Matemagia

Adrián Paenza

Matemagia

Sudamericana

Paenza, Adrián
Matemagia - 1ª ed. - Buenos Aires :
Sudamericana, 2013.
384 p.: il.; 22x15 cm. - (Obras diversas)

ISBN 978-950-07-4536-9

1. Matemática. I. Título
CDD 510

IMPRESO EN LA ARGENTINA

Queda hecho el depósito
que previene la ley 11.723.

www.megustaleer.com.ar

ISBN 978-950-07-4536-9

Esta edición de 19.000 ejemplares se terminó de imprimir en Gráfica Shincal S.R.L.,
Chile 685, Avellaneda, Buenos Aires, en el mes de octubre de 2013.

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto. Todo lo que soy se los debo a ellos dos.

A mi hermana Laura y a mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Lucas, Brenda, Miguelito, Viviana, Ulises, Diego, Sabina, Max, Amanda, Whitney, Jason, Landon, Anderson, Griffin, Ellie, María Soledad, María José, Gabriel, Mía, Valentín, Dante y Nicola.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos faros en mi vida.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Gary Crotts, Dennis Fugh, Kevin Bryson, Claudio Martínez, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Gerardo Garbulsky, Marcos Salt, Santiago Segurola, Pep Guardiola, Julio Bruetman, Diego Golombek, Ariel Hassan, Woody González, Luis Scola, David Boodey, Craig Rogers y Keith Morris.

A mis amigas Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Karina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Alicia Dickenstein, Erica Kreiter, Betty Cooper, Kim Crotts, Julie Crotts, Marisa Giménez, Norma Galletti, Carmen Sessa, Many Oroño, *Carina Maguregui, Marcela Smetanka, Mónica Muller, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Nora Bar y Marisa Pombo.*

A la memoria de los seres queridos que perdí en el camino: Guido Peskin, mis tías Delia, Elena, Miriam, Ñata y Elenita; a mi tío Saúl; a Noemí Cuño, Manny Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts y mi primo Ricardo. Y a la memoria también de mi querido Jorge Guinzburg.

Agradecimientos

A Claudio Martínez, por la generosidad con la que me entrega su tiempo. Por su inclaudicable buen humor. Por su talento y disposición para generar nuevas ideas que me involucren. Sin él mi vida sería en blanco y negro. El mejor. Mi gratitud eterna.

A Javier “Woody” González y Ariel Hassan, por la capacidad creativa que me aportan constantemente y por la increíble sensibilidad con la que infectan cada tarea en común que emprendemos.

A María Marta García Scarano, por su consistencia y perseverancia. Por todo lo que hace e hizo para mejorar mi carrera profesional.

A Carlos D’Andrea y Juan Sabia, dos ‘betatesters’ de lujo. Implacables. Talentosos. Irreemplazables. Este libro no sería el mismo sin su participación.

A Alicia Dickenstein, porque no tengo con nadie una química siquiera parecida a la que tengo con ella para discutir sobre temas matemáticos. Y además, es una de mis mejores amigas.

A Manu Ginóbili, porque sin tener una formación universitaria ‘convencional’ es quien mejor me guía para detectar el grado de dificultad de un problema. Y encima, los resuelve todos. Manu es de esas personas que si no existieran, habría que inventarlas.

A Carlos Sarraute, porque su irrupción para ‘betatestear’ el libro desde su óptica de programador sirvió para enriquecer las soluciones de muchísimos problemas.

A Gerry Garbulsky y Santiago Bilinkis, por su disposición incondicional para cooperar conmigo.

A Tristán Bauer, Verónica Fiorito, Lino Barañao, Jorge Aliaga, Ernesto Tiffenberg, Hugo Soriani, Jorge Prim, Martín Bonavetti y Aldo Fernández, porque se esfuerzan en estimularme y abrigarme con su afecto.

A Diego Golombek, porque sin él no hubiera habido libros. Él fue quien me convenció de que escribiera el primero. Y el segundo. Y el tercero... y el cuarto y el quinto también. Un lujo para la Argentina tener un difusor de la ciencia como Diego.

A Carlos Díaz, por haberme abierto las puertas de Siglo XXI Editores y a todos mis compañeros de esa etapa, en particular a Violeta Collado, Héctor Benedetti y Laura Campagna.

A Pablo Avelluto, porque fue él quien me contrató para que escribiera para Random House Mondadori y me hizo saber que allí tendría *siempre* un lugar esperándome.

A Miguel Rep, porque ¿quién podría dibujar las tapas mejor que él? ¿Quién podría interpretarme mejor que él? Un extraordinario artista argentino. Me siento honrado por su participación en este libro.

A Glenda Vieites, porque es una sonrisa que camina, una editora excepcional. La vida sería distinta si hubiera muchas Glendas. Sería mejor. Un lujo conocerla.

A Willie Schavelzon, mi agente literario. Lamento no haberlo conocido hace treinta años en lugar de cinco. Desde que trabajamos juntos, mi vida profesional con las editoriales fluye como quien se desliza sobre hielo, suavemente.

A todos los alumnos con quienes en algún momento compartimos una clase. Sin ninguna duda, con ellos comprobé que

uno nunca aprende ni entiende algo como cuando lo tiene que enseñar. Y junto a ellos aprendí casi todo lo que sé.

A Enzo Gentile, Luis Santaló, Ángel Larotonda, Eduardo Dubuc y muy especialmente a Miguel Herrera, porque fueron ellos los que me hicieron descubrir y disfrutar lo que es la verdadera matemática. Mi formación está fuertemente ligada con estos cinco maestros.

A Carmen Sessa, Nestor Búcari, Ricardo Noriega, Oscar Bruno, Baldomero Rubio Segovia, Leandro Caniglia, Pablo Calderón, Ricardo Durán, Fernando Cukierman, Juan Sabia, Matías Graña, Carlos D'Andrea y Teresa Krick, porque con ellos recorrí y disfruté del trayecto de mi vida universitaria.

A mis compañeros y colegas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, lugar en donde me formé como persona y como profesional y pasé los mejores años de mi vida.

A Edy Gerber, Betina Rodríguez, Gabriel Díaz, Elizabeth Alegre, Ezequiel Rodríguez, Claudia Eiberman, Paola Russo, Mario Bouco, Pedro e Ignacio Martínez Gerber y Alejandro Burlaka, mis compañeros en *Científicos Industria Argentina*, que se emite por Canal 7 desde hace casi *doce años*, por el apoyo constante e incondicional que recibo de parte de todos ellos.

A Pablo Coll, Juan Pablo Pinasco, Ariel Arbiser, Matías Graña, Gerry Garbulsky, Cristian Czúbara, Pablo Milrud, Gabriela Jerónimo, Laura Dóbalo, Laura Pezzati y León Braunstein, porque de una u otra forma al ayudarme a escribir los guiones de *Alterados por PI*, colaboraron en las historias que aparecen en este libro (y en los anteriores también).

A mis compañeros y amigos de El Oso Producciones, La Brújula, Canal Encuentro, Canal 7, Canal Tecnópolis, Canal Paka-Paka y *Página 12*: porque todos me hacen sentir querido sea cual fuere la ocasión y el lugar de encuentro.

A Mariana Creo, Lucrecia Rampoldi, Daniela Morel y Verónica Larrea, mis compañeros de Random House Mondadori: ellos son los que trabajan, corren, se esfuerzan para recuperar la pelota y dármela a mí, para que después parezca que los goles los hago yo. Y al nuevo director editorial, Juan Boido.

Y por último, como en las siete oportunidades anteriores, a las cuatro personas que son mis guías éticos: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

1. HISTORIAS DE VIDA

Roosevelt versus Landon

Las encuestas han invadido nuestras vidas. Casi las han 'infectado'. Como es obviamente imposible plebiscitar a toda la población sobre algún tema candente, la matemática provee una herramienta muy útil pero también muy peligrosa: hacer preguntas a un grupo esencialmente 'pequeño' pero cuyas respuestas uno pueda extrapolar e imaginar que representan el 'sentir' o 'pensar' de la sociedad.

Por supuesto, el método dista de ser infalible, pero es muy poderoso si se lo utiliza apropiadamente. Uno puede 'encuestar' a un grupo de *mil* personas e inferir con un margen de error del 3,1%[1] (por ejemplo) quién va a ser el ganador de una elección (digamos entre dos candidatos).

Pero se presentan dos problemas logísticos importantes: hay un *error* estadístico que es imposible de evitar, sencillamente porque ni mil, ni cien mil, ni un millón de personas encuestadas pueden dar el preciso valor que se obtendría si uno encuestara a *toda* la población. Sin embargo, hay *otro* error que transforma

1. En realidad, el error de una muestra de n personas se *estima* calculando error $\simeq (0{,}98)/\sqrt{n}$. Es decir, el error estadístico es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tamaño de la muestra: cuanto mayor es el número de gente encuestada, menor es el error.

todo el proceso en algo muy peligroso: elegir *mal* la muestra. ¿Qué quiere decir *mal*? La muestra *tiene que ser al azar*. Es decir, el 'campo' sobre el cual uno va a operar y hacer las preguntas, tiene que haber sido elegido sin seguir ningún patrón. No hacerlo, produce un *error sistemático* que es *virtualmente imposible* de salvar.

Acá va un ejemplo muy interesante y con múltiples ramificaciones para la Argentina de hoy.

Situémonos en agosto de 1936. Franklin Roosevelt era el presidente de los Estados Unidos y candidato demócrata a renovar su cargo que había conseguido en 1932. Por su parte, Alfred Landon era gobernador de Kansas y candidato republicano para disputarle el lugar.

La revista *Literary Digest* hizo una campaña *impresionante* para tratar de predecir quién de los dos sería el futuro presidente. Ya lo habían hecho en forma más modesta durante veinte años, anunciando anticipadamente quién sería el ganador. Es decir, durante dos décadas, había conseguido la reputación de ser quienes podrían *adelantar* el resultado de la elección: habían acertado siempre.

Históricamente, la revista se ufanaba de ese *poder* de predicción, y la basaban en la muestra 'enorme' que tenían para recoger los datos: sus propios suscriptores. Cada año, la base de datos era más grande y por lo tanto, ellos pensaban que su poder de anticipación sería cada más infalible.

Pero decidieron dar un paso más. O varios pasos más. El padrón electoral del año 1936 era de casi 40 millones de personas. La revista, en un esfuerzo sin precedentes, decidió consultar a ¡diez millones de personas! Es decir, *una cuarta parte del electorado*. El método elegido fue el que usted imagina y el más sencillo de todos: 10.000.000 de personas recibieron un sobre a través del correo común. Cada uno devolvía (si quería, claro está) el sobre que traía la estampilla 'prepaga' con un anticipo de lo que habría de votar el día de la elección.

La revista escribió en una de sus ediciones de julio de 1936: "Esta semana, 500 lapiceras escribieron más de 250.000 direcciones por día en los sobres preparados al efecto. Por otro lado, en una habitación enorme de la Cuarta Avenida (sí, la Cuarta Avenida) en Nueva York, 400 trabajadores se ocuparían de ensobrar los papeles impresos con los nombres de los dos candidatos y el sobre estampillado para su potencial retorno a la revista". Y seguía más adelante: "Las primeras respuestas de esas diez millones de personas empezarán a llegar la semana que viene, serán chequeadas por TRES personas, verificadas, y monitoreadas en total por CINCO observadores. Cuando se haya registrado la última suma, si nuestra pasada experiencia sirve como criterio, ***el país sabrá, con un error menor a una fracción de un 1%,*** el resultado del voto popular de 40 millones".

Por supuesto, el costo de tamaño esfuerzo fue descomunal, pero la revista *Digest* escribió a través de una editorial firmada por su director, que ellos creían que se brindaba un *gran servicio público al país,* y cuando uno tiene en cuenta semejante responsabilidad, ningún precio se puede considerar *alto.*

Desde el punto de vista de la revista *Digest,* la muestra tan desmesuradamente grande justificaba el costo. Aun en el caso en que los votantes devolvieran una fracción pequeña de los sobres, la muestra sería tan enorme que reduciría el margen de error a un número nada despreciable, menor a una fracción de 1%.

Las muestras actuales, las modernas, las del siglo XXI, se hacen con alrededor de 1.000 (mil) personas y con un margen de error que orilla el 3,1%. Ni bien uno incrementa la muestra, el error se reduce. Una encuesta que consulta a 4.000 personas tiene un margen de error de 1,6%, y si uno amplía la muestra hasta 16.000 (dieciseis mil) entonces el error se reduce a 0,78%.

Los sobres empezaron a llegar. En la primera semana ya se habían recibido 24.000 respuestas con lo cual el error se estimaba en alrededor de 0,6%. Pero habría más: la semana de la elección, la muestra había alcanzado un pico increíble: 2.266.566 votantes, todos tabulados 'a mano'. ¿El error? Pequeñísimo: ***0,06%.***

Los resultados fueron los siguientes: Landon: 1.293.669 - Roosevelt: 972.897. Por lo tanto, Landon estaba predestinado a obtener su triunfo con más del 57% de los votos, y encima, con un error que rondaba el ¡0,06%![2]

La diferencia era tan descomunal que la señora de Roosevelt declaró: "La reelección de mi marido está en las 'manos de los dioses[3]'".

Sin embargo, como usted ya sabe, Landon nunca fue presidente de los Estados Unidos. No solamente eso: Roosevelt ganó la elección con más del 62% de los votos. Landon pudo ganar solamente dos Estados pequeños: Maine y Vermont. ¡Roosevelt ganó los restantes 46!

¡Todo el esfuerzo, todo el dinero, todo el prestigio derrumbados en un solo día! ¿Qué pasó? ¿Cómo pudo haber salido todo tan mal?

La propia revista daba —ingenuamente— la respuesta a su propia debacle: los datos se extraían de todas las guías de teléfono que había en los Estados Unidos en ese momento, de las listas de socios de clubes (como el Rotary Club) y asociaciones civiles

---

2. Revista *Literary Digest*, 31 de octubre de 1936.

3. Es una traducción *libre* mía. La frase de la señora Roosevelt fue: "lap of the gods", que se traduciría como "la falda de los dioses".

como nuestro Automóvil Club, para poner otro ejemplo, listas de suscriptores a revistas *Time*, *Newsweek*, etcétera.

El año 1936 se ubica en el medio de la llamada Gran Depresión. Había una gran división entre los pobres y ricos. Los ricos tenían (tienen) la tendencia de votar a los candidatos republicanos, que históricamente tienden a defender sus intereses. Los pobres, en cambio, siempre se inclinaron por los demócratas. Tener un teléfono (que fue la fuente más importante de nombres y direcciones para la revista *Digest*) era un 'lujo'. De hecho, se estima que menos del 20% de la población (una de cada cinco personas) tenía acceso a una línea telefónica en ese momento. Por lo tanto, haber usado la lista de direcciones de personas a quienes les mandarían los sobres usando las guías telefónicas, sirvió para producir una distorsión flagrante: fue como haber hecho una gran lista de republicanos dejando a los demócratas afuera. ¿Por qué?

Antes de contestar la pregunta, me detengo un instante: está claro que a medida que uno amplía la lista de personas a encuestar, disminuye la posibilidad de error. Sin embargo, para poder sostener esta afirmación, es necesario conservar un dato *esencial*: la muestra tiene que ser elegida *al azar*. No importa si uno encuesta cien, mil, un millón o diez millones de personas: el error ocasionado por una mala elección de la muestra produce una herida mortal a la propia encuesta.

Por otro lado, el hecho de buscar datos entre las personas que tenían un empleo fijo, dejó afuera a muchísima gente desocupada, que eran muchísimos teniendo en cuenta la época: más de 9 millones sobre un total de 40 millones que integraban el padrón electoral.

Lo interesante es que en julio de 1936, algunas semanas antes que la revista *Literary Digest* empezara con su encuesta, George Gallup (el virtual 'inventor' de las encuestas modernas) predijo el error que se produciría en la revista, lo que generó una fuerte reacción de los editores. Sin embargo... Gallup tuvo razón.

Si bien la gente de *Digest* tenía motivos suficientes para 'ufanarse' de lo que estaban haciendo, también omitieron algunos datos esenciales: de los diez millones de sobres que enviaron, sólo contestaron 2.300.000. Es decir, que más de las tres cuartas partes de los potenciales votantes... *no respondieron*. Esos 7.700.000 'votos' que no llegaron, incluían el número de personas que —quizás— estaban satisfechas con la presidencia de Roosevelt y no tenía muchas ganas de participar en una encuesta de ese tipo. Como usted bien sabe, a los humanos nos interesa mucho más 'manifestar nuestro enojo' de cualquier manera que enfatizar nuestra aprobación.

Ni bien llegaban los sobres, la gente que pertenecía a las clases alta y media-alta, poseedoras de autos y líneas telefónicas, quizás disconforme con lo que era la administración del momento, fueron mucho más proclives a *protestar*, y utilizar cualquier medio para hacerlo, aun el de contestar una encuesta. De esa forma, quienes respondieron al pedido de la revista fueron desproporcionadamente *republicanos*.

Éstos son los *errores sistemáticos*, que son mucho más graves y/o serios que los *errores estadísticos*.

A la revista le había alcanzado este sistema para predecir las cinco elecciones previas: 1916-1920-1924-1928 y 1932. En 1936, ya no fue suficiente y el error sistemático en la elección de la muestra no pudo sostenerse en pie frente a la realidad.

Gallup sí que usaba los métodos científicos de la época, y si bien sus muestras eran decididamente más pequeñas (para el caso Landon versus Roosevelt utilizó alrededor de 50.000 encuestados), sus resultados fueron siempre mucho más precisos y certeros[4].

Final: ¿por qué la historia de Roosevelt y Landon?

En el correr de la vida de un país suelen vivirse coyunturas en donde la gente se manifiesta en contra de alguna medida impopular o directamente en contra del propio gobierno. Ése es el momento en el que acontecimientos 'puntuales' invitan a extraer conclusiones, por ejemplo, sobre el resultado *esperable* en futuras elecciones.

La situación descripta en el párrafo anterior sugiere que valdría la pena tener presente lo que pasó en los Estados Unidos en 1936 y las predicciones de la revista *Digest*. Obviamente, no puedo afirmar nada porque no tengo autoridad ni conocimientos para hacerlo, pero los medios de comunicación y las encuestas suelen apuntar —en esos momentos— a un triunfo del 'equivalente' de Alfred Landon. Quiero recordar entonces que Roosevelt obtuvo más del 62% de los votos.

Si uno quiere utilizar un método que pretende ser científico, conviene no equivocarse con la *muestra*.

4. Con todo, hay un error histórico que cometió Gallup en la elección del año 1948, dando por ganador al candidato que enfrentaba a Harry Truman (me refiero a Thomas Dewey), pero eso dará lugar a otra nota.

Sally Clark

Sally Lockyer trabajaba como abogada en un estudio en el centro de Londres en 1990. Se casó con Steve Clark, también abogado, y se mudaron a Manchester. Allí nació Christopher, el primer hijo de la pareja. Fue el 22 de septiembre de 1996. Menos de tres meses después, el 13 de diciembre, Sally llamó a una ambulancia en un intento desesperado por salvar la vida de su hijo. No alcanzó. Cuando los paramédicos llegaron a su casa, Christopher ya estaba muerto. Sally era la única que estaba con el niño en ese momento. Los médicos que revisaron el cuerpo de la criatura no lograron descubrir nada significativo y consideraron que la muerte había sido por causas naturales (hubo incluso alguna evidencia de una infección respiratoria) y ningún signo de falta de cuidado o atención por parte de la madre.

