya la instrucción `\hline`. Por ejemplo:

5 mod 6	0 mod 6	1 mod 6
5	6	7
11	12	13
17	18	19
23	24	25
29	30	31
35	36	37
41	42	43
47	48	49
53	54	55
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Clases 5, 0 y 1 de módulo 6.

Que se obtiene con el código:

```
\begin{center}
\rule{6cm}{1pt}\\
\begin{array}{ccc}
\rowcolor{yellow!25} {5 \mod 6}  &  {0 \mod  6} & {1 \mod 6}
\\\hline
 5          &       6      &     7   \\
11          &      12      &    13   \\
17          &      18      &    19   \\
23          &      24      &    25   \\
29          &      30      &    31   \\
35          &      36      &    37   \\
41          &      42      &    43   \\
47          &      48      &    49   \\
53          &      54      &    55   \\
\vdots      &    \vdots    &  \vdots
\end{array}\\
\rule{6cm}{1pt}\\
\textcolor{blue}{\small\bf Clases 5, 0 y 1 de módulo 6.}
\end{center}
```

Algunas veces se requerirán de tablas, pero con contenido textual. En esos casos conviene más utilizar el ambiente `tabular` en lugar del ambiente `array`.

El primero se diseñó para incluir texto, el segundo para símbolos matemáticos y/o ecuaciones, por ejemplo:

```
En las vacaciones nos fuimos a Cerro Azul, Ver.,
y mi mamá compró varios recuerdos.
Diez llaveros para mi tíos, cinco playeras para mis primos,
una imagen del la Virgen para mi abuelita y para mí,
dos libros para que me ponga a estudiar.
Los precios de cada artículo están en la siguiente tabla:
\begin{center}
\rule{7.25cm}{2pt}\\
\begin{tabular}{lr}
\rowcolor{yellow!25}
\enc{Artículo}    & \enc{Precio}\\\hline
Llavero              & \$12.00 pesos\\
Playera              & \$45.00 pesos\\
Imagen de la Virgen  & \$125.00 pesos\\
Libro de Matemáticas & \$120.00 pesos\\
\end{tabular}\\
\rule{7.25cm}{2pt}
\end{center}
¿Cuánto gastó en los recuerdos de las vacaciones?
```

Incluye en el documento lo siguiente:

En las vacaciones nos fuimos a Cerro Azul, Ver., y mi mamá compró varios recuerdos. Diez llaveros para mi tíos, cinco playeras para mis primos, una imagen del la Virgen para mi abuelita y para mí, dos libros para que me ponga a estudiar. Los precios de cada artículo están en la siguiente tabla:

Artículo	**Precio**
Llavero	$12.00 pesos
Playera	$45.00 pesos
Imagen de la Virgen	$125.00 pesos
Libro de Matemáticas	$120.00 pesos

¿Cuánto gastó en los recuerdos de las vacaciones?

En algunos de los códigos de los ejemplos dados se ha incluido la instrucción `\enc{}`, con un argumento dentro de los corchetes.

Esta instrucción no existe en $\LaTeX\,2_\varepsilon$. El autor de este libro la definió con el siguiente código:

```
\def\enc#1{\textbf{\textcolor{blue}{#1}}}
```

La instrucción `\def` indica que estamos definiendo una nueva instrucción. Enseguida está el nombre de la instrucción que estamos definiendo: `\enc`.

`#1` indica que esta instrucción requiere de un argumento. Después, entre llaves, definimos la instrucción. En este caso se imprimirá el argumento de la instrucción en formato `\textbf` (negrita) y con color azul. Por ejemplo[4]:

```
\enc{Nota:} Esto solamente es un ejemplo.
```

Imprime en el documento lo siguiente:

Nota: Esto solamente es un ejemplo.

7.1.1.4 Símbolos matemáticos

En los documentos generados con LaTeX 2$_{\varepsilon}$ se pueden incluir, además de ecuaciones, funciones matemáticas básicas, el alfabeto griego y demás símbolos matemáticos que pueda utilizar en cualquier curso de matemáticas preuniversitario.

Funciones matemáticas

Las funciones matemáticas trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc., se definen en LaTeX 2$_{\varepsilon}$ para cuando se requiera incluirlas. Cuando escriba el código para incluir una de éstas, debe estar en el ambiente matemático.

\arccos	\cos	\csc	\exp	\ker	\limsup	\min	\sinh
\arcsin	\cosh	\deg	\gcd	\lg	\ln	\Pr	\sup
\arctan	\cot	\det	\hom	\lim	\log	\sec	\tan
\arg	\coth	\dim	\inf	\liminf	\max	\sin	\tanh

Alfabeto Griego

También están definidas las letras griegas. Enseguida se muestran los códigos de este alfabeto:

α	\alpha	β	\beta	γ	\gamma	δ	\delta	ϵ	\epsilon
ζ	\zeta	η	\eta	θ	\theta	ι	\iota	κ	\kappa
λ	\lambda	μ	\mu	ν	\nu	ξ	\xi	π	\pi
ρ	\rho	σ	\sigma	τ	\tau	υ	\upsilon	ϕ	\phi
χ	\chi	ψ	\psi	ω	\omega	φ	\varphi	ε	\varepsilon
ϖ	\varpi	ϑ	\vartheta	ϱ	\varrho	ς	\varsigma		
Γ	\Gamma	Δ	\Delta	Θ	\Theta	Λ	\Lambda	Ξ	\Xi
Π	\Pi	Σ	\Sigma	Υ	\Upsilon	Φ	\Phi	Ω	\Omega

[4] Podemos definir más instrucciones, comandos y ambientes. Pero para eso se requiere de un curso avanzado de LaTeX 2$_{\varepsilon}$.