El matrimonio Clark volvió a tener otro niño, Harry, que nació prematuramente a menos de un año de la muerte de Christopher: el 29 de noviembre de 1997. Pero ¿por qué estaría escribiendo yo una nota de estas características si no se esperara algún hecho sorprendente? Y bien, menos de dos meses más tarde, el 26 de enero de 1998, Harry murió repentinamente también, y una vez más, Sally era la única persona que estaba con el bebé en su casa en el momento de la tragedia.

Esta vez, Sally y su marido fueron enviados a prisión, pero mientras que a él lo absolvieron casi inmediatamente, Sally fue acusada del doble homicidio de sus dos hijos. Aconsejada por sus abogados, Sally nunca contestó ninguna pregunta, pero siempre mantuvo que era inocente.

En el momento del juicio, los abogados defensores sostuvieron la hipótesis de que los niños fallecieron de lo que se llama Síndrome de Muerte Súbita del Lactante (SMSL), pero el jurado en 1999 la encontró culpable después de una declaración impactante de un famoso pediatra inglés, nombrado 'caballero' por la reina, Sir Roy Meadow.

Meadow, aprovechando los datos conocidos en un reciente estudio sobre el SMSL, usó la teoría de probabilidades para "*demostrar*" que ese síndrome no pudo haber sido la causa de la muerte y por lo tanto, desechada esa posibilidad, ¿qué otra alternativa quedaba de que no hubiera sido la madre? Si bien no había nada que indicara que Sally había cometido algún acto de violencia que deviniera en la muerte de su hijo, igual que en el caso de Christopher, esta vez no hubo simpatía de parte de los profesionales: Sally *tenía* que haber sido la responsable de la muerte de sus dos hijos.

Si uno lee la biografía del Dr. Meadow, entiende la repercusión que tuvo su trabajo científico en Inglaterra. Fue él quien describió en 1970 un trastorno psicológico en algunos padres (en general, la madre) que consiste en llamar la atención simulando o 'causando' la enfermedad de uno de sus hijos. La carrera de Meadow se transformó en una suerte de *cruzada* para proteger a los niños de las enfermedades mentales de sus padres y los abusos psicológicos de padres a hijos.

Meadow fue un testigo *clave* para el fiscal ya que él sabía que los datos conocidos en ese momento decían que la probabilidad de que un niño muriera de SMSL era de *uno* en 8.500[5] (aproximadamente). Por lo tanto, concluyó Meadow, la probabilidad de que *dos* niños murieran de SMSL en la misma casa *debía resultar de la multiplicación de estos dos números*:

$$(1/8.500) \times (1/8.500) = 1/72.250.000.$$

Es decir, la probabilidad de que se produjeran *dos* casos en el mismo núcleo familiar (según Meadow) era de *uno* en casi 73.000.000. Y agregó: eso solamente podría pasar en la Gran Bretaña *una vez por siglo*. Ese fue el *toque final*.

Sally Clark fue condenada a prisión perpetua.

El juez escribió en su fallo: "Si bien nosotros no condenamos a nadie en estas cortes basados en estadísticas, en este caso las estadísticas parecen abrumadoras"[6].

El juicio ocupó la primera plana de *todos* los diarios y *todos* los segmentos de noticias de *todos* los canales de televisión. Nada nuevo, por cierto. El *único* inconveniente es que se trató de un *flagrante* '*mal uso*' de las estadísticas. Lamentablemente para Sally, las conclusiones del médico fueron totalmente desatinadas.

En principio, para que ese número pudiera ser calculado de esa forma, habría que tener la **<u>certeza</u>** de que los sucesos fueron realmente *independientes* y eso, para alguien bien intencionado y mínimamente preparado, es obviamente falso. ¿Independientes? ¿Cómo ignorar que eran hermanos, hijos de los mismos pa-

---

5. El dato preciso de aquel momento fue *1* en 8.543. Fue recogido de un estudio llamado "Confidential Enquiry for Stillbirths and Deaths in Infancy" (CESDI) realizado en bebés nacidos en cinco regiones de Inglaterra desde 1993 hasta 1996.

6. "Although we do not convict people in these courts on statistics… the statistics in this case do seem compelling."

dres? Ya sólo con ese dato, multiplicar esos dos números torna en casi *ridícula* la apreciación de Meadow.

Más aún: un estudio realizado por el profesor Ray Hill, del departamento de matemática de la Universidad de Salford, ofreció otros datos que contradecían lo que había sostenido Meadow en el juicio. Su conclusión: en una familia con dos hijos, la probabilidad de que habiendo fallecido uno también muera el otro es ¡uno cada 130.000! "Teniendo en cuenta que en Gran Bretaña nacen aproximadamente 650.000 niños por año —escribió Hill—, podemos esperar que alrededor de cinco familias por año sufran una segunda muerte trágica en su núcleo familiar, si el primero de los bebés fallece debido al SMSL".

En resumen, la enfermedad, el SMSL, tiene un componente genético de manera tal que una familia que haya sufrido un caso de muerte de un niño por esas razones enfrenta un serio riesgo de que vuelva a suceder.

Además, habría que comparar la probabilidad de que dos niños mueran por esa causa, con la probabilidad de que la madre sea una *asesina serial*, que es aun muchísimo menor; luego tendría que suceder que una asesina serial *mate a dos niños* y, para hacer todo aún menos probable, esos dos niños ¡tendrían que ser sus hijos! Este es otro caso típico de lo que se llama 'la falacia del fiscal'[7].

Afortunadamente varios matemáticos especialistas en estadística, enterados de lo que había sucedido, irrumpieron en la escena poco menos que *zapateando arriba de la mesa*. Un artículo publicado en el *British Medical Journal*, una de las más prestigiosas revistas británicas sobre medicina, llevó el título: "¿Convicta

7. Ver el artículo "Falsos Positivos" que salió publicado en *Matemática para todos*, Buenos Aires, Sudamericana, 2012, páginas 46-50.

por un error matemático?”. Pero no fue suficiente. Sally Clark perdió su apelación y fue presa. Allí fue donde el propio presidente de la Real Sociedad Estadística de Inglaterra le escribió al presidente de la Camara de los Lores y jefe de la Administración de Justicia en Inglaterra (y Gales) y le dijo escuetamente: “El número **‘uno en setenta y tres millones’ es inválido**”[8]**.**

Finalmente, en el año 2003, en la segunda apelación, cuando ya se había montado una campaña en toda Gran Bretaña para liberarla, Sally Clark fue dejada en libertad. Eso no fue obstáculo para que cuatro años más tarde, con su condición anímica totalmente deteriorada, ella misma se quitara la vida. Ya había dado a luz a un tercer hijo pero no lo vería crecer. Sally había escrito que si “ella hubiera formado parte del jurado y le hubieran presentado el caso como hizo el fiscal, ella habría votado como ellos. ¡Pero soy inocente!”.

Usando el mismo argumento, la justicia inglesa *revisó* los casos de otras tres mujeres que habían sido condenadas de por vida por haber —supuestamente— asesinado a sus hijos. Las tres quedaron en libertad.

Este ejemplo, del cual sólo he contado una brevísima parte para ahorrarme (y ahorrarles) todos los capítulos *amarillos* y *escabrosos*, merece una reflexión final: la matemática es *indispensable hoy* para avanzar en casi cualquier campo, elija el que elija. Pero *juntar datos* es insuficiente: después hay que saber *interpretarlos*, y para hacerlo es necesario convocar a personas que estén acostumbradas y entrenadas. No se trata de que sean *personas especiales* (los matemáticos son tan *especiales* como cualquier otro), sino personas *educadas*.

8. “The number ‘one in seventy three million’ is **invalid**.”

Tosca y la Teoría de la Cooperación

Es curioso cómo en las oficinas o en otros lugares de trabajo lentamente desaparecen las hojas de una resma, o las biromes, o los lápices, o las cucharitas para el café... en fin, los elementos comunes y no muy caros, que solemos compartir con nuestros compañeros de tareas. Digo que es curioso cómo a medida que va pasando el tiempo, más allá del uso *normal*, las cantidades empiezan a bajar... más de lo esperable, más de lo que se debería estar consumiendo por razones de trabajo. Es así: ¿quién va a notar que falta una birome que *otro* terminó llevando a su casa? ¿Quién terminará advirtiendo que se ha usado mucho más papel del previsible? ¿Y los que se llevan los diarios?

Estos ejemplos, menores por cierto, ponen en evidencia que cuando se trata del bien común, no siempre estamos dispuestos a cooperar. Evito poner ejemplos más desagradables, pero imagine lo que sucede con los baños públicos y tendrá una idea más o menos clara de lo que estoy hablando.

La Teoría de Juegos, una rama de la matemática que ha tenido un auge sorprendente en las últimas décadas, se ocupa de estudiar situaciones del tipo que figuran anteriormente. Por supuesto, no me refiero a problemas triviales, pero sí a cuestiones que pueden desatar un divorcio o incluso una guerra. La idea no es decidir *quién* es el que tiene razón, sino buscar un acuerdo que deje 'satisfechas' a las partes. Por supuesto, en un mundo ideal, de Walt Disney, cada uno de los contendientes querría quedarse con todo. Pero así no funciona la vida real. No se trata de discutir quién rompió las promesas que hizo, quién fue el que hizo trampa, quién es el o la que no cumplió con la palabra... se trata de encontrar la mejor *estrategia* para que todos no salgan perdiendo 'todo'.

Hay una parte de la Teoría de Juegos que exhibe los beneficios de la colaboración antes que la competencia, la cooperación antes que la confrontación. ¿Por qué no queremos cooperar? ¿Por qué nos cuesta tanto *ceder* una parte para el beneficio del todo? Está claro que nacemos egoístas. Basta ver lo que sucede con la conducta de los niños (como nos pasó a todos, estoy casi seguro, a usted y a mí): en cuanto alguien nos pide que compartamos un juguete (ni hablar con una hermana/hermano) se genera un drama y un escándalo. Recuerdo cuando mi padre me regaló mi primera pelota, yo me la llevé a mi habitación para jugar solo. Según me cuentan, me costó mucho trabajo entender que la pelota era para que jugáramos *todos* con ella.

La *cultura* nos hace aprender a *ceder*. Pero esencialmente, uno no quiere compartir. Los niños quieren *todo* para ellos y en el momento que *ellos* lo deciden. Tolerar o coexistir con una frustración es quizás la parte más importante y difícil de cualquier aprendizaje. Convivir en sociedad obliga a *ceder* todo el tiempo. Un extraordinario ejemplo lo presenta Garrett Hardin en un trabajo del año 1968 llamado "Tragedy of the Commons" ("La Tragedia de los Comunes"), en donde un grupo de pastores comparten una porción de tierra para hacer pastar sus vacas. Cuando cada uno de ellos consigue una vaca más, la incorpora al grupo de vacas que están en el predio. Naturalmente, cada pastor usufructúa de los beneficios de cada vaca extra, pero al mismo tiempo, al aumentar la población de bovinos, como la incorporación no está regulada y todos sacan provecho del bien común, las vacas son cada vez más, cada vez tienen menos pasto, cada vez comen peor, hasta que ya no alcanzan más los alimentos. No es que ninguno haya querido adrede afectar el bien común, sólo que la falta de cooperación terminó obrando negativamente en contra de todos.

Llevarse una birome o una resma de papel o cualquier equivalente suena entre gracioso y pueril como ejemplo, pero si uno lo cambia por tierra, zona pesquera, petróleo, árboles, etc., entonces la situación tiene otra cara. La Tragedia de los Comunes ofrece el costado destructivo cuando algunos cooperan pero otros piensan en forma egoísta para mejorar individualmente y no protegen el bien de todos. Si uno cruza la línea buscando su beneficio personal, es poco probable que afecte en forma sustancial el interés de todos, pero a medida que cada uno va cruzando la valla, advirtiendo que aquellos que 'trampean' a la cooperación lo hacen sin que medie ningún castigo y se benefician por encima del promedio de la población, la situación se transforma en inestable y *todos* pierden.

¿Cuántas veces en la vida real nos vemos involucrados en una disputa, en un dilema en el que creemos tener toda la razón y sin embargo no nos queda más que aceptar un compromiso en 'la mitad del camino'? El fastidio que eso genera nos empuja a *no pensar con claridad* o directamente a *no pensar*. Las decisiones las tomamos impactados por la emoción que termina distorsionando incluso nuestro mejor interés. Sería mucho mejor coordinar una estrategia que nos permitiera optimizar el resultado, pero es muy difícil de conseguir porque requiere algo así como 'pactar con el enemigo' o con el 'supuesto' enemigo: es preferible *cooperar*.

¿Difícil, no? Pero cuando las dos partes usan la misma 'lógica', es posible *no perder* todo, sino llegar a un *acuerdo*. Sin embargo, si las dos partes que se oponen prefieren 'ganar todo', lo más probable es que 'se queden sin nada'.

Hay un ejemplo clásico que ha sido recogido y reconocido largamente por la literatura. No importa cuán cercano o lejano esté usted de la ópera. Estoy casi seguro de que alguna vez escucho hablar de Tosca. No importa tampoco que usted no conozca el argumento y por eso quiero hablar de él brevemente en estos párrafos y mirar como Puccini, cuando la escribió, debió haber tenido en cuenta varios aspectos de lo que hoy se llama la Teoría de Juegos.

Justamente Tosca es el nombre de la heroína. En un momento determinado se enfrenta a una decisión desesperada: su amante, Cavaradossi, ha sido condenado a muerte por Scarpia, el corrupto jefe de la policía. Scarpia tiene la idea de *quedarse* con Tosca ni bien Cavaradossi muera acribillado.

Así las cosas, casi sin proponérselo Tosca queda a solas con Scarpia. El policía tiene un plan preconcebido. Le propone a Tosca un trueque: si ella acepta acostarse con él, Scarpia se compromete a que el batallón que habrá de fusilar a Cavaradossi la mañana siguiente, use *balas de fogueo*, algo así como si fuera un 'simulacro de fusilamiento' pero que en realidad terminaría salvándole la vida al condenado a muerte. Tosca duda. ¿Qué es lo que le conviene hacer?

Mientras piensa el camino a seguir, Tosca advierte que arriba de la mesa hay un cuchillo. Eso le permite especular con la posibilidad de ganar en los dos frentes: aceptar la propuesta de Scarpia, esperar que él de la orden para 'simular' el fusilamiento pero, cuando lo tenga cerca, clavarle el puñal hasta matarlo.

Lamentablemente para ella, Scarpia había pensado lo mismo.

Es decir, ideó una estrategia que le permitiría a él *quedarse con todo*: tendría su encuentro amoroso con ella, pero nunca daría la instrucción a la que se había comprometido. Es decir, le haría creer a Tosca que ordenaría que las balas no tuvieran poder de fuego, pero en forma encriptada le diría a la persona a cargo del fusilamiento que no dudara en matar a Cavaradossi.

Los dos avanzan con sus ideas. Scarpia muere apuñalado por Tosca y Cavaradossi muere fusilado.

Cuando Tosca descubre lo que pasó, ella misma se arroja desde las alturas del castillo y termina suicidándose.

Como suele suceder en la mayoría de las óperas, resultan *todos* perdedores. Pero en la vida real también ocurre lo mismo. Buscar ideas de este tipo, abstraerlas y pensar entonces cómo funcionamos los humanos ante determinadas situaciones es lo que nos hace *entendernos mejor como sociedad*.

Eso fue lo que el matemático canadiense Albert Tucker describió ante un grupo de psicólogos cuando los participantes quedan entrampados en lo que los que se dedican a la Teoría de Juegos llaman 'El Dilema del Prisionero'[9].

La Teoría de Juegos se mantiene al margen de hacer juicios morales o éticos. Ninguno se detiene a criticar la avaricia o egoísmo de cada parte: la ciencia no pasa por ahí. Se trata de aceptar que existe y exhibirla como una gran *trampa* que inexorablemente termina en una catástrofe. Si uno puede impedirla y mostrar el beneficio de la cooperación para evitar la autodestrucción, la tarea estará cumplida.

---

9. El Dilema del Prisionero es uno de los problemas clásicos de la Teoría de Juegos. Hay abundantes versiones de él en la literatura dedicada al tema. Una posible presentación del problema apareció en *Página 12* del día 5 de mayo de 2006.

Cinco millones de libros

En la era digital se pueden hacer cosas maravillosas, impensables hace nada más que diez años. Podría exhibir múltiples ejemplos, y estoy seguro de que cada persona que haya leído la frase anterior tendrá su propio conjunto (de ejemplos) favorito.

Esta presentación tiene un objetivo. Me quiero detener en un episodio que ha merecido sólo una atención tangencial/marginal en los medios y quizás con razón, no lo sé. Pero lo que sí sé es que a mí me impactó *mucho.* Me refiero al intento de digitalización de *todos* los libros que se han escrito hasta nuestros días. Lo quiero escribir otra vez, para darle tiempo a que usted pueda pensar la frase: se trata de digitalizar TODOS los libros que se escribieron en la historia de la humanidad.

Después de un instante de descanso y antes de seguir, tengo una pregunta para hacerle: ¿cuántos libros cree usted que son *todos* los libros? Por supuesto se trata de imaginar un número aproximado, y encima 'dinámico', porque mientras usted lee y yo escribo, esa cantidad está cambiando continuamente. Con todo, la estimación ronda los 130 millones en los últimos 600 años. Como era previsible... son muchos.

Hay un proyecto que encabeza Google[10], conocido con el nombre de Proyecto Google Books ("Google Libros"). Cientos de personas que trabajan en Google están digitalizando desde el año 2004 las colecciones de 40 de las bibliotecas más grandes del mundo, así como los libros que directamente les envían las editoriales.

Por supuesto, el proyecto de Google se complementa con lo que ya sucede en internet. Indexar y agrupar *todas* las páginas web, si bien es una tarea ciclópea, no tiene la antigüedad que ofrecen los libros, y además, ya está todo en formato digital. De cualquier forma, ¿de cuántos años estaríamos hablando? ¿Veinte? Digamos veinticinco para fijar las ideas. Pero el libro como tal, en forma articulada existe desde 1.440, cuando Johannes Gutenberg[11] *inventa* la imprenta y a partir de ese momento, el mundo, como tal, produce un salto de calidad imposible de mensurar (al menos por mí). Pero desde que existe imprenta, la palabra escrita se masificó y la cultura comenzó a estar al alcance de todos. Sé

---

10. Una observación que me parece importante hacer en este punto. En algunos lugares en donde aparece *mi* currículum, se menciona que yo trabajo y/o trabajé para Google. Ese dato es *falso*. Por lo tanto, me siento totalmente libre para poder opinar sobre la empresa, sin que medie ningún tipo de conveniencia ni económica ni profesional. Conozco muchísima gente que trabaja en Google, no solamente en la Argentina, sino también en los Estados Unidos, pero ni trabajo ni nunca trabajé para Google. Algo más: tengo una profunda admiración y respeto por lo que han hecho y hacen en distintos campos de la informática, y por el impacto profundo que han producido en nuestras vidas (al menos en las de los privilegiados como yo que tienen/tenemos acceso virtualmente en forma instantánea a la información... o sea, al 'poder').

11. Una observación de Juan Sabia: "El libro en realidad existía desde mucho antes. Lo que inventó Gutenberg fue la imprenta de tipos móviles, pero antes se hacían libros con planchas de madera, que eran obviamente muchísimo más caros, pero libros... había desde antes".

que esto es una suerte de fantasía, porque *no todo el mundo tiene acceso a alfabetizarse*[12], pero en todo caso, lo que pretendo decir es que desde ese momento, las herramientas de comunicación ya estaban disponibles.

Hasta marzo del año 2012, ya llevaban digitalizados más de 20 millones de libros. Por un lado, conservar los libros en formato digital permitirá inmortalizarlos, y nunca más habrá que preocuparse de 'restaurarlos' o 'preservarlos' de las potenciales inclemencias climáticas o del deterioro natural producto del paso de los años: los bits no envejecen[13]. Por otro lado, tener semejante cantidad de datos en forma digital, permite hacer análisis impractibles de cualquier otra forma. ¿A qué me refiero?

En el año 2007 Jean-Baptiste Michel (matemático e ingeniero francés) junto a Erez Lieberman Aiden (también matemático pero de origen norteamericano), ambos profesores en Harvard, implementaron un método para poder 'analizar' datos que podían extraerse de los libros. Obviamente, no se trataba de leer *todos* los libros sino que diseñaron un proceso que permite 'seguir el rastro' de algunas frases (de hasta no más de cinco palabras) para estudiar la evolución que han tenido en el tiempo. Las llamaron 'n'-gramas, en donde 'n' indica el número de palabras que forman la frase. Por ejemplo, una palabra aislada, cualquiera, "perro", pongamos por caso, es un '1'-grama. "La República Argentina" es un '3'-grama, etcétera.

Tanto la gente de Google, encabezados por Peter Norvig y Jon Orwant, como Michel y Aiden, redujeron el número de libros a

---

12. Aspiro a que sea sólo algo temporal, y que algún día no muy lejano respetemos como sociedades los derechos humanos inclaudicables de estar *todos* educados, bien alimentados, sanos, con trabajo y bien vestidos.

13. En todo caso, lo que envejece es el 'soporte' digital.

5.195.769 (casi 5 millones 200 mil libros), lo que implica aproximadadamente un 4% del total de libros publicados. Lo hicieron con la idea de desprenderse de todo el *ruido* por los errores, malas transcripciones, lugares en donde la tinta estaba borrosa, etc. Igualmente, el resultado termina siendo espectacular.

Una vez que tuvieron esa base de datos descomunal, se propusieron el siguiente organigrama con las palabras que figuraban en esos libros: contarlas, agruparlas, hacer comparaciones entre ellas, buscar patrones temporales de distribución, estudiar la frecuencia de su aparición, clasificarlas, catalogarlas, analizarlas. Y con los resultados, publicaron un trabajo que apareció en la revista *Science*[14] en enero del año 2011, que de hecho es la fuente principal de este artículo y hoy, el *paper* de Michel y Aiden es consultado por lingüistas, epistemólogos e historiadores (entre otros científicos).

Los datos contienen más de 500 mil millones de palabras, de las que 361 mil millones son en inglés, 45 mil millones en español y otro tanto en francés, 37 mil millones en alemán, 35 mil millones en ruso, 13 mil millones en chino y 2 mil millones en hebreo.

Los trabajos más antiguos se remontan al siglo XVI (en los años 1500) y llegan hasta el año 2008.

Obviamente, los datos no podrían nunca ser revisados por un humano. Dice Michel: "Si uno tratara de leer solamente los datos en inglés nada más que los que corresponden al año 2000, y

---

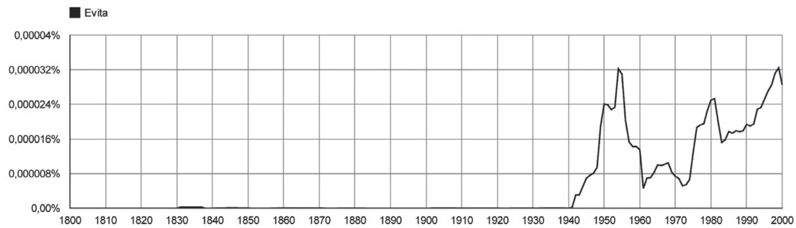
14. "Quantitative Analysis of Culture Using Millions of Digitized Books" ("Análisis cuantitativo de la cultura usando millones de libros digitalizados"), *Science*, 14 de enero de 2011, páginas 176-182, Jean-Baptiste Michel, Aviva Presser Aiden, Adrian Veres, el equipo de Google Books, Erez Lieberman Aiden, y otros.

pudiera leer a un paso de 200 palabras por minuto, sin interrupciones para comer o dormir, le llevaría 80 años. La secuencia de letras es *mil* veces mayor que la del genoma humano: si usted las escribiera todas en forma recta —con el tamaño de letra con el que está leyendo este texto— le permitiría llegar hasta la Luna, volver a la Tierra y hacer ese camino *diez veces*".

Por ejemplo, tanto Michel como Aiden muestran la incidencia que tuvieron los episodios de censura en el mundo sin necesidad de conocer ningún decreto que la impusiera. Por ejemplo, eligieron al famoso artista ruso-francés Marc Chagall (1887-1985) nacido en Liozna, en lo que hoy sería Bielorrusia. Como Chagall era de origen judío, al hacer el estudio de la aparición de su nombre en las publicaciones de origen alemán, se produce un bajón brusco, comparado con lo que sucedía en las escritas en inglés. Esa virtual 'desaparición' que duró casi 10 años, marca lo que los autores llaman el 'índice de supresión'.

Justamente, con el mismo sistema, aparecen en el artículo diversos nombres censurados en la literatura china, rusa pero también la norteamericana, especialmente los 10 autores y directores de cine que fueron virtualmente 'desaparecidos' entre 1947 y 1960 por las acusaciones que pesaban sobre ellos de ser 'simpatizantes comunistas'.

Yo hice la prueba poniendo Evita y es muy interesante observar la curva estrictamente creciente desde su irrupción en la política argentina, luego un bajón pronunciado y brusco en los años posteriores al golpe militar de 1955, para luego sí, volver a crecer hasta ubicarse en un nivel acorde con el impacto que produjo su vida.



Aiden y Michel *inventaron* una palabra para definir su trabajo: CULTURÓMICA ('culturomics', en inglés). La idea es replicar lo que la genética hace con la genómica. De la misma forma que el estudio del ADN revela patrones dentro de la biología, ambos sostienen que el enorme volumen de datos que provee la digitalización de los libros permitirá analizar y entender parte de la cultura humana.

Ahora quiero hacerlo participar a usted. Consígase una computadora con acceso a internet. Vaya hasta este link: http://books.google.com/ngrams y pruebe el sistema. Ponga por ejemplo dos palabras que quiera investigar/comparar, digamos SIDA y cáncer. Casi en forma instantánea aparecerán dos gráficos de colores diferentes, que muestran la 'evolución' de ambas palabras en los últimos dos siglos (XIX y XX) desde los años 1800 hasta 2000. Y lo mismo puede hacer en varios idiomas y con las palabras (o frases de hasta cinco palabras) que usted quiera. Se termina transformando en una adicción y se presta para intentar teorías que expliquen los resultados, algo que los científicos hacen en su tarea cotidiana.

El experimento es fascinante y si usted tiene tiempo y curiosidad, le sugiero que no se prive de intentarlo con algunas palabras que le despiertan alguna intriga. En definitiva, la posibilidad de avanzar en un trabajo de investigación está al alcance suyo (y mío): ¿cuántas veces tenemos oportunidad de hacer algo parecido sin tener que levantarse de la silla?

Yo intenté las siguientes experiencias. La/lo invito a que usted elija sus propios ejemplos.

Evita
Maradona
tristeza vs felicidad
dios (en español)
god (dios) (en inglés)
Marc Chagall en inglés
Marc Chagall en alemán
Perón
Alzheimer

¿Quién da menos?

Con la llegada de internet, las redes sociales, facebook, twitter, teléfonos inteligentes, el paisaje que nos rodea ha cambiado fuertemente en los últimos años. Y los acontecimientos se suceden tan rápido que no hay virtualmente lugar para respirar sin que aparezca algo nuevo.

Hace un poco más de un mes, comentaba con Juan Pablo Pinasco, matemático, profesor en Exactas-UBA sobre lo que había escuchado en la Universidad de Nueva York, a propósito de una forma sorprendente de realizar 'subastas' o 'remates'. Juan Pablo, quien trabaja en el equipo de producción de *Alterados por PI*, me dijo que no sólo estaba informado sobre el tema, sino que me podía dar muchas fuentes para investigar y me propuso que lo preparáramos para ofrecerlo en alguno de los programas cuando fuéramos a grabar en alguna de las escuelas del interior del país.

A partir de allí, me abrumó con datos, trabajos, antecedentes y recomendaciones. Me apuro a decir que cuanto más leo sobre el tema, más sorprendido estoy de la forma en la que funciona.

El sistema tiene varios costados desde donde abordarlo: el económico (ya que se trata de una forma diferente de tratar de *comprar* un objeto), el lúdico (porque hay azar y no hay garantías de éxito) y el matemático (por la forma en la que interviene la

Teoría de Juegos en la búsqueda de estrategias *ganadoras*). Si me permite la exageración, creo que es algo *revolucionario*. Le propongo que me siga.

Un breve resumen. Cuando usted piensa en una subasta o en un remate, ¿en qué piensa, qué es lo primero que se le ocurre? Creo que todos imaginamos una persona con una suerte de martillo que golpea en un atril con insistencia mientras habla en forma muy (muy) rápida. La idea es tratar de que los asistentes *compitan* entre ellos, elevando sus apuestas (u ofertas) en pos de conseguir el objeto que se remata.

Todo termina con el martillero golpeando la mesa tres veces consecutivas, decretando una oferta ganadora y alguien que se queda con un cuadro, con una escultura o incluso con un caballo o una casa…

¿Cómo podría alguien encontrar una variante a esto? Curiosamente sí, hay una variante posible. Es que el mundo digital ofrece herramientas que antes no podíamos imaginar ni siquiera en uno de nuestros sueños más salvajes. Fíjese cómo funciona.

Supongamos que se va a rematar un objeto cualquiera, digamos un televisor. En general, en los remates habituales las personas suelen estar sentadas en un mismo lugar geográfico enfrentados al 'martillero', quien es el que va conduciendo el remate y 'azuzando' al público, estimulándolo para que oferte cada vez más.

En el caso que voy a describir, nada de esto tiene que suceder. Los oferentes no tienen por qué estar ni en ningún lugar en particular y muchísimo menos todos juntos. La compañía dueña del televisor que se está por rematar hace un anuncio público del número de teléfono al que habrá que mandar un mensaje de texto con el dinero que uno está dispuesto a pagar por el televisor[15]. Por supuesto, cada mensaje de texto tiene un costo fijo (que reparten entre la empresa dueña del televisor y la compañía de teléfonos que presta el servicio).

Las ofertas pueden hacerse durante un tiempo determinado, por ejemplo, seis horas. Para fijar las ideas, supongamos que las ofertas se pueden hacer en incrementos de un peso, pero podrían ser en centavos o en cualquier denominación que se paute de antemano.

Una vez delimitadas todas estas cuestiones 'logísticas', aparecen las tres primeras preguntas:

- ¿cómo hace uno para ganar el televisor?
- ¿cómo hace uno para saber qué es lo que están apostando los otros?
- ¿cómo hace uno para *superar* la oferta de otro?

Las respuestas son sorprendentes: gana el televisor el que ofreció *menos* dinero. Sí, menos. La idea que uno tiene de *superar* la oferta de el o los otros funciona al revés: usted gana si ofrece *menos dinero*. Pero claro, falta un dato importante: la oferta *tiene que ser única*. ¿En qué sentido única? 'Única' en el sentido de que no puede haber ninguna otra persona que hubiera ofrecido la misma cantidad de dinero que usted.

Me explico: supongamos que las ofertas tienen que hacerse en 'saltos' de un peso. Por supuesto, recuerde que independientemente del ofrecimiento que usted haga, siempre hay que pagar un canon por el mensaje de texto que se envía. Ahora bien: es razonable pensar que si va a ganar el televisor *el que apuesta me-*

15. Hay otras variantes del mismo tipo de subasta que no requiere de enviar un mensaje de texto sino que se participa directamente por internet.

nos, entonces *todos* van a apostar el menor valor posible, o sea, un peso. Pero en ese caso, si hubiera dos o más personas que ofrecieran un peso, entonces ninguno de ellos va a ganar porque la oferta, si bien será la más baja, no será única.

Fíjese en el ejemplo que escribo a continuación. Supongamos que en un momento de la subasta, las ofertas estuvieran distribuidas así:

- 532 personas ofrecieron un peso;
- 138 personas ofrecieron dos pesos;
- 71 personas ofrecieron tres pesos;
- ninguna persona ofreció cuatro pesos;
- una persona ofreció cinco pesos;
- 114 personas ofrecieron seis pesos;
- ninguno ofreció ni siete, ni ocho, ni nueve pesos;
- una persona ofreció diez pesos... etcétera.

Relea los datos y fíjese si puede decidir —con las reglas que escribí anteriormente— quién ganaría el televisor.

Sigo yo. Hasta ese momento, la persona que ofreció cinco pesos sería la ganadora. ¿Por qué? Porque es la *más baja* de todas las ofertas en donde quien ofreció ese dinero (cinco pesos) lo hizo en soledad. Los que ofrecieron uno, dos y tres pesos, menos dinero que cinco pesos, no están solos. Cuatro pesos no ofreció nadie, por lo tanto no hay quien gane con ese precio. El primero que está solo es quien ofreció los cinco pesos.

Eso sí: si en el transcurso de la subasta, alguna otra persona envía un mensaje de texto ofreciendo cinco pesos también, instantáneamente ninguno de los dos ya ganará el televisor (al menos ofreciendo cinco pesos). ¿Quién pasará a ser el ganador? Si se fija en la lista, la persona que ofreció diez pesos pasaría a ser el ganador, porque es quien ofreció menos entre todos los que están en soledad.

Pero puede ocurrir que en el camino, alguien decida ofrecer cuatro pesos. Como advierte, esa persona pasará a ser la ganadora ya que hasta ahí nadie había ofertado cuatro pesos, y quien había ofrecido diez, si bien sigue estando solo, ahora perdió la categoría de tener la menor oferta entre las únicas.

En resumen, el remate de la '*menor oferta única*' consiste en:

- un objeto de alto valor se pone a disposición del público sin un precio 'piso'
- se establece de antemano si las ofertas tienen que ser en un número entero de pesos o si se aceptan centavos. De esa forma, se establece cuán cerca pueden estar dos ofertas
- la 'subasta' tiene un tiempo predeterminado
- cada ofrecimiento 'paga' un precio por entrar en la competencia que es el valor del mensaje de texto
- durante el período que dure la subasta, quien ofrece solamente sabe si está ganando o no con la oferta que hizo
- ninguno de los oferentes conoce el dinero ofrecido por otros salvo al final del ciclo
- cada persona puede hacer tantas ofertas como quiera (aunque esto es variable porque he visto casos en el que se limita a solo *nueve* ofertas alrededor de un cierto número)
- en el caso que no haya ninguna oferta única, el primero en ofrecer 'la menor' de todas, es el ganador

¿Cómo interviene la matemática en todo esto? Lanzados a la arena competitiva, la Teoría de Juegos también cumple un rol. Hay mucha gente dedicada ahora a investigar cuáles son las mejores estrategias a usar para poder ganar. Es decir, se trata de identificar buenas estrategias que permitan incrementar las chances de ganar limitando el riesgo.

Grupos de matemáticos, programadores, físicos e ingenieros han investigado miles de subastas tratando de descubrir los patrones con los que el público (nosotros, usted, yo) 'jugamos'. La idea es tratar de *entender y poder predecir* el comportamiento humano. Se trata de organizar la información de las ofertas incluyendo el precio ofrecido, cuándo fue ofrecido (respecto del tiempo límite para hacer ofertas) y cuántas apuestas por persona se hacen.

Hay ya muchísimos artículos publicados al respecto[16], pero quiero hacer referencia al que produjo el grupo que conduce Luis Amaral, profesor de ingeniería química y biológica[17]. La pregunta que se hicieron es: ¿quién gana en estas subastas, el que participa usando una estrategia o el que tiene más suerte? La respuesta fue que gana el afortunado (¿no es *siempre* así?). Pero con un detalle: el afortunado que aplica algún tipo de estrategia.

El estudio que realizaron involucra 600 subastas en donde intervinieron más de 10 mil participantes que hicieron más de 200 mil ofertas, especialmente en Australia y en Europa.

---

16. "Rationality, irrationality and escalating behavior in lowest unique bid auctions" ("Racionalidad, irracionalidad y desarrollo del comportamiento en los remates sobre la menor oferta única"), de Filippo Radicchi, Andrea Baronchelli y Luis A. Amaral, es el trabajo *insignia* publicado por la Biblioteca Pública en Ciencia (Public Library of Science) en enero del año 2012, pero hay muchísima literatura accesible a quien esté interesado: basta con *googlear* 'lowest unique bid' ('menor oferta única') para tropezarse con una catarata de trabajos publicados.

17. Amaral es profesor en la McCormick School of Engineering and Applied Science y también trabaja en el Early Career Scientist del Howard Hughes Medical Institute.

"Mucha gente piensa (y con razón) que es 'inteligente' y que tiene una ventaja por serlo", dice Luis Amaral, uno de los autores del trabajo. "Pero lo que no advierte es que compiten con personas que hacen lo mismo que él (o ella). La ventaja que tiene el uso de la estrategia se evapora entonces, y se transforma en un juego de azar."

La Teoría de Juegos se especializa —entre otras cosas— en abordar situaciones donde la ganancia de cada jugador no depende solamente de su comportamiento sino también de lo que hacen los otros. Este tipo de subasta es un problema clásico de la teoría en donde uno tiene *cierta* información y trata de *descubrir* o *conjeturar* lo que las otras personas van a hacer, y en función de esas conjeturas, elabora una estrategia supuestamente 'ganadora'.

Amaral y su equipo hicieron una simulación computarizada usando un programa que diseñaron a tales efectos y descubrieron que la mejor estrategia es hacer ofertas con valores muy cercanos entre sí en una *banda baja* (de poco monto) y después sí, pegar un 'gran salto' hacia un lugar en donde —uno conjetura— habrá poca actividad.

No sólo eso, sino que la mejor forma de describir el comportamiento humano fue comparándolo con lo que hacen las gallinas para alimentarse. Primero se concentran en una cierta zona, picoteando como pueden, pero después la competencia entre ellas las hace alejarse del resto y buscar en lugares no necesariamente cercanos sino más bien alejados del inicial.