Símbolos matemáticos

En $\LaTeX\,2_\varepsilon$ se pueden generar todos los símbolos matemáticos que un profesor de bachillerato pueda imaginar y muchos más.

En la siguiente tabla se muestran los que más frecuentemente usamos en los cursos de niveles medio y medio superior[5].

Símbolo	Código	Símbolo	Código
$\div$	\div	$\times$	\times
$\approx$	\approx	$\neq$	\neq
$\propto$	\propto	$\sim$	\sim
$\equiv$	\equiv	$\not\equiv$	\not\equiv
$\pm$	\pm	$\mp$	\mp
$\leq$	\leq	$\geq$	\geq
$\leqq$	\leqq	$\geqq$	\geqq
$\nleq$	\nleq	$\ngeq$	\ngeq
∞	\infty	$\emptyset$	\emptyset
$\notin$	\notin	$\in$	\in
$\cup$	\cup	$\cap$	\cap
$\subset$	\subset	$\supset$	\supset
$\perp$	\perp	$\parallel$	\parallel
$\cdot$	\cdot	$\cdots$	\cdots
$\vdots$	\vdots	$\ddots$	\ddots
$\therefore$	\therefore	$\because$	\because
$\mid$	\mid	$\nmid$	\nmid
$\rightarrow$	\rightarrow	$\Rightarrow$	\Rightarrow
$\leftarrow$	\lefttarrow	$\Leftarrow$	\Leftarrow
$\sum$	\sum	$\prod$	\prod
$\vec{x}$	\vec{x}	$\overline{AB}$	\overline{AB}
$\angle$	\angle	$\Leftrightarrow$	\Leftrightarrow

Si usted pensó en un símbolo que no se encuentra en esta lista, puede encontrarlo en la lista que contiene todos los símbolos contenidos en $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Esta lista se encuentra en la documentación en la carpeta donde se grabaron todos los archivos de MikTEX. Muy probablemente se encuentren en una dirección como la siguiente:

```
C:\Archivos de programa\MiKTeX\doc\info\symbols\comprehensive
```

7.1.1.5 Secciones en $\LaTeX\,2_\varepsilon$

En $\LaTeX\,2_\varepsilon$ podemos organizar un documento por secciones, subsecciones, subsubsecciones, etc.

[5]Obviamente, los símbolos matemáticos deben incluirse dentro de un ambiente matemático de $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Para indicar el título y el inicio de una sección utilizamos la instrucción: `\section{}`. Por ejemplo:

```
\section{La ecuación de la recta}
```

De manera semejante podemos definir subsecciones:

```
\subsection{La pendiente}
```

En un artículo (documento de clase `article`) no podemos definir los capítulos o partes, pero en el libro (documento de clase `book`) sí.

Un capítulo se define con la instrucción `\chapter{}`. Por ejemplo:

```
\chapter{Límites}
```

Se define, de manera más amplia que el capítulo, la parte, que viene siendo equivalente al tomo de una obra. Se define con la instrucción `part`. Por ejemplo:

```
\part{Tomo I}
```

La inclusión de las secciones es como sigue:

```
\part{Tomo I}
\chapter{Capítulo I}
\section{Sección 1.1}
\subsection{Subsección 1.1.1}
\subsubsection{Subsubsección 1.1.1.1}
```

Puede incluir varias veces la instrucción `\chapter{}` dentro de un solo `\part{}`.

De manera semejante, puede incluir varias secciones dentro de un capítulo y a su vez varias subsecciones dentro de una sección, etc.

7.1.1.6 Paquetes de LaTeX 2_ε

En LaTeX 2_ε hay muchos paquetes que sirven de apoyo para generar materiales.

Distintos paquetes tienen funciones distintas: para hacer dibujos, cajas, tablas muy extensas, trabajar con colores, etc.

Cada paquete tiene distintas opciones.

Algunos ejemplos de paquetes son los siguientes:

beamer para preparar presentaciones para proyectarse (por ejemplo para presentar una plática ante un auditorio).

fancybox para crear cajas con sombra, o con "*esquinas*" redondeadas, etc.

Una caja con sombra...

amsmath para utilizar las fuentes matemáticas de la Sociedad Matemática Americana (American Mathematical Society).

enumerate para enumerar listas de distintas formas.

ulem para subrayar texto.

multicol para editar partes del documento con varias columnas.

Para conocer cómo utilizar cada uno de los paquetes puede ver algunos ejemplos en Internet o bien, puede consultar la documentación que se incluye con la instalación del MikTeX. Muy probablemente en una carpeta con la siguiente dirección:

```
C:\Archivos de programa\MiKTeX\doc\LaTeX
```

7.1.1.7 Tipografía

En LaTeX 2_ε podemos cambiar el tamaño de la fuente (es decir, el tamaño de la letra impresa en el documento) de varias maneras.

La primera se indica en la instrucción `\documentclass[10pt,letterpaper]{book}`. Esta instrucción de indica a LaTeX 2_ε que el tamaño de la fuente a utilizar en el documento actual es de 10 puntos y el tamaño de hoja es carta.

Puede utilizar 11 puntos o 12 puntos con esta instrucción.

Otra forma de cambiar el tamaño de la fuente se provee utilizando las instrucciones diseñadas especialmente para este fin.