Trasladado a este caso, los oferentes hacen sus apuestas en principio alrededor de valores muy bajos (digamos cercanos a los cinco o diez pesos), pero después, se producen saltos hacia la zona de los cincuenta y sesenta, como imaginando que allí hay un terreno inexplorado y con altas posibilidades de ganar.

No sé si este sistema de subastas y/o remates tendrá éxito, ni si se expandirá hasta infiltrar nuestras costumbres cotidianas, pero acceder a comprar un televisor por cuatro pesos o un departamento por cuarenta, es ciertamente una tentación. Para algunos, es irresistible. Para otros, es una nueva forma de *timbear*. "¿Quién da menos?"[18]

18. Me sugiere Gerardo Garbuslky que no deje de enfatizar que quienes organizan la subasta pueden ganar muchísimo dinero si hay muchos oferentes o participantes, ya que hay que *pagar* para hacer cada oferta. Esto no sucede en las subastas tradicionales.

Alfabetización, siglo XXI

Supongamos que se diera este diálogo imaginario:

—Para usted, ¿qué querría decir que una persona sea “alfabeta” o que esté “alfabetizada”? —pregunto yo.

—Una persona que saber lee y escribir —contesta usted.

—¿Seguro? —repregunto yo.

—Mmmmm, sí... seguro —sigue usted pero dudando un poco.

—¿Dudaría? Es decir, ¿contestaría usted que una persona se define *hoy* como alfabeta si sabe leer y escribir?

Creo que es fácil detectar que esa definición estaba bien hace cincuenta… o cien años, pero ¿y hoy? ¿Podría afirmar que una persona que *solamente sabe leer y escribir es una persona preparada para enfrentar la vida, como lo estaba hace un siglo?* Ciertamente son condiciones necesarias, pero ¿suficientes?

Lea con cuidado los siguientes dos párrafos (que involucran viajar desde la ‘a’ hasta la ‘z’) y yo la/lo reencuentro al final:

“Hoy nuestra sociedad está viviendo una nueva revolución, sólo comparable a hechos históricos como la invención de la imprenta:

a) teléfonos inteligentes,
b) libros electrónicos y lectores/tabletas para esos libros electrónicos,
c) comercio electrónico,
d) consolas de videojuegos,
e) centros de procesamiento de datos corporativos ‘en la nube’,
f) supercomputadoras para cálculos científicos,
g) fotografía digital,
h) edición de imágenes y edición digital de música,
i) audio y video on line,
j) navegación guiada por GPS,
k) robots que suplen a los humanos,
l) control de crucero adaptativo en automóviles,
m) sistemas de control en tiempo real en vehículos híbridos,
n) vehículos robotizados,
o) internet,
p) correos electrónicos (e-mails),
q) motores de búsqueda,
r) traducciones automáticas de lenguaje natural,
s) redes sociales,
t) imágenes médicas digitales,
u) cirugías asistidas por computadora,
v) análisis de datos a gran escala que permiten la medicina basada en evidencias y la nueva biología,
w) hojas de cálculo y procesadores de texto,
x) revoluciones en control de inventarios, cadenas de producción y logística,
y) códigos de barras creados automáticamente,
z) reconocimiento de voz.

Los que figuran en esta lista son algunos de los ejemplos más visibles."

Ahora, segundo párrafo: "Estos sistemas, herramientas y servicios pertenecen a un dominio muy vasto, que continúa creciendo, conocido bajo la denominación de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Pero estas tecnologías no se limitan a esas aplicaciones y son en gran parte responsables de la revolución de la biología molecular, con impacto en la salud y la alimentación, o de que muchas industrias hayan mejorado sus productos, volviéndolos más seguros y eficientes. Por ejemplo en la industria aeronáutica, el Boeing 787, conocido como Dreamliner, 20% más económico que los jets que lo precedieron, no se podría haber diseñado ni construido sin el concurso del software. Su predecesor, el Boeing 777, fue el primer avión cuya aerodinámica fue simulada completamente por computadora, sin la utilización de túneles de viento, y ha tenido apenas dos accidentes en 17 años de servicio. Las tecnologías de pronósticos meteorológicos descansan fundamentalmente en la potencia de cálculo y la eficiencia de los algoritmos programados para resolverlos".

Me detengo acá: estos dos párrafos fueron extractados de un informe que preparó la Fundación Sadosky[19] y están —en parte— inspirados en un informe presentado a Obama y miembros del Congreso norteamericano[20].

---

19. La Fundación Sadosky, tal como ellos se presentan en su página web, tiene por objetivo "promover la articulación entre el sistema científico-tecnológico y la estructura productiva en todo el ámbito de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), a través de distintos programas y proyectos orientados a mejorar la competitividad y hacer llegar los beneficios de las TIC a toda la sociedad".

20. Informe al presidente y al Congreso de los Estados Unidos: "Diseñando

Es obvio que hay muchísimo para debatir porque esto recién empieza, pero propongo de entrada sumarme a lo que está sucediendo en el mundo: ¡hay que enseñar a programar en las escuelas! Sí, a programar. Y cuando digo escuelas, me refiero a las escuelas primarias y secundarias.

La pregunta que yo quiero hacerle a usted (y me la hago a mí también) es: "¿Queremos *subirnos* al siglo XXI o no?". El propósito es empezar a discutir los cambios que debería sufrir (o disfrutar, para elegir un término mejor) el sistema educativo. Tal como está, no sólo atrasa, sino que corremos el peligro de quedarnos fuera de la nueva revolución. Y lo peor es que tenemos *todas* las herramientas para que eso no suceda.

---

un Futuro Digital". Investigación y desarrollo financiado con fondos federales en Tecnologías de la Información y Comunicación. Consejo Presidencial de Asesores en Ciencia y Tecnología. Diciembre de 2010.

Educación horizontal

Reunión de claustro en el departamento de matemática en Exactas, UBA. Muchos profesores históricos: Gentile, Santaló, Balanzat, González Domínguez, Villamayor, Herrera, Porta, Klimovksy, Larotonda. Todos pesos pesados. Seríamos entre 30 y 40. Supongo que habrán pasado más de 35 años, pero no puedo asegurarlo. Los más jóvenes, los que recién llegábamos a la fiesta, escuchábamos en silencio. Lista de oradores. Cada uno tenía cinco minutos para hablar. Obviamente, no me acuerdo de qué discutíamos, pero sí recuerdo que sucedió una cosa muy curiosa, algo que me marcó para el resto de mi vida.

Eduardo Dubuc es uno de los mejores matemáticos que ha dado la Argentina. Recién llegaba de un largo periplo (de muchos años) por Estados Unidos, Canadá, Europa y Australia. Volvió para quedarse y aún hoy sigue enseñando (y verdaderamente dictando cátedra) en nuestra querida facultad. Eduardo había pasado tanto tiempo fuera del país que era imposible determinar que era argentino, tal es la fluidez con la que hablaba tres idiomas: inglés, francés y obviamente, castellano.

Pero vuelvo a la reunión de claustro. La lista de oradores era cada vez más larga y los cinco minutos parecían un suspiro. Eduardo se anotó, supongo porque querría aportar algo en su primera participación. Cuando le tocó el turno, se paró en su asiento y dijo: "Voy a proponer algo, pero... *no sé si voy a estar de acuerdo con lo que voy a decir*".

Fue la primera vez en mi vida que escuché a alguien aportar algo en forma tan genial a una discusión. No se trataba de *ganar* el debate. Se trataba de *entender*. Y con ese afán, Eduardo estaba dispuesto a elaborar sobre un punto de vista que hasta ahí no había sido escuchado, pero que él quería que se discutiera. Y se ofreció (posiblemente sin hacer un análisis tan exhaustivo sobre su postura) a sostener una posición que no era necesariamente la que él creía que debía ser definitiva.

Punto. Y aparte.

Me gustaría poder ofrecer lo mismo en estas líneas. Voy a hacer una propuesta en este libro y, aunque no estoy muy seguro de estar de acuerdo con ella, necesito hacerla para iniciar un debate respecto de una *parte* de la educación.

Si usted retrocede algunas páginas[21], se encuentra con el siguiente texto:

> Es obvio que hay muchísimo para debatir porque esto recién empieza, pero propongo de entrada sumarme a lo que está sucediendo en el mundo: ¡hay que enseñar a programar en las escuelas! Sí, a programar. Y cuando digo escuelas, me refiero a las escuelas primarias y secundarias.

Bien. Me consta que hay mucha gente que está muy entusiasmada en distintas partes del mundo en iniciar ese debate, pero esa misma gente tropieza casi de inmediato con un problema muy serio: para enseñar a programar (o lo que fuere) hacen falta

21. Ver página 50.

dos partes: los que enseñan (que se supone que son los que saben) y los que aprenden (que, se supone también, que son los que *no* saben).

Una parte tenemos: los alumnos. Hasta allí vamos bien. Tenemos muchísimos. El problema que aparece es que faltan (o faltarían) '*los que saben*'. Esto sí que ya es (o lo parece) insalvable. Gente que sepa programar hay, pero no parecen suficientes para el número de alumnos.

La otra alternativa sería que los que 'saben', preparen a un grupo suficiente de docentes. De esa forma, en algunos años, tendríamos un plantel preparado para afrontar el desafío que presenta el número de alumnos. Pero como usted advierte, esto significaría que todos los que 'saben' abandonen virtualmente todo lo que están haciendo para dedicarse casi 'tiempo completo' a preparar a ese plantel de docentes. Y por otro lado, estos docentes tendrían que dedicar su vida a aprender a enseñar a programar.

No sé si lo digo bien, pero usted advierte que este plan parece *no sustentable*, y eso que ni siquiera quise hablar del tema de los recursos que harían falta, los económicos pero también las locaciones, el equipamiento, etcétera.

Bueno, acá va la idea entonces: ¿y qué pasaría si los alumnos y los docentes aprendieran juntos? Es decir, ¿qué pasaría si todos los días (otra vez, 'todos los días') los alumnos tuvieran en 'todos los colegios y escuelas del país' una hora en donde la educación se transformara en algo 'horizontal': todo el mundo aprendiera al mismo tiempo? Por supuesto, puede haber (o mejor dicho, debería haber) literatura suficiente (sencilla) para que entre todos intentaran resolver los problemas que allí están planteados. Algunos podrán un poco más. Otros un poco menos. Algunos necesitarán más ayuda, otros menos. Pero dentro de la misma escuela (o colegio), habrá grupos que podrán cooperar con los que tienen más dificultades. En ese caso, las diferencias de edades y de grados y de 'jerarquías', deberían quedar de lado.

¿Estamos preparados para eso? ¿Estamos preparados como sociedad para aprender "junto a" y "de" nuestros hijos? Con esta propuesta, estoy invitándola/lo a usted a que se incorpore al debate, y que no tome estas líneas como el *final* de nada, sino un aporte más. Así como se plantean las cosas en este siglo, con las redes sociales y la comunicación a través de las distintas plataformas (netbooks, laptops, notebooks, tabletas, teléfonos inteligentes, etc.), los niños merecen un método no convencional, algo que se 'corra' de la zona de confort que tenemos los adultos.

Entiendo que puede parecer un salto al vacío, pero me interesaría agregar algo más: si está de acuerdo y cree que puede hacer algo (en su escuela, en su comunidad, en su barrio) hágalo. Si está en desacuerdo, no hay problema, pero no lo descarte de plano sólo porque le parece ciclópeo, loco o porque está en contra de algún gobierno. Todos los gobiernos son transitorios. No importa de qué lado está usted, pero de lo que SÍ estoy seguro es que no está en contra de ofrecer la mejor educación para sus hijos y darles todas las oportunidades que quizás no todos tuvieron (como yo) el privilegio de disfrutar. En todo caso, será una forma más de *igualar hacia arriba*.

Y tal como empecé, no sé si estoy de acuerdo con lo que escribí[22].

---

22. Un comentario que me envió Carlos D'Andrea desde Barcelona: "Lo *superfuerte* que puede ocurrir implementando lo que proponés es que los alumnos en su gran mayoría aprenderán más rápidamente que los maestros (¡!). De hecho, en algunas escuelas acá en Barcelona, ya se implementa y funciona razonablemente bien que a los chicos de seis o siete años los dejen navegar tranquilamente por internet durante un rato y después tienen que contar a la clase lo que encontraron y/o aprendieron: los maestros aprenden de cosas que nunca oyeron en su vida". Agrego yo: ¡qué bueno!

2. LA BATALLA NAVAL MEZCLADA CON PASTILLAS, ARAÑAS Y MOSCAS

Amigos en una reunión[23]

Corría el primer día de junio del año 2013 y recibo un mail desde Barcelona. Lo enviaba Carlos D'Andrea, por lo que intuía que habría algunos problemas para pensar. Junto a Glenda Vieites (la editora), ya estamos en la 'recta final' decidiendo qué problemas publicaríamos en este libro. Me resulta muy difícil dejar 'historias' afuera, por lo que Glenda me estimula diciéndome que no me preocupe, que sería un libro 'más gordo', con 'más páginas'.

Si bien sus palabras me dieron coraje, igualmente me deja preocupado, porque ¿se imagina si usted le dijera a un niño: "¿Eso es todo el helado que comiste? ¡Comé más, no te preocupes!". Bueno. Así me siento yo cuando Glenda me 'abre la canilla', y me dice que escriba más o que incluya más en el futuro libro. Y eso hace que algunas ideas que andan dando vuelta en mi cabeza se puedan plasmar ahora. Y justo cuando estaba por revisar en mi computadora, que es donde guardo todo lo que fui pensando a lo largo del año y creo que valdría la pena publicar, se juntan estos dos episodios:

---

23. La idea original de este problema es de Peter M. Higgins, autor del libro *Mathematics for the curious* ("Matemática para los curiosos"); sin embargo, la recibí a través de una propuesta de Carlos D'Andrea, doctor en matemática egresado de Exactas, UBA, y hoy profesor en la Universidad de Barcelona.

Glenda me pide más material.
Carlos D'Andrea me ofrece material.

Como ustedes advierten, un *combo* ideal. Bueno, me dije, aquí va el problema que me envió Carlos D'Andrea:

"Suponga que usted ingresa a una reunión. No importa cuánta gente hay o cuánta gente va a concurrir. Lo importante es que usted está adentro. Lo único que vamos a suponer también es que usted no está solo. Es decir, hay por lo menos *otra persona* además de usted. ¿Cómo se puede *demostrar* que en la reunión hay *siempre, al menos* ***dos*** *personas* que tienen la misma cantidad de amigos presentes?".

Es decir, lo que uno tiene que comprobar, convencerse y convencer a cualquiera que le pregunte, es que en cualquier reunión (que conste de al menos dos personas), *siempre* tiene que haber al menos *dos personas* que tengan la misma cantidad de amigos[24] presentes.

Ahora le toca a usted.

Respuesta

Una sugerencia: piense qué pasaría si hubiera pocas personas en la reunión. Empiece con dos, con tres, con números pequeños, y después trate de ver si el argumento que utilizó para descubrir lo que pasa en esos casos, lo puede utilizar para casos más numerosos o incluso el caso 'general'.

Veamos. Supongamos que hubiera exactamente dos personas: usted y alguien más. Evidentemente, o bien ustedes dos no se co-

---

24. Se entiende que si A es amigo de B, entonces B es amigo de A. O sea, la relación de amistad es recíproca.

nocen (en cuyo caso los dos tienen el mismo número de amigos (cero)), o bien eran amigos de antes, en cuyo caso los *dos* tienen el mismo número de amigos: uno.

Si ahora hubiera tres personas, ¿podría pasar que los tres tengan dentro de la reunión un número de amigos distinto? Exploremos esto.

Por ejemplo, si los tres tuvieran *un número distinto de amigos dentro de la reunión*, ¿qué querría decir? Como cada uno *no puede ser amigo de sí mismo*, entonces las posibilidades para cada uno son: 0, 1 y 2. O sea, como son tres personas, y las tres tendrían que tener números de amigos distintos (ya que si no, estaría probado lo que queremos), entonces tiene que haber alguno que tenga *cero* amigos, otro *un amigo*, y el restante, *dos amigos*.

¿Será posible esto? Es que si hay alguien que tiene *cero* amigos entre los tres, quiere decir que no conoce a los otros dos. Pero si al mismo tiempo, *uno de ellos tiene* ***dos*** amigos, forzosamente tienen que ser *¡los dos que están en la reunión!* Es decir, o bien el que dijo que no tiene ningún amigo SÍ tiene alguno, o bien el que dijo que tiene *dos* está equivocado. O sea, ¡no se puede dar que haya alguien que diga 0 amigos y otro que diga 2 amigos!

Como no hay otra posibilidad, inexorablemente *tienen que repetir el número de amigos y listo*.

¿Qué pasaría si hubiera *cuatro* personas en la reunión? Otra vez, ¿podría ser que *todos* tuvieran un número de amigos diferente? Es decir, deberían tener 0, 1, 2 y 3 amigos respectivamente. Pero igual que antes, *no puede ser que haya uno que diga que no tiene ningún amigo y otro que diga que tiene* 3. Porque el que tiene 3 tiene que ser amigo de TODOS los que están en la reunión. O sea que como no pueden figurar el número 0 y el número 3 al mismo tiempo, inexorablemente tiene que repetirse alguno de los números y eso es justamente lo que queremos demostrar: que tiene que haber al menos *dos de los participantes* que tienen el mismo número de amigos.

¿Advirtió usted cómo *generalizar* este argumento? Es decir, en los dos ejemplos que escribí anteriormente, utilicé el *mismo argumento: ¡que no puede haber una persona que diga que tiene cero amigos y otra que diga que todos los que están en la reunión son amigos!* Por lo tanto, tiene que haber al menos dos personas que tengan el mismo número de amigos.

Con esta idea en la cabeza, trate usted de demostrar qué pasaría si hubiera *diez* personas en la reunión.

Sigo yo: si hubiera diez personas, ¿podría ser que *todas* tuvieran un número distinto de amigos dentro de la reunión? Con la misma idea que antes, ¿cuáles son los números posibles de amigos que cada uno puede tener? 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. O sea, si distribuyéramos estos números entre las diez personas, cada uno tendría un número diferente de amigos. Pero *esto sería imposible*, porque no puede ser que haya alguna persona que diga que tiene *cero* amigos y otra que diga que tiene *nueve (o sea, todas las personas que están en la reunión, salvo él)*. Esa contradicción muestra que *no pueden estar distribuidos esos números entre las diez personas, y por lo tanto, algún número, por lo menos, se tiene que repetir*, y eso prueba que dos tienen el mismo número de amigos.

¿Me siguió hasta acá? El caso general es relativamente sencillo si uno 'mira' lo que hicimos en los casos anteriores. Se trata sólo de ver que si uno tiene *n* personas en una reunión, ¿cómo podría darse el caso de que *todos* tuvieran un número de amigos/conocidos diferente entre los presentes? Si así fuere, entonces si cada una de las personas participantes de la reunión llevara un cartel que indique cuántos amigos tiene, los números que figurarían en los carteles serían: 0, 1, 2, 3, 4, 5,..., (n-2) y (n-1).

Pero igual que en el caso de *diez* personas, por ejemplo, no puede ser que haya alguno que diga que tiene *cero* amigos y otro que tenga (n-1). Si no, uno sería amigo de todos y otro no sería amigo de nadie. Pero el que dijo que es amigo de todos, en particular es amigo del que dijo que no tenía amigos. Y eso es lo que no puede suceder.