Fuente tamaño tiny
Fuente tamaño scriptsize
Fuente tamaño footnotesize
Fuente tamaño small
Fuente tamaño normalsize
Fuente tamaño large
Fuente tamaño Large
Fuente tamaño LARGE
Fuente tamaño huge
Fuente tamaño Huge

lo cual se consigue con el siguiente código:

```
\begin{center}
\tiny{Fuente tamaño tiny}\\
\scriptsize{Fuente tamaño scriptsize}\\
\footnotesize{Fuente tamaño footnotesize}\\
\small{Fuente tamaño small}\\
\normalsize{Fuente tamaño normalsize}\\
\large{Fuente tamaño large}\\
\Large{Fuente tamaño Large}\\
\LARGE{Fuente tamaño LARGE}\\
\huge{Fuente tamaño huge}\\
\Huge{Fuente tamaño Huge}\\
\end{center}
\normalsize
```

También podemos cambiar el aspecto de la fuente con las siguientes instrucciones:

`\textnormal{Hola}`	Hola	Texto normal
`\emph{Hola}`	Hola	Enfatizado
`\textrm{Hola}`	Hola	Roman
`\textsf{Hola}`	Hola	Sans Serif
`\texttt{Hola}`	`Hola`	Type writer
`\textup{Hola}`	Hola	Upright
`\textit{Hola}`	*Hola*	Itálica
`\textsl{Hola}`	*Hola*	Inclinada
`\textsc{Hola}`	HOLA	Small Caps
`\textbf{Hola}`	**Hola**	Negrita
`\textmd{Hola}`	Hola	Peso y ancho normal

Las fuentes también pueden imprimirse en color. Para esto debemos cargar el paquete `color` en el preámblo del documento. La instrucción `\textcolor{color}{Texto}` imprime: `Texto` con el color `color`.

Por ejemplo:

```
\begin{center}
\textcolor{blue}{Texto en color azul.}\\
\textcolor{red}{Texto en color rojo.}\\
\textcolor{brown}{Texto en color café.}\\
\textcolor{cyan}{Texto en color cyan.}\\
\textcolor{gray}{Texto en color gris.}\\
\textcolor{green}{Texto en color verde.}
\end{center}
```

imprime en el documento:

Texto en color azul.
Texto en color rojo.
Texto en color café.
Texto en color cyan.
Texto en color gris.
Texto en color verde.

7.1.1.8 Cómo conseguir ayuda

Esta pequeña introducción al LaTeX 2$_\varepsilon$ que se incluye en este libro tiene el propósito de motivarle a preparar los materiales que usted piensa son más adecuados a su curso. Usted puede encontrar cursos más completos y avanzados en librerías.

También puede buscar en Internet cursos que puede descargar de manera gratuita. Hay muchos manuales para aprender a utilizar LaTeX 2$_\varepsilon$ en Internet. De hecho, en la documentación del programa MikTeX se debió instalar un documento en formato `pdf` con nombre: `FAQ-CervanTeX.pdf`. Muy probablemente en la dirección:

```
C:\Archivos de programa\MiKTeX\doc\faq\spanish
```

Para poder resolver rápidamente una cuestión básica de LaTeX 2$_\varepsilon$ puede buscar la ayuda que incluye el programa con el que se editan los documentos. Si utiliza el programa TeXnicCenter, presione la tecla `F1` e inmediatamente aparecerá una ventana que se titula `TeXnicCenter Online Help`. En la pestaña `Contents` puede consultar el manual que incluye `LaTeX Help E-book`. Ese manual está escrito en Inglés.

Con el uso de LaTeX 2$_\varepsilon$ puede preparar materiales didácticos muy eficientes para explicar conceptos elementales de matemáticas de una manera muy intuitiva. Puede ver algunos ejemplos a lo largo de este libro.

Imagine todas sus listas de ejercicios, exámenes, tareas, etc., elaborados tal y como aparecerían si fueran a imprimirse en un libro por una editorial: los símbolos de integral, de operaciones con conjuntos, letras del alfabeto griego, diagramas, gráficas, etc., todos con una calidad superior, al nivel de la editorial de mayor prestigio. Eso es lo que usted puede lograr al usar $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

7.1.1.9 $\LaTeX\,2_\varepsilon$ en 15 sesiones

El autor de este material ha redactado el manual que ha titulado: "*$\LaTeX\,2_\varepsilon$ en 15 sesiones*", especialmente para profesores de matemáticas y todas aquellas personas que requieran aprender el uso de $\LaTeX\,2_\varepsilon$ y que carecen de la experiencia en la programación de algún lenguaje de alto nivel.

Si requiere elaborar un artículo de divulgación, lista de ejercicios, un exámen, notas de clase, preparar un resporte técnico, o una presentación para presentar una plática en un congreso, etc., este manual será perfecto para guiarle en esta tarea.

Si solamente desea mejorar el aspecto visual y la calidad tipográfica de los materiales que usted elabora, $\LaTeX\,2_\varepsilon$ es su mejor opción.

El manual contiene cientos de códigos que acompañan al resultado que verá en el documento que $\LaTeX\,2_\varepsilon$ le devolverá. También se incluyen códigos completos de documentos que se generaron usando este lenguaje tipográfico así como los documentos mismos.

Algunos de los documentos completos que se incluyen en este manual, junto con su código son algunos artículos de divulgación, un exámen, presentaciones para explicar la solución de problemas diversos, formularios, Curriculum Vitae, entre otros.