Moraleja: en toda reunión, no importa cuánta gente haya, *siempre* tiene que haber al menos dos personas que tengan el mismo número de amigos.

Batalla Naval

En mi paso como alumno de colegios primarios y secundarios, la variedad de juegos que estaban a nuestra disposición era muy limitada. Es decir, yo creo que en ese momento no me daba cuenta, pero ahora, viendo la cantidad de plataformas posibles, advierto que teníamos posibilidades muy restringidas. Eso sí, éramos felices igual.

De todos los entretenimientos a los que podíamos recurrir, que no fuera durante un recreo sino mientras estábamos en los bancos (hora libre, condiciones del tiempo que hacían imposible salir al patio, etc.), hubo uno que nos tenía muy ocupados: 'la batalla naval'. No sé si aún se sigue jugando (dudo que sea con la misma intensidad), pero para los que nunca escucharon hablar de ella hago una breve descripción: intervienen dos participantes. En una hoja cuadriculada, cada uno dibuja un cuadrado de 10 × 10.

Cada jugador tiene un número de 'barcos' (formados por 'cuadraditos') que distribuye en ese 'tablero' de 10 × 10. Los barcos consisten en rectángulos de 1 × 1[25], 2 × 1, 3 × 1, 4 × 1 y 5 × 1 (o también de 1 × 2, 1 × 3, 1 × 4 y 1 × 5). De esta forma, los

25. Aunque parezca equivocado, un *cuadrado* de lado 1 × 1 es un caso particular de rectángulo. De hecho, todo cuadrado es un caso particular de rectángulo, en donde el largo y el ancho son el mismo.

barcos pueden ser dispuestos en forma horizontal o vertical. Además, puede que haya varios de la misma longitud, pero eso forma parte de las convenciones particulares del acuerdo con el que lleguen los dos jugadores antes de competir.

El cuadrado dibujado en la hoja cuadriculada está marcado como un mapa. Es decir, en la parte horizontal, cada columna está etiquetada por una letra. Estas letras van desde la A hasta la J, mientras que cada fila, lleva un número que van desde el número *uno* hasta el *diez*.

Una vez que cada uno distribuyó sus barcos, el juego empieza cuando uno de los participantes trata de identificar alguno de los cuadraditos del rival, imaginando que allí hay un barco del oponente.

Si en esa posición, digamos E4 (ver figura 1), no hay ubicado ningún barco rival, entonces éste contesta diciendo: 'agua'. Eso indica que en esa posición no hay más que agua. En cambio, en el lugar E5 hay parte de un barquito. Por lo tanto, el jugador contesta: 'tocado' (si es que el *disparo* del rival coincide con un lugar ocupado por uno de los *barcos*, pero *no es* ***todo*** el barco) y 'hundido', si con ese 'tiro' el barco ha sido tocado en todos sus cuadraditos, como se ve en la figura 1 en el lugar B3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2						★	★	★	★	★
3		★								
4			★							
5			★		★					
6			★		★					
7	★				★					
8	★									
9										
10										

Fig. 1

¿Por qué estaré contando todo esto? Porque me interesa mostrar cómo la matemática interviene también en este tipo de juegos. ¿De qué manera?

Fíjese si está en condiciones de pensar (y luego contestar) este problema.

Suponga que usted tiene nada más que *un solo barco* de 1×4 o de 4×1 y lo depositó en alguna parte del cuadrado. ¿Cuál es el mínimo número de *tiros* que una persona tiene que arriesgar para poder *garantizar* que *tocó* a ese barco?

Es decir, supongamos que estamos jugando usted y yo. Usted colocó su barco de 1×4 (o de 4×1) en el tablero. ¿Cuál es el *mínimo* número de tiros que yo tengo que hacer para garantizarme que *con seguridad* toqué su barco?

Naturalmente, poder conocer este resultado, permite elaborar una estrategia de cómo jugar, aunque estoy seguro de que ningún chico ni hoy ni nunca necesitó plantearse esta pregunta. ¿O sí?

Respuesta

Tome el tablero de 10×10, y piense en todas las posibles ubicaciones que puede tomar ese barco de 1×4 o de 4×1. Empecemos por imaginar los barcos puestos en forma 'vertical'. Tome por ejemplo la primera columna, la columna A. Si yo digo A4, y usted me contesta 'agua', ya garantizo con un tiro que su barco *no puede estar ubicado* además, encima de los cuadrados A1, A2 y A3. O sea, con un solo tiro yo me aseguro de que su barco no esté ubicado encima de cuatro cuadraditos. En forma simétrica, si yo arriesgo diciendo D1, y usted dijera 'agua', entonces ahora sé que su barco *no está además* sobre los cuadraditos de la fila 1 que llevan la etiqueta A1, B1 y C1. De la misma forma sigo hacia abajo en la columna A, y digo A8. De esa forma, o bien *toqué* su barco (en cuyo caso se terminó el problema), o bien usted me dice 'agua'. Pero si así fuere, como ya descartamos A1, A2, A3 y A4, entonces eso significa que su barco no puede estar ubicado ahora ni en A5, A6, A7 y A8.

De esa forma, con dos tiros, hemos eliminado *toda* una columna. En forma simétrica, como ya hice con D1 (y al usted decir 'agua' me permitió eliminar A1, B1, C1 y D1), ahora, tirando H1, o bien 'toco' su barco, o bien eso significa que no puede estar encima de E1, F1, G1 y H1.

Como usted advierte, entonces, con cuatro tiros (A4, A8, D1 y H1) hemos eliminado 19 casillas (es que la casilla A1 está contada dos veces, una en tanto miembro de la fila 1 y por otro, como integrante de la columna A).

Como usted advierte, entonces, con cuatro tiros (A4, A8, D1 y H1) hemos eliminado 19 casillas: la columna A completa (10 casillas) y la fila 1 completa (10 casillas). Como estoy contando la casilla A1 dos veces por ser parte de la fila 1 y la columna A, quedan eliminadas 19 casillas y no 20.

Ahora quiero avanzar, tratando de replicar esta estrategia para el resto de las filas y columnas. Fíjese en la figura 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4	★	★	★	★	★	★	★	★	★	★
5										
6										
7										
8	★	★	★	★	★	★	★	★	★	★
9										
10										

Fig. 2

Si yo 'tirara' A4, B4, C4, D4, etc., hasta completar *toda* la fila 4 y lo mismo con A8, B8, C8, D8, etc., hasta completar la fila 8, habría utilizado 20 tiros. Eso sí: quedarían eliminados todos los posibles barcos *¡puestos en forma vertical!* Sin embargo, quedarían aún muchísimas posibilidades 'abiertas' para barcos desplegados en forma horizontal. Por ejemplo, yo no podría detectar con esos 'tiros' un barco ubicado en B2, C2, D2 y E2 o un barco dispuesto en F7, G7, H7 e I7.

¿Qué hacer? Para evitar los barcos dispuestos en forma *horizontal*, podría ahora extender lo que hice antes con D1 y H1 a las distintas filas. Debería tirar entonces D1, H1, D2, H2, D3, H3, etc., hasta completar las columnas D y H, como se ve en la figura 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				★				★		
2				★				★		
3				★				★		
4				★				★		
5				★				★		
6				★				★		
7				★				★		
8				★				★		
9				★				★		
10				★				★		

Fig. 3

Utilizaría entonces otros 20 tiros, pero parecen *demasiados*. ¿No habrá alguna forma de *combinar* la estrategia que sirve para descubrir la posición de los barcos en las columnas y en las filas simultáneamente?

La respuesta es que sí, se puede (¿quiere pensarlo usted en soledad?). La idea aparece en la figura 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				★				★		
2			★				★			
3		★				★				★
4	★				★				★	
5				★				★		
6			★				★			
7		★				★				★
8	★				★				★	
9				★				★		
10			★				★			

Fig. 4

Si usted recorre tanto las filas como las columnas, verá que no hay posibilidades de insertar un barco ni horizontal ni verticalmente, sin 'apoyar' alguna parte en alguna de las cruces. Esta distribución resulta ser 'exhaustiva' en el sentido de que inexorablemente uno descubre en qué posición está el barco. Si ahora uno cuenta el número de 'tiros' que tuvo que hacer, descubre que esta estrategia requiere de 24 tiros.

La pregunta que surge entonces es: ¿habrá algún número menor de tiros con el cual se obtenga el mismo resultado? Es decir, ¿será 24 el *mínimo* número que garantice que uno descubra la posición del barco? ¿O es que se podrá elaborar una estrategia de cómo tirar *menos* de 24 tiros y que permita descubrir el barco no importa en qué posición fue ubicado?

Para mostrar que 24 es el mínimo, entonces, habría que encontrar una configuración tal que sean necesarios los 24 tiros para poder encontrar el barco, porque con menos no será posible. ¿No le dan ganas a usted de pensar si es posible hacerlo? Mientras tanto, yo continúo.

La respuesta la encontrará si mira la figura 5.

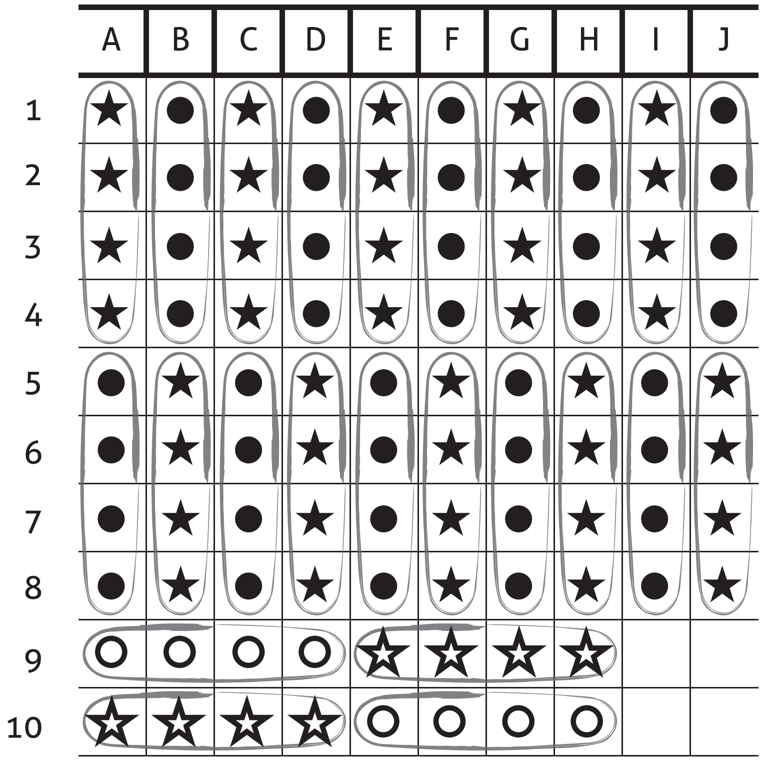


Fig. 5

Esta distribución de barcos de la figura 5 sirve para convencerse de que son necesarios los 24 tiros para poder descubrirlos[26].

26. Una observación preciosa de Juan Sabia. Uno sospecharía que como en el tablero (o la grilla) hay 100 cuadraditos, entonces debería ser posible distribuir 25 (veinticinco) barquitos de 1x4 o de 4x1. Sin embargo, como recién demostramos que con 24 tiros uno 'barre' todo el tablero, no puede haber 25 barcos. Si se pudieran ubicar 25 barcos, no deberían ser suficientes 24 tiros para descubrirlos todos. Es decir, aunque 'en teoría' deberían caber 25 barcos (porque parece como que debería haber lugar suficiente), en realidad ¡no se puede!

Moraleja: hemos diseñado una estrategia (la que aparece en la figura 4) que permite detectar con 24 tiros *cualquier* ubicación posible que usted hiciera del barco, y por otro lado, nos hemos convencido con la figura 5 de que los 24 tiros son *necesarios* en algunos casos, y por lo tanto, el número *mínimo*[27] de tiros para estar seguro de que uno descubre el barco es 24.

27. En realidad, si uno distribuyera 24 barcos *disjuntos* en el tablero, o sea que no se superpusieran, entonces se necesitan 24 tiros para poder estar seguro de que uno va a acertar al menos uno de ellos. En ese sentido es el *mínimo* número de tiros que hay que tirar.

Parejas estables

El siguiente problema[28] es fascinante. Tuvo a muchísima gente intrigada en búsqueda de una solución que finalmente apostaron por dos científicos norteamericanos, Alvin Roth y Lloyd Shapley. Tal fue el impacto que produjo que ambos recibieron el premio Nobel de Economía en el año 2012.

Voy a presentar una versión sencilla y aplicada a un caso particular, pero que sirve para entender la importancia que tiene el algoritmo que ambos encontraron para resolver problemas muchísimo más complejos a los que voy a hacer mención sobre el final. Acá va.

Se supone que hay dos grupos de personas, hombres y mujeres. Hay la misma cantidad de unos que de otros. La idea es tratar de formar parejas de la *mejor* manera posible para asistir a un baile.

Por supuesto, la definición de *mejor* es muy vidriosa porque ¿quién puede saber cuál es la mejor elección que cada individuo pueda hacer? Con todo, me permito algunas licencias y avanzo con la idea.

---

28. En matemática y economía es conocido como "El Problema del Matrimonio Estable" (SMP, por sus iniciales en inglés: "Stable Marriage Problem").

Para presentar el caso, voy a suponer que en total hay cinco hombres y cinco mujeres, y que cada uno de ellos intenta formar una pareja con alguien del otro sexo con quien asistir a la fiesta.

Se le pide a cada uno que haga un *orden* de preferencias. Es decir: cada hombre tendrá que escribir cuál sería su primera opción, luego la segunda, la tercera, la cuarta y la última. Naturalmente, las mujeres harán exactamente lo mismo: cada una ordenará los hombres de acuerdo con cuál de los cinco le gustaría bailar esa noche, después su segunda opción y así hasta la quinta.

Hay varios objetivos que cumplir.

El primero es que todas las personas involucradas terminen en pareja. Esto no es tan difícil de lograr, teniendo en cuenta que tanto las mujeres como los hombres habrán establecido un orden de preferencia que debe incluir a las cinco personas del otro sexo. Por lo tanto, *todos* saben que lo *peor* que les podría pasar es que terminen yendo al baile con el quinto o la quinta en sus respectivas listas, pero aun así, todos tendrán una pareja asignada.

Ahora bien: lo ideal sería que todos terminaran en pareja con la persona que pusieron primero en el orden de preferencia. Usted advierte —sin embargo— que no hay procedimiento que pueda garantizar que eso suceda, ya que, por ejemplo, bien podría pasar que todas las mujeres tuvieran al mismo hombre como primer candidato, y por lo tanto, no hay ninguna estrategia que se pueda diseñar que permita satisfacer los deseos de todas las mujeres.

Con todo, si bien ese objetivo es inalcanzable, uno podría aspirar a algo mucho más razonable: vamos a decir que todas las parejas sean *estables* si no existen un hombre y una mujer que se hubieran elegido mutuamente antes de las personas con las que terminaron formando pareja.

Es decir, uno querría evitar que haya un hombre H y una mujer M que se tenían *mutuamente* más arriba en sus respectivas listas que las personas con las que terminaron apareados. O sea, terminaron *ambos* con parejas no deseadas cuando hubieran podido formar una pareja entre ellos.

Este objetivo es un poco más sutil pero no imposible y usted verá que termina siendo una consecuencia del procedimiento que voy a proponer ahora.

El proceso se realiza en varias etapas. Voy a suponer que son cinco hombres y cinco mujeres, pero todo funciona de la misma manera siempre que haya igual cantidad de personas de cada lado.

Antes de empezar con la distribución de las personas, tanto los hombres como las mujeres establecen un orden de preferencia exhaustivo. Cuando escribo 'exhaustivo' significa que *todos* los hombres *tienen* que figurar en cada lista que presenten las mujeres, y *todas* las mujeres *tienen* que aparecer en cada lista que presenten los hombres. Ahora sí, éstos son los pasos a seguir.

El proceso

Cada hombre le ofrece formar pareja a la mujer que aparece primera en su lista.

Una vez recibidas todas las propuestas por parte de los hombres, cada mujer *revisa* los ofrecimientos que tiene. Si tiene uno solo, se queda con esa oferta. Si no tiene ninguna, espera a una futura etapa (que inexorablemente tendrá que llegar, como ya se verá en el procedimiento), y si tiene dos o más ofertas, *elige* la oferta del hombre que está *más arriba* en su orden de preferencias.

Quedan conformadas entonces *algunas* parejas[29]. Estas parejas son *temporarias* y no necesariamente definitivas.

En todo caso, lo que SÍ importa señalar es que los hombres que fueron *rechazados* por la mujer a la que le hicieron una oferta ya no podrán volver a invitarla. Sólo podrán invitar a mujeres que están *por debajo* en su orden de preferencias. Es decir, en la ronda siguiente, cada hombre descartado por una mujer deberá ofrecerle formar pareja a la mujer que le sigue en su lista respectiva.

Y el proceso sigue así: como escribí anteriormente, cada hombre que todavía está solo le ofrece formar pareja a la primera mujer de su lista a la que todavía no había invitado hasta allí, incluso a aquellas mujeres que ya están en pareja (temporaria). No importa: ellos tienen que invitarlas igual.

A su vez, una vez recibidas las nuevas propuestas, cada mujer evalúa sus nuevos oferentes, y responde de acuerdo con estas reglas:

1. Si ya estaba en pareja con otro hombre y no le llega ninguna oferta nueva, se queda con el que estaba (al menos en esta ronda).
2. Si ya estaba en pareja con otro hombre, pero le llega una oferta de un hombre que ella tenía *más arriba* en su lista, entonces, *descarta* al acompañante que tenía hasta allí y se queda con el nuevo.
3. Si no tenía pareja hasta allí y tiene uno o más oferentes ahora, elige el que está antes.

29. Técnicamente, podría ser que quedara formada nada más que *una* pareja, y eso sucedería si *todos* los hombres tuvieran a la misma mujer en el primer lugar. En ese caso, esta mujer elegirá al hombre que tiene como primero en su lista, y los otros cuatro quedarán descartados para salir con ella.

Una vez que se cumplió con esta etapa, podría pasar que las cinco parejas hayan quedado constituidas, y por lo tanto, no hay ningún hombre (y por ende ninguna mujer) 'libre'. Si es así, terminó la distribución. Si no, se reanuda el proceso con los hombres que aún quedaron sin pareja.

Creo que ha llegado el momento de elaborar (juntos) un ejemplo. Supongamos que llamamos A, B, C, D y E al grupo de hombres, y 1, 2, 3, 4 y 5 a cada una de las mujeres.

El orden de preferencias de cada uno ha sido el siguiente.

Cada hombre presentó esta lista:

A: 3 - 2 - 5 - 1 - 4
B: 3 - 1 - 2 - 4 - 5
C: 1 - 5 - 2 - 3 - 4 (*)
D: 4 - 1 - 5 - 3 - 2
E: 1 - 2 - 3 - 4 - 5

Mientras tanto, las mujeres elevaron estos cinco órdenes de preferencia:

1: B - C - D - A - E
2: B - C - A - D - E
3: B - C - D - E - A (**)
4: A - C - E - B - D
5: A - C - D - B - E

Le sugiero que usted se siente en soledad, trate de seguir las reglas que escribí y vea a qué parejas llega. Yo voy a hacer lo mismo a continuación.

Primera etapa:

A le ofrece a 3
B le ofrece a 3
C le ofrece a 1
D le ofrece a 4
E le ofrece a 1

Como resultado de estas propuestas, ésta es la situación que enfrentan las mujeres.

La mujer 1 recibió ofertas de C y de E. Como ella tiene a C *por encima* de E (ver (*)), entonces por el momento, acepta la oferta de C, descarta a E (que ya no la podrá invitar en ninguna etapa futura) y por lo tanto, queda conformada la siguiente pareja:

1C

La mujer 2 (igual que la mujer 5) no recibió ninguna oferta.

La mujer 3 recibió dos ofertas: de A y de B. Como ella tiene a B mejor conceptuado que a A, entonces elige a B, descarta a A (que ya no podrá invitarla en futuras etapas) y se forma una nueva pareja:

3B

La mujer 4 recibió una sola oferta (de parte de D) y por lo tanto, como es la única, queda integrada la pareja:

4D

Y ahora comienza una nueva etapa. Los hombres que quedaron *sin* pareja aún son E y A (que fueron descartados por la mujer 1 y 3 respectivamente).

E había ofrecido originalmente a 1 (la primera en su lista). Ahora, descartado por ella, le ofrece a la siguiente mujer en su lista: la número 2.

Por su parte A, descartado en su primera propuesta por 3, ahora le ofrece a la siguiente mujer en su lista (independientemente de si él la ve momentáneamente en pareja o no): la número 2 también.

Ahora, como la mujer número 2 no había tenido originalmente ninguna oferta, opta por la propuesta de A ya que lo tiene por encima de E en sus preferencias (como se ve en (**)). Elige a A y descarta a E

Luego, queda formada una nueva pareja

2A

El único hombre que queda sin pareja (por ahora) es E (quien ya fue descartado por 1 y por 2). Entonces, para seguir con el procedimiento establecido, hace una oferta a la siguiente mujer que tiene en su lista después de 1 y 2: le ofrece a 3.

Pero 3, que ya está formando pareja con B, evalúa si su nuevo oferente (E) está mejor o peor ubicado que quien ella tiene asignado. Como 3 tiene preferencia por B que por E, se queda con quien estaba, y rechaza a E.

E, ya mortificado porque avanzan las rondas y todavía no encontró pareja, recurre a su cuarta opción: la mujer 4. Hasta acá, la mujer 4 está en pareja (provisoria) con D. Cuando 4 recibe la oferta de E, tiene que compararla con D. Como ella tiene a E por encima de D, descarta la pareja que tenía hasta allí (D) y se queda con E. Luego, ahora quedó conformada una *nueva* pareja:

4E

y el hombre que no tiene pareja ahora es D. El hombre D había hecho hasta acá una sola oferta (la de 4) y se había quedado con ella en todas estas etapas. Por lo tanto, descartado por 4, empieza el rumbo de ofrecerse como candidato a la mujer que le sigue a 4 en su lista. En este caso, le propone a 1. Como 1 está (por ahora) en pareja con C y C está por encima de D en su lista, descarta la oferta de D y se queda con C.

Entonces D, sigue *para abajo* en su lista de preferencias: luego de 4 y 1, le ofrece a 5.

Como hasta acá 5 no había recibido *ninguna* oferta, acepta la oferta de D, queda conformada la última pareja:

5D

y el proceso termina acá. Las parejas resultantes son:

1-C, 2-A, 3B, 4E y 5D

Con este ejemplo como base, quiero hacer algunas observaciones finales.

Primero, creo que queda claro que ninguna persona (independientemente del sexo) quedará *libre* cuando finalice el procedimiento. Lo *peor* que le podría pasar a cada uno es que en la asignación de pareja le toque su última selección.

Pero lo más importante es descubrir que todas las parejas son *estables*, en el sentido que describí anteriormente. ¿Por qué *siempre* ocurrirá esto?

Supongamos que un hombre H y una mujer M terminaron con parejas no deseadas cuando hubieran preferido quedar apareados entre ellos (H y M). Veamos que esto no puede ocurrir. ¿Por qué? Si H hubiera preferido a M antes que la mujer con la que terminó asignado, es porque la tenía más arriba en su orden de preferencias. Por lo tanto, tuvo que haber llegado *primero* a ofrecerle a M antes que a la mujer que venía más abajo y que terminó formando una pareja con él. Si no fue así, fue porque M lo rechazó en algún momento, y para que eso hubiera ocurrido, M tendría que haber estado en pareja con alguien que figuraba *por encima* de H (y no por debajo). Luego, no se pudo haber llegado *nunca* a esa situación.

Moraleja: todo el mundo termina en pareja, y nadie *debería* protestar. Se cumplen, en algún sentido, las condiciones ideales para hacer la asignación.

Final

No creo que ningún grupo de personas en su sano juicio utilice este sistema y/o algoritmo para decidir como establecer parejas para casarse, por ejemplo. Sin embargo, si uno tuviera una lista de médicos que aspiran a cubrir cargos en distintos hospitales, uno bien podría comparar con este caso de apareamiento[30]. Es decir, los candidatos prefieren los mejores hospitales, y los hospitales, quieren a los mejores médicos (con el mejor currículum). ¿Cómo decidir es parte del problema? ¿Toma un hospital a un

30. Roth utilizó el algoritmo que diseñaron con Shapley para asignar colegios secundarios en la ciudad de Nueva York a estudiantes que egresaban de la primaria durante el año 2003. Y con algunas variaciones, lo aplicó después en Boston.

médico que no prefiere porque todavía el que prefiere no *aplicó* para incorporarse a él? O bien, ¿toma un médico la decisión de presentarse a un hospital cuando sabe que hay otros médicos que están en mejores condiciones que él para aspirar al cargo?[31]

Todas estas decisiones se pueden resolver con algoritmos del tipo que figuran anteriormente. Lo mismo podría suceder cuando un grupo de clubes de fútbol, por ejemplo, quiere reclutar niños para que jueguen para ellos en sus categorías menores. Los niños quieren jugar en los mejores clubes, y los clubes quieren tener a los mejores jugadores. Pero todo no resulta posible. Sin embargo, si cada aspirante (y cada club) estableciera un orden de prioridades como el que figura en los párrafos anteriores, entonces las posibilidades de que haya la menor cantidad de frustraciones en la elección hace que el método descripto minimice las consecuencias negativas. De hecho, toda elección *implica una pérdida: la pérdida de lo que uno no eligió.* Saber frustrarse forma parte de un proceso de maduración, pero mejorar las condiciones para decidir significa que esas frustraciones serán las menores posibles y forma parte del aprendizaje de convivir en sociedad, donde no siempre lo (que uno cree que es lo) mejor es lo posible[32].

---

31. Roth y otros colegas mejoraron también la forma en la que se asignaban riñones aportados por donantes y quienes lo requerían para mejorar su calidad de vida, atendiendo las necesidades de compatibilidad que surgen por los potenciales rechazos e incompatibilidades de grupos sanguíneos.

32. No lo agrego en el texto principal, pero me interesa enfatizar que el proceso 'termina' en algún momento y uno no puede entrar en una suerte de círculo o ciclo que continúa indefinidamente. De hecho, una mujer no puede ser elegida nunca dos veces por el mismo hombre y eso garantiza que haya un final en donde todos los hombres tengan asignada una mujer y viceversa.

Estrategia para descubrir el mayor entre 100 números

Tengo un desafío para hacerle. Verá que es entretenido y atenta un poco contra la intuición. En definitiva, es una suerte de 'juego', pero si es así, juguémoslo con seriedad, como si fuéramos profesionales. Acá va.

Usted tiene que elegir *cien* números[33] cualesquiera. La única condición es que sean todos distintos, cien números diferentes. No importa cuáles, pueden ser grandes, chicos, positivos, negativos, cero, los que usted quiera.

Una vez que los eligió, escriba *cada uno* en una hoja de papel distinta, un número por hoja. Mézclelos y póngalos boca abajo. Obviamente, entre los números que usted eligió *tiene* que haber uno que sea el más grande de todos, el mayor de todos. Como yo no vi los números que usted eligió, es obvio que yo no tengo idea de cuál es el *tal* número.

Justamente, el desafío consiste en lo siguiente: yo le apuesto que puedo *descubrir* cuál es el mayor sin tener que darlos vuelta todos. Y le hago la siguiente propuesta (virtual, por supuesto): si yo gano, usted me tiene que dar diez pesos. Si no acierto, yo le tengo que pagar *un peso*. Claro, hay una diferencia grande en lo

33. Números *reales*.

que gana cada uno, pero es lo mínimo que puedo pedir, teniendo en cuenta la dificultad de la tarea, ¿no le parece?

Así es el camino que vamos a seguir: yo voy a empezar dando vuelta uno de los papeles. Si creo que el número que allí figura es el más grande, paro y le digo que me quedo con ese número. Si gano, usted me tiene que dar diez pesos. Si pierdo, usted me tiene que mostrar un número mayor entre los que yo no di vuelta y entonces yo le pago un peso a usted.

Sin embargo, podría pasar que yo dé vuelta el primer número y no me detenga en ese, sino que elija pasar a otro cualquiera que todavía no vi. Paro en el segundo si creo que es el más grande y si no, sigo con otro.

Por supuesto, también podría pasar que en algún momento, me hubiera 'pasado' el número más grande, y ya no lo pueda encontrar. En ese caso, no puedo volver atrás. Cada vez que doy vuelta una hoja, pierdo la posibilidad de elegir cualquiera de los que ya vi. Ésos quedan fuera de competencia.

Obviamente, si se me permitiera volver para atrás, podría darlos vuelta a todos y luego elegir cuál es el mayor. No. En el momento en que veo cada número tengo que decidir si es el más grande o si quiero seguir 'mirando'. Podríamos ponerlo en otros términos: se trata de que yo decida *cuándo* tengo que 'detenerme', *cuándo* tengo que 'parar' de mirar.

¿Qué le parece? ¿Tiene ganas de aceptar? ¿Habrá alguna manera que permita tener alguna probabilidad *razonable* de ganar?

Algo para pensar: si yo diera vuelta una hoja cualquiera, la probabilidad de acertar es 1/100 (un centésimo). ¿Por qué? Es que como hay cien hojas, y yo no tengo ni idea de que número hay en cada una, la probabilidad de acertar es *uno en cien (o sea, el 1%)*. ¿Habrá alguna manera de *mejorar* esa probabilidad? Por supuesto, la *única manera posible* de tener un 100%

de garantías de encontrar el número más grande es dando vuelta todos, pero el desafío que le propongo intenta mejorar ese 1% de posibilidades que tengo si doy vuelta una hoja al azar. ¿Se podrá?

Ahora le toca a usted. Yo sigo adelante.

Una estrategia posible

Obviamente, no sé qué ideas fue discutiendo usted con usted mismo, pero le voy a contar mi estrategia, la que voy a utilizar acá.

Empiezo a dar vuelta las hojas y miro los números que van saliendo. Cuando llegué a dar vuelta 50 hojas, me detengo un momento y anoto el número mayor *de todos los que di vuelta*. Lo voy a llamar *S*.

Claramente, *S* no tiene por qué ser el número mayor de los que usted eligió, pero es el mayor de todos los que yo ví hasta allí. Igualmente, no lo podría elegir, porque yo ya pasé por ese número y no me detuve[34], o sea, que si ese número resulta ser también el mayor entre los cien, ya perdí.

Pero supongamos que no. Como decía, me quedo con ese número *S* que es el mayor entre los 50 que vi. Ahora sigo dando vuelta números del grupo de 50 hojas restantes.

Si en algún momento encuentro un número *mayor* que *S*, me paro y elijo ese número como mi candidato. Lo voy a llamar *M*. A partir de aquí ya no sigo más. Este número *M* será el que yo le presente como *mi* ganador.

Pero como usted está pensando, bien podría suceder que no

34. Salvo que el número S fuera el que está ubicado en el lugar 50 y que yo me detenga allí. Pero ésa no es la idea.

encontrara ningún número *mayor* que *S* en el segundo grupo. ¿Qué pasa entonces? Bueno, entonces perdí.

Sin embargo, si el número *S* fuera el *segundo* número más grande de los que usted eligió y el mayor de todos quedó en el segundo grupo de 50, entonces SÍ yo lo voy a encontrar y voy a ganar la apuesta. ¿Qué le parece mi idea?

Por ejemplo. Supongamos que el número mayor que usted eligió es 147, y el que le sigue es 123. Supongamos además, que el número 123 quedó en el primer grupo de 50 hojas que yo voy a dar vuelta, y el 147 queda en el segundo. En este caso, voy a ganar seguro, porque al dar vuelta las primeras cincuenta hojas, el número 123 quedará como el más grande de esos números. El número *S* sería igual a 123. Pero por otro lado, como entre las restantes 50 hay solamente *una* que es mayor que 123, cuando la encuentre, ese *tendrá* que ser el número mayor de todos: el número *M* será igual a 147.

Por supuesto, éstas son condiciones ideales para que funcione mi estrategia. Yo necesito que el segundo mayor (S) quede entre las primeras cincuenta, y el mayor de todos (que llamo M) quede entre las segundas cincuenta hojas. En ese caso, yo gano.

Ahora bien: ¿cuál es la probabilidad de que estos dos sucesos ocurran simultáneamente? Acompáñeme con esta idea. ¿Cuántas posibilidades hay para *S* y para *M*?

Podrían suceder estos cuatro casos:

a) M y S están en el primer grupo de 50
b) M está en el primer grupo y S está en el segundo
c) S está en el primer grupo y M está en el segundo (o)
d) M y S están los dos en el segundo grupo de 50

Para que yo gane, tiene que ocurrir el caso (c). O sea, de los cuatro casos posibles, solamente uno me es favorable[35]. En ese caso, la probabilidad es 0,2525 o sea, un 'poquito' más que ¼, o lo que es lo mismo, un poco más de 25% de posibilidades[36]. O sea, en el caso (c) *seguro* que la estrategia permite encontrar al número mayor. Al pie de página[37] hay un agregado que permite

35. En realidad, con la estrategia descripta en los párrafos anteriores, también puedo ganar en *algunas* situaciones del caso (d). Supongamos que M y S están en el segundo grupo, pero el número M aparece *antes* que el S cuando yo estoy dando vuelta las hojas. En esta situación, también voy a ganar.

36. ¿De cuántas formas se pueden distribuir S y M para que estén entre las primeras 50 cartas? Respuesta: 50 × 49 × 98! Por otro lado, ¿de cuántas formas se pueden distribuir las cartas de manera tal que S esté entre las 50 primeras y M entre las segundas? Respuesta: 50 × 50 × 98! Con estos datos se pueden calcular las probabilidades. La probabilidad de que S y M estén entre las primeras 50 cartas es = (50 × 49 × 98!)/100! = 0,2474, o sea, un poco menos del 25%. Por otro lado, la probabilidad de que S esté entre las primeras 50 y M entre las segundas es = (50 × 50 × 98!)/100! = 0,2525, o sea un poco más de 25% de posibilidades.

37. Fíjese en el siguiente ejemplo. Suponga que los 100 números elegidos son los que van entre el 1 y el 100. Ubique los primeros 50 en orden de menor a mayor. Es decir, {1, 2, 3, 4,...., 47, 48, 49, 50}.

Ahora, suponga que en la ubicación 51 figura el número 100. En ese caso, siguiendo la estrategia descripta más arriba, también voy a ganar, a pesar de que el número mayor *M* (el número 100), y el número *segundo mayor S (el número* 99), están entre los segundos 50 números elegidos. Es decir, además del caso (c), donde yo voy a ganar siempre, también hay algunos otros casos que me son favorables. ¿Cuáles? Corresponden al caso (d), donde se cumplen estas condiciones: 1) si bien tanto *M* como *S* están entre los segundos 50 números, el número *M* figura en el orden de distribución de los números *¡antes que el número S!* 2) *M* es el *primer* número que aparece entre los segundos 50 números que es *mayor* que todos los que aparecieron entre los primeros 50 números. De hecho, como *M* es mayor que todos los números, seguro que en particular es mayor que todos los que aparecieron antes. Pero descubrir algunas otras distribuciones (todas en el caso (d)) en donde *también* voy a encontrar al número mayor con la estrategia que figura anteriormente.

Quiero proponerle algo más para pensar: ¿es razonable que si yo gano, es decir, si yo encuentro el número más grande, entonces usted me tenga que pagar diez pesos mientras que si yo pierdo yo le tenga que pagar un peso a usted? ¿Qué le parece?

En un mundo ideal, de cada cuatro veces que juguemos, yo ganaría una sola y usted las otras tres. Por lo tanto, yo tendría que haberle pagado tres pesos[38] y usted me tendría que haber dado diez. Conclusión: ¡a mí me conviene seguro! A usted, no creo.

Por último, con esta estrategia, espero haberla/haberlo convencido de que la probabilidad de que yo gane es una de cada cuatro veces, aproximadamente. Pero hay más: la estrategia se puede mejorar más aún. Dos matemáticos de la universidad de Harvard, John Gilbert y Frederick Mosteller, probaron que no hace falta mirar las primeras 50 hojas y quedarse con el mayor entre ellas, sino que es suficiente mirar 37. Sí, treinta y siete[39]. Y

---

lo que necesitamos es que no haya ningún número *mayor* que todos los que figuraron entre los primeros 50 que aparezca en el orden *antes* que *M*.

Cuando se cumplen estas dos condiciones, la estrategia *también* permitirá descubrir el número mayor. En consecuencia, esto hace que la *probabilidad* de que yo acierte el número mayor se incremente aún más que el 0,2525... que habíamos calculado antes.

38. Tendría que pagarle tres pesos por las tres veces de cuatro que perdería y usted me tendría que pagar diez pesos por la 'única' vez que ganaría yo.

39. En realidad, si en lugar de tener 100 números hubiera N, entonces Gilbert y Mosteller probaron que alcanza con mirar N/e = (aprox) 36,78 (o sea, 37 en números enteros) y elegir allí el número S , en donde *e* = 2,71828... es el número real base de los logaritmos naturales. Y con eso será suficiente para elevar la probabilidad a 'casi' un 0,37, o sea 'casi' un 37%.

con eso sería suficiente para incrementar la probabilidad de acertar a 'casi' un 37%. Hubiera bastado, entonces, elegir el mayor de los números entre los primeros 37 y luego, empezar a revisar uno por uno los que siguen hasta encontrar el primer número que supere al que elegimos entre los primeros 37.

Moraleja: al principio parecía que no había manera de mejorar las chances de tener más que un 1% de posibilidades de éxito. Sin embargo, la matemática interviene para aportar nuevas ideas y, como tantas otras veces, permite tomar una decisión más educada. No es poco.

Una lección

Una breve historia sobre este problema. Como es habitual, ni bien terminé de seleccionar el material que trataría de incluir en este libro, lo envié a todos los betatesters[40] que están incluidos en el comienzo. A medida que cada uno de ellos fue leyendo las distintas historias, me fue haciendo observaciones para mejorar el texto, ideas que yo no había considerado, errores, etcétera.