Se explica además cómo crear sus propias instrucciones usando este lenguaje tipográfico, así como la forma de definir ambientes propios para mejorar el aspecto visual de los materiales didácticos que usted puede crear usando $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

7.1.2 Otros programas

$\LaTeX\,2_\varepsilon$ no es el único software gratuito que puede utilizar para mejorar su enseñanza en el aula. Algunos otros programas puede encontrar en Internet y utilizar de manera gratuita.

Algunos de estos programas son muy fáciles e intuitivos de utilizar. A continuación se enlistan algunos ejemplos y los cursos en los que puede utilizar.

✓ **Derive** Para el curso de cálculo. Grafica funciones, las derivadas de las mismas, calcula área bajo la curva, etc.

- ✓ **WinPlot** Para el curso de precálculo. Realiza principalmente gráficas de funciones.
- ✓ **GraphEq** Para el curso de precálculo. Realiza principalmente gráficas de funciones.
- ✓ **GnuPlot** Para el curso de precálculo. Realiza principalmente gráficas de funciones. También grafica un archivo con datos con coordenadas de puntos de algún fenómeno. Puede utilizarse en un curso de programación.
- ✓ **Poly** Para el curso de geometría plana. Ayuda en el estudio de los poliedros. Tiene la opción de ver el poliedro en tercera dimensión o de ver el esquema para construirlo. Puede animar el poliedro girándolo en 3D.
- ✓ **C.a.R.** Para el curso de geometría plana[6]. Se diseñó para realizar dibujos con regla y compás.

Además de estos programas existen también lenguajes de programación que pueden servir para elaborar animaciones para explicar conceptos de matemáticas o física.

Por ejemplo, `Java`. Aprender `Java` es más complicado que aprender LaTeX 2_ε, porque se trata de un lenguaje de programación que requiere de otros conceptos de programación, como el manejo de tipos de datos, arreglos, apuntadores, funciones, clases, constructores, destructores, etc.

Si tiene oportunidad, se recomienda que tome un curso de programación en `Java` o `JavaScript`.

[6]C.a.R. significa Compass and Ruler, esto es, Compás y Regla, en Inglés.

7.2 Software comercial

Evidentemente, también existe una infinidad de software comercial que se ha diseñado para la enseñanza de las matemáticas.

Algunos de los programas comerciales más comunes son:

- ✓ **Maple**
- ✓ **Mathematica**
- ✓ **MatLab**
- ✓ **MathCAD**
- ✓ **Cabri Geometry**
- ✓ **Cabri 3D**

La mayoría de los programas comerciales tiene muy buen soporte, archivos de ayuda que incluyen ejemplos demostrativos para su uso, ayuda en línea, etc.

Se recomienda que busque información en Internet de estos programas si tiene el interés de adquirirlos para que pueda conocer primero qué pueden hacer por usted en el aula o para preparar materiales didácticos.

Puede buscar la página de cada uno de los softwares que encuentre en Internet y solicitar información sobre cómo puede adquirirlo, cuánto cuesta una licencia para un profesor, para un estudiante, para una escuela, etc., y cuánto cuesta instalarlo en cierto número de computadoras.

Al seleccionar un software debe considerar qué temas del programa de estudio del curso en el cual planea utilizarlo se pueden explicar mejor con el uso de ese software, si tiene otras opciones más convenientes (en cuestión del manejo del software, tanto para usted como para los estudiantes), entre otras cuestiones como las condiciones del laboratorio de cómputo (no olvide los requerimientos tecnológicos del software), el horario disponible del mismo, etc.

7.2.1 Recomendación

Se recomienda que siempre obtenga software de una manera legal. No arriesgue su equipo con software pirata.

Es mejor conseguir software libre si no desea o no puede costear el uso del software comercial, sea para uso personal o escolar.

Si usted no conoce un software libre con una aplicación particular, busque información en Internet[7], pregunte a otros profesores, a investigadores en esa área, etc., pero NUNCA se arriesgue utilizando software pirata.

[7] Visite, por ejemplo, `www.wikipedia.org`, y busque `software matemático` o algo parecido.

Ocho

Apéndices

Las computadoras son inútiles. Solamente te pueden dar respuestas.

— Pablo Picasso

Ap. A Álgebra básica

Ap. A

8.1.1 Leyes de los exponentes

Regla 1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Regla 2. $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

Regla 3. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

Regla 4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

Regla 5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Regla 6. $x^0 = 1 \qquad x \neq 0$

Regla 7. $\dfrac{1}{x^m} = x^{-m}$

Regla 8. $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

8.1.2 Productos notables y factorización

- $x\,(y+z) = x\,y + x\,z$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3\,x^2y + 3\,xy^2 + y^3$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$
- $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x\,y^{n-2} + y^{n-1}\right)$

Ap. B

Ap. B Geometría Analítica

Sistemas de Ejes coordenados

Distancia entre dos puntos: La longitud D del segmento $\overline{PQ}$ siendo $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, es:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Punto de división: Las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, en la razón r son:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1 + r} \qquad\qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1 + r}$$

Punto medio: Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, son:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Pendiente: La pendiente m de la recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Condición de paralelismo: Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = m_2$ implica que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Condición de perpendicularidad: Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 perpendiculares ($\ell_1 \perp \ell_2$), entonces,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ángulo entre dos rectas: Si ϕ es el ángulo entre las rectas ℓ_1, ℓ_2, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Fórmula de Herón: El área del triángulo con lados de longitud a, b, c, respectivamente y semiperímetro p es:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$$

Nota: El semiperímetro es igual a la mitad del perímetro:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

La Línea Recta

Ec. Recta F. Punto-pendiente: La recta pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Dos puntos: La recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\,(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Pendiente-ordenada al origen: La recta tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $B(0, b)$:

$$y = m\,x + b$$

Ec. Recta F. Simétrica: Las intersecciones con los ejes son $A(a, 0)$ y $B(0, b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ec. Recta F. General: La ecuación de cualquier recta se puede escribir con:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

donde A y B no son simultáneamente cero.