Hay uno en particular al que me quiero referir. Tiene que ver con el problema titulado: "Estrategia para descubrir el mayor entre 100 números".

Corría la segunda semana de junio de 2013. Yo estaba en Barcelona a punto de presentar uno de los libros que esta vez publicaba Random House Mondadori, en su colección llamada Debate. Juan Sabia me escribió un mensaje electrónico en donde me decía que le había gustado mucho el problema, pero que le parecía que contenía un error en el cálculo de las probabilidades involucradas.

Aquí quiero hacer una pausa porque, para poder entender lo que él me observó, es necesario que usted haya leído el proble-

40. Por *betatester* entiendo a las personas que, siendo amigas mías, leen el libro antes que aparezca publicado y son a quienes les tiene que quedar el crédito por encontrar errores que se me pasaron por alto y proponer soluciones más razonables.

ma. Por consiguiente, a partir de ahora, supongo que usted está al tanto de lo que se trata de hacer: elaborar una estrategia que permita encontrar el mayor entre 100 números sin dar vuelta todos.

En la versión que tenía Juan (igual que todo el resto de los 'betatesters' quienes aún no habían llegado a leer el problema), decía que la probabilidad de que sucediera cualesquiera de los cuatro ítems que figuran en (o) (pág. 85) era igual: ¼. Es decir, el 25% de posibilidades para todos.

Juan me dijo: "*Creo que está mal calculada esa probabilidad*". Yo volví a pensar lo que estaba escrito, pero no advertía que hubiera ningún error. Le contesté que, si había un error, no me daba cuenta dónde estaba.

Juan me escribió nuevamente, diciéndome 'textualmente':

1) *¿De cuántas formas pueden estar S y M entre las primeras 50 cartas? Respuesta:* 50 × 49 × 98*!*
2) *¿De cuántas formas puede estar S entre las primeras 50 cartas y M entre las segundas? Respuesta:* 50 × 50 × 98*!*

"*Con estos datos*", siguió Juan, "*la probabilidad de cada uno de estos casos no es ¼*".

Yo entendía lo que me decía, pero no entendía dónde estaba *mi* error. Se lo hice saber.

"Juan", le escribí, "entiendo tu razonamiento, pero no entiendo dónde está mi error. Es obvio que los dos resultados no pueden ser ciertos simultáneamente. No puede ser que yo crea que los cuatro casos son 'equiprobables' (o sea, que tengan la misma probabilidad... en este caso ¼) y de acuerdo con tu idea, la probabilidad en un par de casos es ligeramente mayor que ¼ y en los otros dos, ligeramente menor (que ¼ también)."

Y seguí: "Fijate en esta idea (que la simplifico para entender yo también): Suponé que uno elige los 100 números. Ya tiene determinados S y M. Ahora voy a tirar dos monedas: una corresponde a S y otra corresponde a M.

"Si la moneda de S sale cara, pongo a S entre los primeros 50 números. Si sale ceca, la pongo entre los segundos.

"Lo mismo ahora con la otra moneda: si sale cara, pongo a M entre los primeros 50. Si sale ceca, los pongo entre los segundos 50".

Continué escribiendo: "La probabilidad de que las dos cartas o los dos números estén entre los primeros 50, es ¼. Que el número S esté entre los primeros 50 y M entre los segundos, es también ¼. Y así siguiendo con los otros dos casos".

Y más aún, agregué: "¿Entonces? Hay algo que estoy pensando mal o no entiendo qué error tiene este modelo para la situación que estamos analizando. De todas formas, a los efectos del problema propiamente dicho, más allá de cuál de las dos modelizaciones sea la correcta, está claro que cualquiera de las dos MEJORA el 1/100 que se obtiene al dar vuelta una carta y pretender encontrar cuál es el número más alto".

Allí terminé yo. Pero aún faltaba un capítulo más. Juan (Sabia) lo entendió también como un desafío: no se trataba de resolver el problema (él ya lo había hecho y lo que no entendía era '*cómo era que no lo entendía yo*'), pero ahora quería encontrar *alguna* forma de convencerme de que él tenía razón y que yo estaba equivocado.

Y entonces me escribió este último mail. Voy a reproducir el texto, sin hacer modificaciones:

"Con tu razonamiento da lo mismo que S y M estén entre las primeras dos cartas que entre las últimas 98. Si sale cara, pongo a S entre los dos primeros números y si sale ceca, lo pongo entre los últimos 98... y sigo. El punto es que si ponés a S entre los 50 primeros, hay más formas de poner a M entre los 50 segundos (en total 50) que entre los primeros que quedan (solamente 49).

Con cuatro lugares (en lugar de 100 y reemplazando las 50 que vos darías vuelta por solamente dos) creo que es más claro todavía. Supongamos que hay nada más que cuatro números. ¿Cuáles son las posibles distribuciones?

ABSM ABMS ASBM ASMB AMBS
AMSB
BAMS BASM BSAM BSMA BMAS
BMSA
SAMB SABM SBAM SBMA SMAB
SMBA
MABS MASB MBAS MBSA MSAB
MSBA

La probabilidad de que S esté entre los dos primeros y M esté entre los dos segundos es 8/24, ¡que no es ¼!

Espero que ahora esté claro”.

Sí, ahora está claro. Por eso figura en el problema la solución correcta. Pero por otro lado, me importa mucho haber escrito todo esto, que quiero enfatizar: es muy bueno que esté escrito que el equivocado era yo, cosa que sucede muy frecuentemente. Es muy bueno que esté escrito que no sólo estaba equivocado sino que cuando Juan (o cualquier otra persona, pero en este caso fue él) me quiso advertir del error, yo no podía entender dónde estaba el ‘tal’ error, cosa que a los humanos nos sucede *también* muy frecuentemente. Creo que es muy valioso que aparezca la ‘verdad’ de cómo se trabaja en la vida cotidiana, en donde frente a un problema cualquiera, uno o bien no puede encontrar la solución, o bien encuentra una solución *equivocada* y está convencido de que es cierta, y otra persona aporta algo que uno no vio, y más aún, ni siquiera puede descubrir que lo que la otra persona le está diciendo, es lo correcto.

Todo eso fue lo que me pasó: resolví el problema mal, Juan me lo advirtió, yo no podía entender por qué estaba mal lo que yo había escrito, Juan me lo explicó un par de veces hasta que logré darme cuenta. Es, encapsulada, una situación de la vida real. Gracias, Juan.

La araña y la mosca, en una caja

¿Cuántas veces en la vida tiene uno la posibilidad de sorprenderse? A medida que van pasando los años, a medida que uno va acumulando experiencia, es cada vez más difícil encontrarse con situaciones que se *corran* de lo común, o en todo caso, de lo que se *va haciendo* cada vez más común. La probabilidad de sorprenderse disminuye con el tiempo vivido, aunque más no sea porque es una consecuencia natural: uno más vive, más cosas conoce, más acostumbrado está al mundo que lo rodea, más puede predecir lo que se avecina, y por lo tanto, es cada vez menos probable que aparezca algo que uno no haya imaginado o visto. De eso quiero hablar acá. Es que la matemática provee sorpresas que 'atentan contra la intuición'. En general, cuando uno se enfrenta a una situación determinada, reacciona *intuyendo* lo que debería pasar. Lo conjetura, lo sospecha. Pero de pronto, la realidad aporta *otras* ideas, distintas de las que creíamos válidas hasta ahí.

¿De qué estoy hablando? Vea, estoy hablando de un problema del que si bien conozco la respuesta, si bien la *veo*, la *entiendo*, me doy cuenta por qué pasa lo que pasa, igual... sigo sin salir de mi asombro, sigo sin poder creer que la solución que a uno se le ocurre de entrada es equivocada. Quizás usted tenga más suerte y encuentre rápido la respuesta correcta. Y estaría muy bien, pero se acabaría rápido el problema. Mi aspiración es otra: me gustaría que a usted le pase lo que nos pasó a casi todos nosotros: errar, equivocarse. ¿Sabe por qué? Porque entonces usted tendrá la curiosidad de descubrir y pensar 'dónde está el error de SU razonamiento', y *ésa* es la clave: disfrutar de poder descubrir *otra forma* de pensar las cosas. De eso se trata.

Un dato más: el autor de este problema es el famoso escritor inglés Henry Dudeney (1857-1930). Es obvio entonces entregarle a él *todo* el crédito. No sólo eso: este problema se transformó con los años en una suerte de *clásico*. Aunque más no sea por eso, le sugiero que le preste atención con cierto cuidado. En principio apareció en el *Daily Mail* de Nueva York el 18 de enero de 1905. Generó un gran interés y se sucedieron una cantidad de debates que llegaron hasta el 7 de febrero del mismo año.

Después de tanta introducción, espero que ahora no termine defraudando. Eso sí, léalo con tranquilidad, *no lea rápido la respuesta. Disfrute del camino. Si fuera el caso, permítase el error, acepte equivocarse*. El único premio de este tipo de problemas es el placer que produce descubrir que lo que uno intuye en principio, quizás no sea lo correcto. Acá va.

Suponga que usted tiene una caja de cartón, como si fuera una caja de zapatos. Las dimensiones de la caja son las siguientes: 30 centímetros de largo, 12 de ancho y 12 de alto (ver figura 1). Como usted advierte hay una *tapa*, un *piso*, dos paredes laterales que forman un cuadrado (de 12 × 12) y otras dos que forman un rectángulo de 30 × 12.

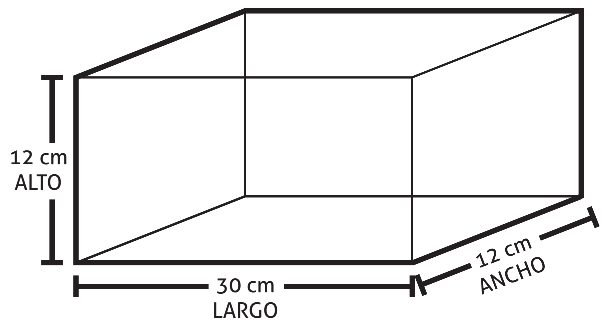


Fig. 1

En un momento determinado, usted advierte que hay una araña (B) en una de las paredes laterales cuadradas de la caja (en la parte interna), ubicada justo a *un* centímetro de distancia del piso exactamente en la mitad de esa pared lateral, o sea, justo a *seis* centímetros de cada una de los bordes.

Del lado opuesto, en la otra pared lateral cuadrada de la caja, también del lado interno, hay una mosca (A). La mosca está justo a *un* centímetro de la tapa y también exactamente en la mitad de esa pared cuadrada en la que está apoyada, o sea, a *seis* centímetros de distancia de cada pared lateral más grande (ver figura 2).

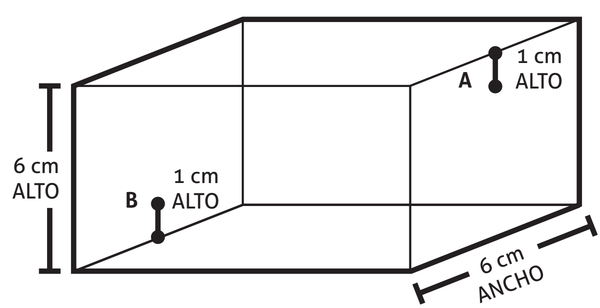


Fig. 2

Ahora bien: uno sabe que la araña puede solamente *caminar* por las paredes internas de la caja, cualquiera de las cuatro laterales, o por la tapa o la base. Como es imaginable, el objetivo de la araña es *atrapar* a la mosca. También es imaginable que la araña quiera recorrer el camino más corto posible para llegar hasta la mosca. ¿Qué camino le propondría usted?

Le sugiero que haga un *dibujo* que le sirva para situarse en el problema.

Después de haberlo pensado, la primera respuesta de la mayoría de las personas que se enfrentaron con el problema es que *la distancia más corta que debería recorrer la araña es de 42 centímetros*. Fíjese si a usted le ocurre lo mismo.

Sin embargo, esto no es cierto. Es decir, aunque parezca imposible, *esa distancia se puede reducir*.

Y de eso se trata del problema: intentar *reducir* los 42 centímetros, lograr que la araña, caminando *menos*, pueda llegar a la mosca. Ahora le toca a usted: "¿Cuál es la distancia más corta que *usted* puede encontrar?".

Solución

Le proponía anteriormente que hiciera usted algunos dibujos para poder ayudarse con la '*geometría*' de la situación. Imagine que la caja es de cartón y usted la puede *cortar* de diferentes maneras (siempre por los bordes) y dejarla *plana* arriba de una mesa. Inténtelo antes de seguir con la lectura y fíjese si se le ocurren distintos caminos posibles para que la araña pueda alcanzar a la mosca.

Cada uno de los cortes que uno puede hacer permite obtener diferentes configuraciones.

En la figura 3, la araña queda a 1 centímetro del borde del rectángulo que corresponde al piso, mientras que la mosca queda apoyada a 5 centímetros del cuadrado (del otro lado). En total entonces, si la araña tuviera que caminar hacia la mosca, tiene que recorrer: 1 centímetro (hasta el borde del piso), más 30 centímetros hasta el otro borde (en un camino perpendicular a lo largo de la base), y después, sumarle 11 centímetros más hasta llegar a la mosca, ya que al haber aplanado la pared en la que estaba la mosca, ella estaba a un centímetro de la tapa superior de la caja, pero ahora quedó a once centímetros de la base. En total, sumando los tres 'tramos', tenemos: 1 + 30 + 11 = 42. Ésta es la primera respuesta, la que surge *casi* naturalmente.

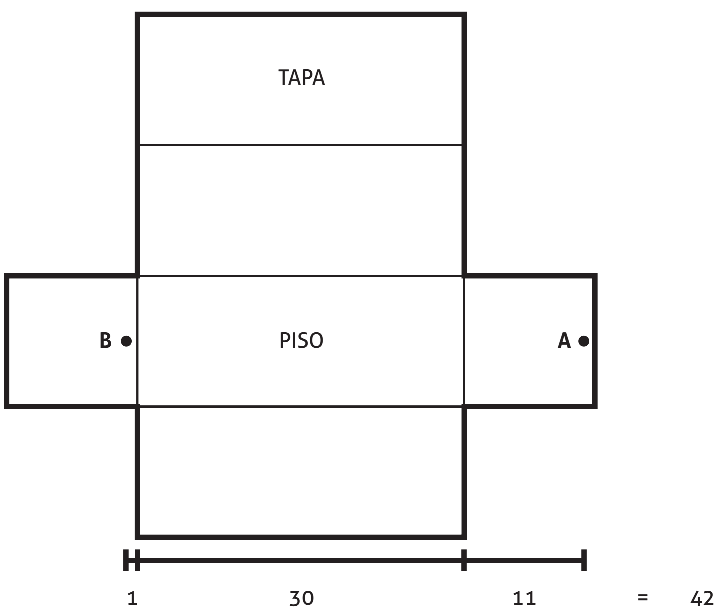


Fig. 3

Sin embargo, quiero convencerla/convencerlo de que esos 42 centímetros se pueden reducir.

Tal como se ve en la figura 4, podemos cortar la caja de manera diferente: ahora los dos cuadrados no quedaron adyacentes al rectángulo que compone el piso, sino que uno de los cuadrados permanece allí, pero el otro queda adyacente a lo que es la tapa superior de la caja.

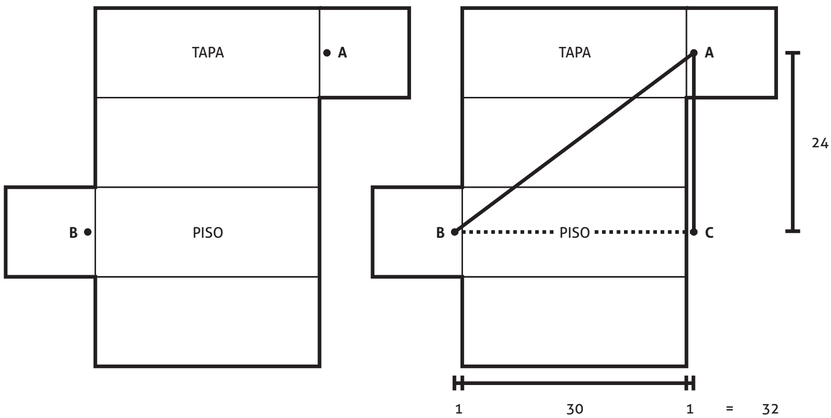


Fig. 4

La araña sigue estando a un centímetro del rectángulo que es la tapa inferior de la caja, mientras que ahora la mosca está a un centímetro de uno de los lados del cuadrado.

Supongamos que uno *uniera* ahora el lugar en donde quedan la araña y la mosca. Queda un segmento que corta varios rectángulos y los dos cuadrados. De hecho, ese camino corta *¡cinco!* de las seis paredes de la caja. Para poder calcular esa distancia, hace falta usar el 'famosísimo' teorema de Pitágoras[41], ya que ese

41. Teorema de Pitágoras: "En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

segmento resulta ser uno de los lados del triángulo que forman la araña B, la mosca A y un punto C como se ve en la figura.

Calculemos las distancias de B a C y de C a A.

La distancia de B a C se calcula sumando:

- 1 centímetro (que es el que hay entre el lugar que ocupa la araña y el lado izquierdo del rectángulo).
- 30 centímetros (que ocupa el recorrido de un lado al otro del rectángulo, en este caso, es el que representa el piso).
- 1 centímetro, que es la distancia entre el borde derecho del rectángulo y la ubicación del punto C.

Al sumar estos tres valores, se obtiene: 1 + 30 + 1 = 32 centímetros.

Ahora, calculemos la distancia entre C y A. Como antes, hay que sumar tres valores:

- 6 centímetros, hasta la altura en donde está el 'techo' del rectángulo que representa al piso.
- 12 centímetros, para alcanzar el borde del siguiente rectángulo (que ahora representa una de las caras de la caja).
- 6 centímetros, hasta llegar a la mosca.

En total: 6 + 12 + 6 = 24 centímetros.

Ahora usamos el teorema de Pitágoras otra vez. La distancia que va entre la araña y la mosca (entre B y A) se calcula como la *raíz cuadrada* de la suma entre los cuadrados de 32 y 24, o sea:

$$32^2 = 32 \times 32 = 1.024$$
$$24^2 = 24 \times 24 = 576.$$

La suma de estos dos valores es: 1.024 + 576 = 1.600.

Ahora hay que calcular la raíz cuadrada de 1.600, que resulta ser 40. Y estamos en condiciones de concluir entonces, que:

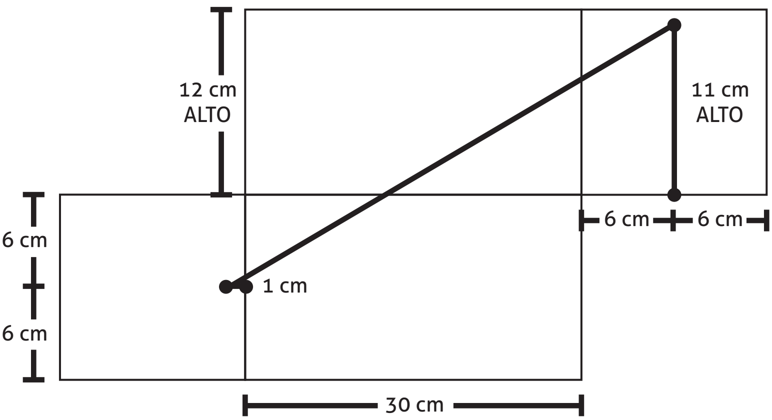
> "la araña, si sigue el camino indicado acá, puede llegar a la mosca recorriendo nada más que 40 centímetros"[42].