Ec. Recta F. Normal: Útil para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Distancia de un punto a una recta: La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $\ell :\; A\,x + B\,y + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{A\,x_1 + B\,y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La Circunferencia

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el origen y radio r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el punto $C(h, k)$ y radio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ec. Circunferencia: Forma general:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Si el centro de la circunferencia es el punto $C(h, k)$ y su radio es r se cumple:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2 + k^2 - r^2 \end{aligned}$$

La Parábola

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el origen:

$$x^2 = 4\,py$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h, k)$:

$$(x - h)^2 = 4\,p\,(y - k)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola horizontal F. ordinaria: Vértice en el origen :

$$y^2 = 4\,px$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h, k)$:

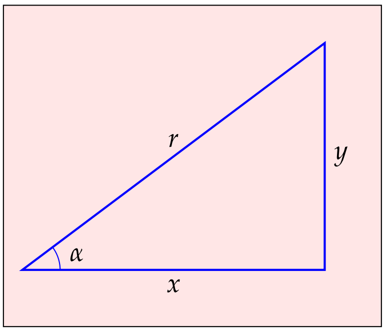
$$(y - k)^2 = 4\,p\,(x - h)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Otras fórmulas: Parábola con vértice en el punto $V(h, k)$:

Parábola	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$4\,\lvert p\rvert$	$4\,\lvert p\rvert$
Foco	$F(h, k+p)$	$F(h+p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Ec. General	$x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$	$y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$
D	$-2\,h$	$-4p$
E	$-4\,p$	$-2\,k$
F	$h^2 + 4\,pk$	$k^2 + 4\,ph$

Ap. C TRIGONOMETRÍA



Definiciones

✓ $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ ✓ $\csc\alpha = \frac{r}{y}$

✓ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ✓ $\sec\alpha = \frac{r}{x}$

✓ $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ ✓ $\cot\alpha = \frac{x}{y}$

Identidades recíprocas

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$

2) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$

3) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

4) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

5) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Propiedades de las funciones trigonométricas

1) $\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)$

2) $\cos\alpha = \sin(90^o - \alpha)$

3) $\tan\alpha = \cot(90^o - \alpha)$

4) $\cot\alpha = \tan(90^o - \alpha)$

5) $\csc\alpha = \sec(90^o - \alpha)$

6) $\sec\alpha = \csc(90^o - \alpha)$

Identidades trigonométricas pitagóricas.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

3) $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

Identidades de suma y diferencia de ángulos.

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$

3) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha$

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

5) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$

6) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta}$

7) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

8) $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

Suma de funciones trigonométricas.

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

4) $\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$

Leyes de senos y de cosenos.

1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$

3) $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$

4) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$

5) $A = \begin{cases} \dfrac{a\,b\,\sin\gamma}{2} \\ \dfrac{a\,c\,\sin\beta}{2} \\ \dfrac{b\,c\,\sin\alpha}{2} \end{cases}$

Donde: A es el área del triángulo con lados a, b, c.

Otras Identidades trigonométricas.

1) $\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$

2) $\cos(2\,\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3) $\tan(2\,\alpha) = \dfrac{2\,\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

4) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

5) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

6) $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

7) $\tan\alpha = \dfrac{2\,\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

8) $\sin\alpha = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

9) $\cos\alpha = \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Ap. D Geometría plana

Figura	Perímetro ($P =$)	Área ($A =$)	Volumen ($V =$)
Triángulo	$a+b+c$	$\frac{b\,h}{2}$	N/A
Rectángulo	$2\,b+2\,h$	$b\,h$	N/A
Cuadrado	$4\,l$	l^2	N/A
Paralelogramo	$2\,(a+b)$	$b\,h$	N/A
Trapezoide	$a+b+c+d$	$\frac{(b_1+b_2)\,h}{2}$	N/A
Círculo	$2\,\pi\,r$	$\pi\,r^2$	N/A
Prisma*	N/A		$A_B\,h$
Cilindro	N/A		$\pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono	N/A		$\frac{A_B\,h}{3}$
Esfera	N/A	$4\,\pi\,r^2$	$\frac{4\,\pi\,r^3}{3}$

* Con bases paralelas.

Notación:

- ✓ a, b, c, d $\Rightarrow$ longitudes de los lados.
- ✓ h $\Rightarrow$ altura.
- ✓ l $\Rightarrow$ longitud del lado del cuadrado.
- ✓ b_1, b_2 $\Rightarrow$ longitudes de las bases.
- ✓ r $\Rightarrow$ radio de la base (circular).
- ✓ A_b $\Rightarrow$ área de la base.

Ap. E LOGARITMOS

Definición 8.5.1

LOGARITMO
Sean a, x números reales positivos con $a > 0, a \neq 1$. El logaritmo de x en la base a es el número de veces que se debe multiplicar el número a para obtener como resultado el número x.

$$\log_a x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

La función $y = \log_a x$ se conoce como la función logarítmica en la base a.

De la definición de logaritmo se deduce inmediatamente:

i. $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$

ii. $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$

Las propiedades más básicas de los logaritmos son:

i. $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

ii. $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

iii. $\log_a(u^n) = n \log_a u$

iv. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

De las propiedades de los logaritmos se deduce:

i. $\log_a\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\log_a(u)$, porque $\log_a(1) = 0$.

ii. $\log_a(a^x) = x$, porque $a^x = a^x$

iii. $a^{\log_a(x)} = x$, porque $y = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad a^y = a^{\log_a(x)} = x$

Estas tres propiedades ayudan mucho a simplificar expresiones exponenciales y logarítmicas.

Una forma de explicar la simplificación de expresiones exponenciales es que el estudiante observe que en los últimos dos casos se repite la base a:

$$\log_a(a^x) = x \qquad \Rightarrow \qquad \log_{\cancel{a}}(\cancel{a}^x) = x$$

Puede imaginar que en este caso se *cancela* la base por estar repetida.

En el siguiente caso podemos suponer lo mismo:

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \Rightarrow \qquad \cancel{a}^{\log_{\cancel{a}}(x)} = x$$

Esto puede ayudarte a recordar cómo simplificar las expresiones logarítmicas y exponenciales a los estudiantes.

Ap. F

Ap. F Fórmulas de derivación

Se utiliza la notación $\dfrac{dy}{dx}$ para la derivada.

Las siguientes son las fórmulas de derivación de funciones algebraicas.

i. $\dfrac{dc}{dx} = 0$

ii. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

iii. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

iv. $\dfrac{d(c \cdot v)}{dx} = c\,\dfrac{dv}{dx}$

v. $\dfrac{d(u \cdot v)}{dx} = u\,\dfrac{dv}{dx} + v\,\dfrac{du}{dx}$

vi. $\dfrac{d(v^n)}{dx} = nv^{n-1}\,\dfrac{dv}{dx}$

vii. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

viii. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

ix. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

Las siguientes son las fórmulas de derivación de funciones trascendentes.

i. $\dfrac{d(\sin v)}{dx} = \cos v\,\dfrac{dv}{dx}$

ii. $\dfrac{d(\cos v)}{dx} = -\sin v\,\dfrac{dv}{dx}$

iii. $\dfrac{d(\tan v)}{dx} = \sec^2 v\,\dfrac{dv}{dx}$

iv. $\dfrac{d(\cot v)}{dx} = -\csc^2 v\,\dfrac{dv}{dx}$

v. $\dfrac{d(\sec v)}{dx} = \sec v\,\tan v\,\dfrac{dv}{dx}$

vi. $\dfrac{d(\csc v)}{dx} = -\csc v\,\cot v\,\dfrac{dv}{dx}$

vii. $\dfrac{d(\arcsin v)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,\dfrac{dv}{dx}$

viii. $\dfrac{d(\arccos v)}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-v^2}}\,\dfrac{dv}{dx}$

ix. $\dfrac{d(\arctan v)}{dx} = \dfrac{1}{1+v^2}\,\dfrac{dv}{dx}$

x. $\dfrac{d(\operatorname{arccot} v)}{dx} = \dfrac{-1}{1+v^2}\,\dfrac{dv}{dx}$

xi. $\dfrac{d(\operatorname{arcsec} v)}{dx} = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\dfrac{dv}{dx}$

xii. $\dfrac{d(\operatorname{arccsc} v)}{dx} = \dfrac{-1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\dfrac{dv}{dx}$

xiii. $\dfrac{d(\ln v)}{dx} = \dfrac{1}{v}\,\dfrac{dv}{dx}$

xiv. $\dfrac{d(\log_a v)}{dx} = \dfrac{\log_a e}{v}\,\dfrac{dv}{dx}$

xv. $\dfrac{d(a^v)}{dx} = a^v\,\ln a\,\dfrac{dv}{dx}$

xvi. $\dfrac{d(e^v)}{dx} = e^v\,\dfrac{dv}{dx}$

xvii. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = \left(v \cdot u^{v-1} + \ln u \cdot u^v\right)\,\dfrac{dv}{dx}$

Algunos autores prefieren la notación: $f'(x)$ para la derivada de la función $y = f(x)$.

Ap. G Tabla de integrales

Ap. G

A continuación se da una pequeña tabla de integrales.

i. $\int (dv + dw) = \int dv + \int dw$

ii. $\int a\,dv = a \int dv$

iii. $\int dx = x$

iv. $\int v^n\,dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1}$

v. $\int \dfrac{dv}{v} = \ln|v|$

vi. $\int a^v\,dv = \dfrac{a^v}{\ln a}$

vii. $\int e^v\,dv = e^v$

viii. $\int \ln v\,dv = v\,\ln v - v$

ix. $\int \sin v\,dv = -\cos v$

x. $\int \cos v\,dv = \sin v$

xi. $\int \sec^2 v\,dv = \tan v$

xii. $\int \csc^2 v\,dv = -\cot v$

xiii. $\int \sec v \tan v\,dv = \sec v$

xiv. $\int \sec v\,dv = \ln(\sec v + \tan v)$

xv. $\int \dfrac{dv}{a^2 - v^2} = \dfrac{1}{2\,a} \ln\left(\dfrac{a+v}{a-v}\right)$

xvi. $\int \dfrac{dv}{a^2 + v^2} = \dfrac{1}{a} \arctan\left(\dfrac{v}{a}\right)$

xvii. $\int \dfrac{dv}{v^2 - a^2} = \dfrac{1}{2\,a} \ln\left(\dfrac{v-a}{v+a}\right)$

xviii. $\int \dfrac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin\left(\dfrac{v}{a}\right)$

xix. $\int \dfrac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right)$

xx. $\int \sqrt{a^2 - v^2}\,dv = \dfrac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin\left(\dfrac{v}{a}\right)$

xxi. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\,dv = \dfrac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right)$

xxii. $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

Sustituciones Trigonométricas

✓ $\sqrt{a^2 - u^2} \to$ hágase $u = a\,\sin z \to a\,\cos z$

✓ $\sqrt{a^2 + u^2} \to$ hágase $u = a\,\tan z \to a\,\sec z$

✓ $\sqrt{u^2 - a^2} \to$ hágase $u = a\,\sec z \to a\,\tan z$

Cada una de las fórmulas debe incluir una constante sumada al final.

Aclaraciones

***

Enseguida se muestra información que puede ser relevante para cuando usted lea este libro.

- ✓ Todos las direcciones de Internet que se encuentran en el libro son correctas para la fecha de edición del mismo. Sin embargo, pueden quedar inactivas o cambiar en cuanto a la información que contienen, según se menciona en este libro, conforme avanza el tiempo.

- ✓ La dirección de correo electrónico del autor[1] es correcta y éste seguirá utilizando la misma cuenta de correo electrónico para cualquier aclaración, sugerencia o corrección.

- ✓ La página personal del autor, al 23 de noviembre de 2008, es:

  `http://yalma.fime.uanl.mx/~efrain/`

  Esta misma dirección seguirá utilizando al menos hasta diciembre de 2009.

Las siguientes lecturas sugeridas se enlistan para aquellos profesores que deseen profundizar más en las teorías del aprendizaje, enseñanza de las ciencias, de las matemáticas y de la planeación, elaboración y selección de herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas.

Los primeros libros están disponibles a través de Internet. Cada uno incluye la dirección desde donde se puede descargar.

Lecturas sugeridas

Autor: *Committee on Science and Mathematics Teacher Preparation, National Research Council*

Título: EDUCATING TEACHERS OF SCIENCE, MATHEMATICS, AND TECHNOLOGY: NEW PRACTICES FOR THE NEW MILLENNIUM

Editorial: National Academic Press (http://www.nap.edu/catalog/9832.html)

Edición: 1ra edición. 2 001.

[1] Lea la sección de los créditos al final del libro.

Autor: *Steve Olson and Susan Loucks-Horsley*

Título: INQUIRY AND THE NATIONAL SCIENCE EDUCATION STANDARDS: A GUIDE FOR TEACHING AND LEARNING

Editorial: National Academic Press (http://www.nap.edu/catalog/9596.html)

Edición: 1ra. edición. 2000.

Autor: *Steve Leinwand, Gail Burrill*

Título: IMPROVING MATHEMATICS EDUCATION: RESOURCES FOR DECISION MAKING

Editorial: National Academic Press (http://www.nap.edu/catalog/10268.html)

Edición: 1ra. edición. 2001.

Autor: *Mathematical Sciences Education Board, National Research Council*

Título: THE PREPARATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS

Editorial: National Academic Press (http://www.nap.edu/catalog/10055.html)

Edición: 1ra. edición. 1996.

Autor: *Maxine Singer, Jan Tuomi*

Título: SELECTING INSTRUCTIONAL MATERIALS

Editorial: National Academic Press (http://www.nap.edu/catalog/9607.html)

Edición: 1ra. edición. 1999.

La descarga de estos libros es gratuita en las páginas que se acompañan en cada referencia[2].

Los siguientes libros puede comprarlos en una librería.

Autor: *George Polya*

Título: CÓMO PLANETAR Y RESOLVER PROBLEMAS

Editorial: Ed. Trillas

Edición: 1ra Edición en Español. 1965

[2]Primero debe abrir una cuenta en `www.nap.edu`

Autor: *George Polya*

Título: Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving

Editorial: John Wiley & Sons

Edición: Ed. Combinada. 1981

Autor: *George Polya*

Título: Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics

Editorial: Princeton University Press

Edición: 1ra. Edición. 1954

Autor: *George Polya*

Título: Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 2. Patterns of plausible Inference

Editorial: Princeton University Press

Edición: 1ra Edición. 1986

Autor: *George Polya*

Título: Mathematical Methods in Science

Editorial: The Mathematical Association of America

Edición: 1ra. Edición. 1977

Autor: *B.L. Van der Waerden*

Título: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations

Editorial: Ed. Springer - Verlag

Edición: 1ra. Edición. 1983

Autor: *Marc J. Rosenberg*

Título: E–Learning: Estrategias para transmitir conocimiento en la era digital

Editorial: McGraw Hill

Edición: 1ra. edición en Español. 2002

Autor: *Betsy Bruneau Jones*

Título: Estrategias para la Resolución de los problemas de matemáticas

Editorial: Addison–Wesley Publiching Co.

Edición: 1ra edición. 1985

Autor: *Gerald S. Craig*

Título: Science for the Elementary School Teacher

Editorial: Ginn and Company

Edición: 2da edición. 1958

Notas finales

Andrea: Infeliz la tierra que no tiene héroes.
Galileo: No, Infeliz la tierra que necesita héroes.

— Bertolt Brecht (La vida de Galileo)

Este texto no pretende ser la solución a los problemas del aprendizaje de las matemáticas. Simplemente es una pequeña aportación en el intento por mejorar la imagen que se han formado la mayoría de los estudiantes acerca de las matemáticas y en general de las ciencias exactas.

El problema de la educación, no solamente en México, sino en muchos otros países, es muy complejo porque intervienen muchos factores que están fuera del control de las personas que toman decisiones con el fin de mejorar la educación de los jóvenes.

El profesor tiene a su disposición la materia prima más preciosa que pueda encontrar en nuestro universo: la mente de nuestros niños y jóvenes que esperan a ser moldeadas y preparadas para aprender a tomar decisiones y a actuar de una manera creativa.

El autor está convencido de que los estudiantes se pueden entusiasmar por las matemáticas tanto como se entusiasman por los deportes o por la música. El truco está en que el profesor se sienta enamorado de lo que hace, que crea que el estudiante también debe enamorarse de las matemáticas y de preparar sus clases para que eso ocurra.

Nadie puede enseñar lo que no se sabe o no conoce. No se pueden enseñar matemáticas de una manera sencilla cuando solamente se conocen las reglas sin conocer su justificación. Mucho menos cuando no se conocen aplicaciones interesantes de los temas que deben estudiar en un curso particular.

Recuerde que usted es un profesional de la educación, y como todo profesional, debe capacitarse continuamente, a menos que quiera quedar rezagado utilizando los métodos anticuados, ineficientes, inadecuados y que la mayoría de los estudiantes aborrece.

Espero que este material sirva para entusiasmar a más profesores por aprender realmente matemáticas, entender el porqué de los procedimientos y a divulgar estos conocimientos entre profesores, estudiantes y las demás personas que pueden tomar provecho de este conocimiento, que heredamos de nuestros maestros, algunos de ellos excelentes maestros, como mi maestro, Dr. Julio César Sanjuán González. Yo sé que a él le hubiera dado mucho gusto ver este material. Espero que a usted le sea de gran ayuda y le sirva de inspiración para prepararse aún más.

Efraín Soto Apolinar.
efra.soto.a@gmail.com

Bibliografía

[1] A. Anfossi. Trigonometría Rectilínea. Ed. Progreso, 1a Edición, 1948. México.

[2] Edwin E. Moise. Elementos de Geometría Superior. Ed. Continental S.A., 1a Edición, 1968. México.

[3] Freund, John E. College Mathematics with Business Applications. Ed. Prentice Hall, Inc. 1969. EE.UU.

[4] Hefferon, Jim. Linear Algebra. Saint Michael's College 1ra Edición, 2006.Colchester, Vermont. EE.UU. `http://joshua.smcvt.edu`

[5] Larson, Roland E.; Hostetler, Robert P. Intermediate Algebra. Ed. D.I. Heath and Company. 1992. EE.UU.

[6] McLellan, J. A. The Teacher's Hand-book of Algebra. Segunda edición. Ed. W.J. Gage and Company. 1881. Toronto, Canadá.

[7] Moritz, R. E. On Mathematics and Mathematicians. Dover Publications, Inc. 1ra Edición, 1914. New York, EE.UU.

[8] Soto, A., Efraín. Enseñanza Efectiva de las Matemáticas. Primera edición (2008) `http://www.scribd.com/Efrain_Soto_Apolinar` (Visitado el 31 de mayo de 2009) En revisión técnica. México. 2008.

[9] Soto, A., Efraín. Mini-manual de LaTeX 2_ε `http://www.scribd.com/Efrain_Soto_Apolinar` (Visitado el 31 de mayo de 2009) México. 2008.

[10] Soto, A., Efraín. Matemáticas para Bachillerato I (Álgebra elemental) En revisión técnica. México. 2009.

[11] Soto, A., Efraín. Matemáticas para Bachillerato III (Geometría analítica) En revisión técnica. México. 2009.

[12] Tantau, Till. TikZ and PGF Manual for Version 1.18 Documentación de LaTeX 2_ε.

[13] Tantau, Till. User's Guide to the Beamer Class, Version 3.06 Documentación de LaTeX 2_ε.

[14] Swan, Elena Dictionary of Contemporary Quotations. Zwan Sonnenschein & Co. Limited, 1ra Edición, 1904. New York, EE.UU.

[15] Wells, Webster Nueva Trigonometría Plana y Esférica. Ed. D.C. Heath & Co., 2da Edición, 1917. EE.UU.

[16] Merriam–Webster's Collegiate Dictionary. Zane publishing, 10a Edición, 1998. EE.UU.

Créditos

Créditos

Debo agradecer el precioso apoyo que todo este tiempo me ha estado brindando mi esposa, *Ana Gloria*. Sin su comprensión, ánimo y entusiasmo hubiera tardado cien veces más en elaborar este material.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de portada: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Imágenes: Todas las imágenes fueron editadas y retocadas por el autor.

- ✓ **Cielito** (Portada). *Ana I. Sobrevilla T.* (Fotografiada por el Autor)
- ✓ **Nautilus** (Portada). *http://isabelonthetrail.blogspot.com/2008/04/un-da-ms.html*
- ✓ **Centro de Monterrey** (Pag. 32). *www.nl.gob.mx*

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2008

Última revisión: 23 de noviembre de 2008.

Última modificación: 31 de mayo de 2009.

Software utilizado: En la edición, diseño y composición tipográfica de este material se han utilizado los siguientes programas:

①	LaTeX 2_ε	Tipografía del texto, ecuaciones y diagramas.
②	Gnuplot	Elaboración de Gráficas.
③	TeXnicCenter	Edición del código LaTeX 2_ε.
④	Adobe PhotoShop	Edición y retoque de imágenes.

En este libro se muestran ideas que el autor aprendió bajo la tutoría de Dr. Julio César Sanjuán González. No es una metodología pedagógica del autor, sino lo que en la opinión de éste puede ser de utilidad para los profesores de matemáticas de los niveles preuniversitarios en nuestro país.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efra.soto.a@gmail.com