Luego, si la araña siguiera este trayecto —tal como escribí anteriormente— terminaría cruzando... *¡cinco de las seis paredes internas de la caja!* ¿No es notable?

Para terminar, quiero incluir acá un dibujo que me envió Carlos D'Andrea (ver figura 5). Mírelo y compárelo con los dos anteriores: el que le permitiría a la araña llegar a la mosca en 42 centímetros y el más corto, de 40 centímetros. Verá que se trata de un camino 'intermedio', menor que 42 pero mayor que 40. Acá va.

---

42. La versión que usted acaba de leer sobre este problema no es la que yo escribí originalmente. Allí yo afirmaba que esos 40 centímetros eran la distancia 'más corta' que se podía encontrar entre la araña y la mosca, con la restricción de que la araña solamente puede caminar por las paredes internas de la caja (las cuatro caras y las dos tapas). Sin embargo, Juan Sabia me hizo notar que lo único que habíamos probado era que había un camino entre ambas de 40 centímetros, pero ¡no que era el menor posible! Carlos D'Andrea tiene una demostración de que —efectivamente— es la menor, pero no es elemental. Nosotros no pudimos encontrar una versión *amigable* que pudiera publicar, por lo que la invitación está hecha desde aquí: trate USTED de encontrar alguna forma de probar que 40 centímetros es la distancia *mínima* posible.



$$(1 + 30 + 6)^2 + (6 + 11)^2 =$$
$$37^2 + 17^2 = 1658$$
$$\sqrt{1658} \approx 40{,}718546\ldots$$

Fig. 5

Final

La intuición indicaba otra cosa. Las arañas descubren el camino más corto sencillamente por intuición, como suele suceder en la naturaleza. Al hombre, también parte de esa misma naturaleza, siempre le queda el camino de recurrir a Pitágoras... afortunadamente. Y a continuación, puede ver el dibujo en 'tres dimensiones' que describiría lo que termina haciendo la araña para llegar a la mosca (ver figura 6).

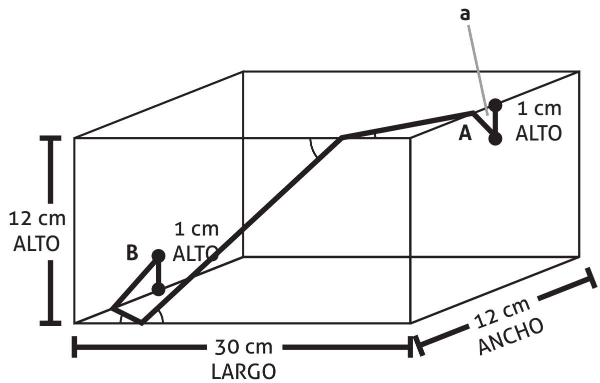


Fig. 6

Cuarenta y cinco pastillas en 30 días

El siguiente es un problema típico y que circula por internet hace mucho tiempo. Sin embargo, el hecho de que se haya vuelto tan popular no impide que lo proponga acá. Mi idea es mostrar (una vez más) que muchas veces en la vida pareciera como que a uno le faltan datos ante una determinada situación, pero no necesariamente eso siempre es cierto. Acá va el ejemplo entonces.

Se supone que una persona concurre al médico y éste le dice que tiene que tomar 45 pastillas en 30 días. Las puede distribuir como quiera en esos 30 días, pero con una sola condición: todos los días tiene que tomar por lo menos una pastilla. Puede tomar más si quiere, pero no puede pasarse un día sin pastillas.

Dicho esto, le propongo lo siguiente: mostrar que cualquiera sea la distribución que usted haga de las pastillas, tiene que haber un conjunto de días ***consecutivos*** en donde usted tome **exactamente** 14 pastillas.

Parece interesante, ¿no? ¿Cómo hacer para convencerse de que es cierto? Ahora le toca a usted.

Respuesta

Veamos. Voy a llamar A_1 al número de pastillas que usted decidió tomar el primer día. A_2 al número de pastillas que usted acumuló hasta el segundo día inclusive. ¿Quién será A_3 entonces? Bueno, A_3 será el número de pastillas que usted consumió en los primeros tres días. Y así siguiendo. Por ejemplo, el número A_{20} indicará el número de pastillas que usted ingirió hasta el día 20 inclusive, y el A_{30} será el total de pastillas que usted tomó incluyendo el día 30, que tendrá que ser igual a 45, ya que tenía que consumir 45 pastillas en 30 días. Luego, $A_{30} = 45$.

Dicho esto, fíjese que como el problema estipula que usted debe tomar *al menos* una pastilla por día, entonces tiene que darse la siguiente relación:

$$1 <= A_1 < A_2 < A_3 < A_4 <\ldots < A_{28} < A_{29} < A_{30} = 45 \qquad (*)$$

(esto sucede, porque como todos los días usted tiene que aumentar en al menos una la cantidad de pastillas, eso implica que cada número de la sucesión que figura en (*) tiene que ser *estrictamente mayor que el anterior*).

Por otro lado, como lo que uno quiere probar es que hay un periodo de días consecutivos en donde usted tuvo que inexorablemente tomar 14 pastillas exactamente, eso se puede traducir diciendo que tienen que existir días i y j, con $i < j$,

de manera tal que

$$A_i + 14 = Aj \qquad (**)$$

Es decir, que el conjunto de pastillas acumuladas que usted había tomado hasta el día i, sumadas 14, da *exactamente* el conjunto de pastillas acumuladas que usted llegó a tomar el día j.

O sea, el problema se trasladó entonces a encontrar esos i y j, de manera tal que hagan cierta la igualdad que figura en (**).

Por lo tanto, *sumemos ahora* el número 14 a cada término de las desigualdades que figuran en (*). Se tiene:

$$1+14 <= (A_1 + 14) < (A_2 + 14) < (A_3 + 14) < \ldots < (A_{29} + 14) < (A_{30} + 14) = 45 + 14 \quad (***)$$

Ahora, acompáñeme con este razonamiento. Si usted mira las relaciones que figuran en (*) y en (***) advertirá que hay involucrados 60 números enteros.

Los primeros 30 son los que figuran en (*): A_1, A_2, A_3, A_4,…, A_{29} y A_{30}.

Éstos son todos *distintos* entre sí, porque es una sucesión *estrictamente creciente*[43].

Por otro lado, los otros 30, son los que figuran en (***):

$$(A_1 + 14), (A_2 + 14), (A_3 + 14),\ldots, (A_{29} + 14), (A_{30} + 14)$$

Éstos también son todos *distintos*, porque también forman una sucesión *estrictamente creciente*.

En consecuencia, tenemos 60 números enteros. Ahora bien: todos estos números son, por un lado, *mayores o iguales que 1*, ya que el primer día, el número A_1 es mayor o igual que 1.

Por otro lado, *todos estos números son menores o iguales que*

43. Una sucesión es *estrictamente creciente* si cada término es *estrictamente mayor* que el anterior.

59, ya que el *más grande* de todos es (A_{30} + 14) = 45 + 14 (ya que el *acumulado total* al día 30 *tiene que ser 45*).

¿Cuál es la moraleja de todo esto? Que uno tiene 60 números enteros entre 1 y 59. En consecuencia, ¡tiene que haber por lo menos *dos* que sean iguales!

Ya falta poco para terminar la argumentación. Los números que figuran en la relación (*) son todos distintos (A_i distinto de A_j, para todo i distinto de j, ya que todos los días usted va tomando al menos una pastilla).

Por otro lado, si i es distinta de j, (A_i + 14) es distinto de (A_j + 14), porque A_i y A_j son distintos. Luego, los 30 números enteros que aparecen en las desigualdades (***) son *también* todos distintos entre sí.

Luego, no queda más remedio que haya al menos *un número i*, y *un número j*, donde i y j son distintos, tal que:

$$(A_i + 14) = A_j$$

Pero esto es *exactamente lo que queríamos probar.*

Sucesiones crecientes y decrecientes

Supongamos que uno tiene los números 1, 2, 3, 4 y 5, y los ordena de cualquier forma.

Se sabe que hay 5![44] = 120 maneras de hacerlo.

Ahora bien: mire, por ejemplo, la sucesión 51423. En este caso, es posible descubrir dos ternas de números que están ordenadas en forma decreciente: **5**1**42**3 (542) y también **5**1**4**2**3** (543). Además, hay otra terna ordenada en forma creciente 5**1**4**23** (123).

Cabe entonces preguntarse: ¿se podrá demostrar que SIEMPRE hay tres ordenados en forma creciente o bien en forma decreciente?

Es decir, ¿será verdad que si yo elijo un orden cualquiera de los 120 posibles, *seguro* que se puede encontrar (mirando de izquierda a derecha) que hay tres en orden creciente o tres en orden decreciente?

Le propongo que trate de encontrar un argumento que confirme que es inexorable que eso suceda, *sin necesidad de escribir los 120 órdenes posibles*. No es que este método sea equivocado: no lo es, pero resultaría sumamente tedioso.

44. 5! (o el *factorial* del número 5) es igual a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Así (aunque seguro que hay otras formas más sencillas):

a) Si el 5 está en el primer lugar, entonces, si a la derecha del 5 hay dos en forma decreciente, listo, porque junto con el 5 que está primero tenemos una terna decreciente. Si en cambio eso no sucede, es porque los cuatro que están a la derecha del 5 están ordenados en forma creciente (deberían ser 51234) y listo también porque entonces tenemos al menos tres en forma creciente.
b) Si el 5 está en el segundo lugar, si a la derecha hay dos en forma decreciente, listo porque junto con el 5 componen la terna decreciente. Si no sucediera esto, es porque los tres que están a la derecha forma una sucesión creciente… y listo también.
c) Si el 5 está en el CUARTO lugar, entonces, si hay dos que crecen a la izquierda, listo porque tenemos tres (junto con el 5) que están en sucesión creciente. Si no, es porque los tres que están a la izquierda están en sucesión decreciente y listo también.
d) Si el 5 está en el quinto lugar, lo mismo que recién: si hay dos que crecen a la izquierda, junto con el 5 forman la terna creciente. Si no, es porque hay a la izquierda del 5, tres que decrecen.
e) El último caso, y EL MÁS SENSIBLE, es demostrar que lo mismo sucede cuando el 5 está en EL MEDIO, o sea, en el tercer lugar[45]. Por supuesto, si a la izquierda del 5 hay

45. Juan Sabia me hizo pensar algo muy interesante: si el número 5 está en el medio, entonces el número 1 no puede estar en el medio también. Por lo tanto, el '1' funciona como antes el '5'. Es decir, si el '1' está en el primer o segundo lugar, entonces a la derecha del '1' tiene que haber tres decrecientes, porque si hay un par creciente, junto con el '1' proveen la sucesión creciente que necesitamos. Y si el '1' ocupa los lugares 4 o 5, entonces o bien a la

dos creciendo, junto con el 5 tenemos los tres que queremos (creciendo). O sea, los dos de la izquierda TIENEN que estar decreciendo. Y por la misma razón, los dos de la derecha TIENEN que estar creciendo. En ese caso, las alternativas posibles son:

Para la izquierda del 5 (para las primeras dos posiciones)

41
42
43
32
31
21

y para la derecha del 5 (para las dos últimas posiciones)

12
13
14
23
24
34

Lo interesante de esto es que cada uno de los elementos de estas columnas ¡ESTÁN ASOCIADOS!

Es decir, el 41 de la izquierda obliga a que los dos de la de-

---

izquierda hay tres 'creciendo' o bien, si hay algún par que sea decreciente, entonces junto con el '1' proveen la porción decreciente que hace falta. ¡Y esto resuelve el problema!

recha sean el 23. Pero en ese caso, se tiene el orden 41 5 23, y entonces, 123 dan la terna creciente.

El 42 está asociado con el 13. Luego se tiene 42 5 13 (y acá la terna decreciente es 421).

El 43 está asociado con el 12. Luego se tiene 43 5 12 (y acá hay dos ternas decrecientes por lo menos: 431 y 432).

El 32 está asociado con el 14. Luego se tiene 32 5 14 (y acá la terna decreciente es, por ejemplo, 321).

El 31 está asociado con el 24. Luego, se tiene 31 5 24 (y acá la terna creciente es 124).

Por último, el par 21 al principio está asociado con el 34 en las dos últimas posiciones. Se tiene 21 5 34. Acá la terna creciente es 134.

Con esto, hemos agotado todas las posibilidades.

Eratóstenes

Eratóstenes de Cyrene fue un matemático griego que vivió entre 200 y 300 años antes de Cristo. En realidad, no sólo fue matemático, sino también astrónomo, poeta y músico. Se lo considera, además, el inventor de la *geografía* tal como la concebimos hoy como disciplina, fue el primero en usar *la latitud* y *la longitud* como sistema de coordenadas sobre la Tierra, el primero en medir la distancia entre la Tierra y el Sol, y el primero en hablar de *años bisiestos*. Suficiente, ¿no?[46]

Tal era su prestigio que Eratóstenes[47] fue elegido para ocupar un cargo *distinguidísimo* para la época: fue el tercero de los directores de la Gran Biblioteca de Alejandría, la más importante de Europa durante muchísimos siglos, algo así como el *centro del conocimiento*.

---

46. Todos estos datos figuran en la biografía que aparece en Wikipedia y en la famosa Enciclopedia Británica.

47. Eratóstenes es reconocido también en el mundo de la matemática por haber diseñado lo que se conoce con el nombre de Criba de Eratóstenes, que es un método *elemental* y *primitivo* pero muy eficiente para determinar *todos* los números primos (*todos* es un 'imposible' teniendo en cuenta que los números primos son infinitos, pero si uno pudiera seguir el proceso que elaboró Eratóstenes en forma indefinida, los iría descubriendo a todos en el camino).

Pero, ¿por qué hablar de Eratóstenes acá? Es que Eratóstenes hizo algo espectacular para la época (en realidad, para *esa* época o para *cualquier* época): fue el primero en medir el diámetro de la Tierra, para lo cual, obviamente, demostró sin proponérselo que algo que repetimos durante años en la escuela fue obviamente falso: ¡no fue Colón quien descubrió que la Tierra no era plana! Usted nunca se creyó eso, ¿no?

¿Es que no le resulta poco creíble que hasta el año 1492 el mundo no hubiera sospechado que la Tierra no era plana o chata? Bastaba con levantar la vista y mirar al cielo y advertir que *todos* los objetos que se veían (con o sin telescopio) eran esféricos (ni hablar de la Luna, por ejemplo). De hecho Copérnico, por poner solamente un ejemplo, ya había ubicado al Sol en el centro de su sistema planetario, y al resto de los planetas orbitando alrededor de él. Y *todos estos cuerpos eran esféricos.* ¿No se les ocurriría imaginar que —quizás— el lugar en donde vivían *también* era esférico, o que tenía volumen?

Vuelvo a Eratóstenes: la historia lo reconoce como el *primero* en medir la circunferencia de la Tierra (y por lo tanto podía deducir el diámetro) con una precisión *sorprendente*[48]. Lo que quiero hacer es mostrar el método *extraordinario* que utilizó.

Todo lo que hace falta saber para entender lo que hizo Eratóstenes se reduce a tres resultados más o menos elementales que describo a continuación. Le pido que haga un *esfuerzo mínimo* para seguirme, porque una vez que lo haya hecho, verá que usted

48. Depende de qué libro de historia uno consulte, Eratóstenes sostenía que la circunferencia de la Tierra era de 39.690 kilómetros, lo que está a un poco más del 2% del verdadero valor. El problema reside en que en esa época él medía con unidades que llamaba 'estadíos' y el debate reside en saber *con precisión* cuánto medía un 'estadío'.

empezará a coincidir conmigo que no es posible que alguien no lo hubiera hecho antes que Colón. Por supuesto, puede *saltearse* esta parte y creerme, pero me importa escribirlo para que vea que no se requiere ninguna herramienta sofisticada sino *sentido común*. Nada más. Acá va.

a) Mire la figura 1. Los dos ángulos A y C son iguales porque son ángulos opuestos por el vértice (no me va a decir que no se acuerda de ese hecho que estudió en el colegio y nunca entendió para qué servía, pero si no se acuerda, no tiene importancia). ¿Me lo cree?
b) Ahora veamos la figura 2. Fíjese en la recta de la izquierda. Es paralela a la recta de la derecha. La recta que las cruza a las dos lo hace determinando ángulos iguales. Es decir: el ángulo D es igual al ángulo A y en la figura 3, el ángulo B es igual al ángulo C. Pero como por el punto a) tanto A como C son iguales (porque son opuestos por el vértice), entonces *todos* los ángulos que figuran (A, B, C y D) son iguales (ver figura 4). En particular, y esto es lo que me importa (como se verá en la figura 7), A = B.
c) Por último: fíjese en las dos circunferencias que aparecen en la figura 5. Las llamé C1 y C2. Las dos tienen el mismo centro. Si se fija en el *arco* que va desde S hasta P, eso representa ¼ (un cuarto) de la circunferencia C1. Pero de la misma forma, el *arco* que va desde T hasta Q representa *también ¼ (un cuarto)* de la circunferencia C2. Y si usted se fija en la figura 6, el *arco* que está *marcado* en la circunferencia C1 representa el mismo porcentaje de la circunferencia C1 que el *arco* que está marcado en C2 respecto de la circunferencia C2. O sea, son proporcionales.

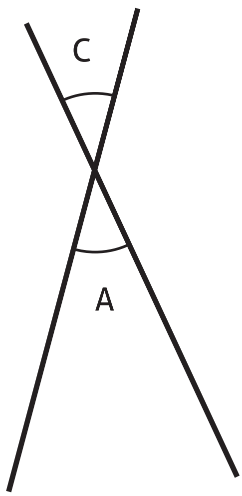


Fig. 1

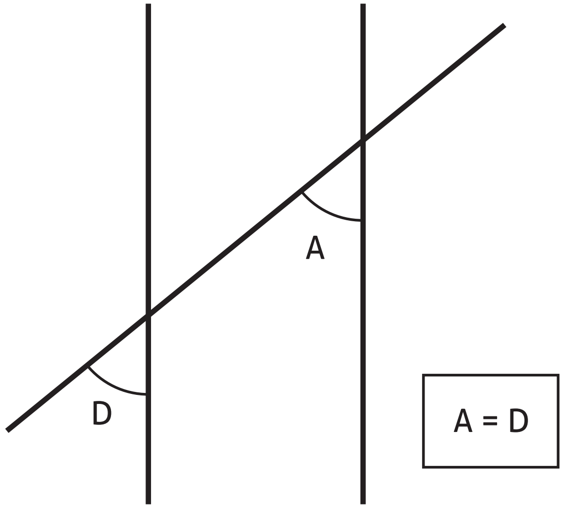


Fig. 2

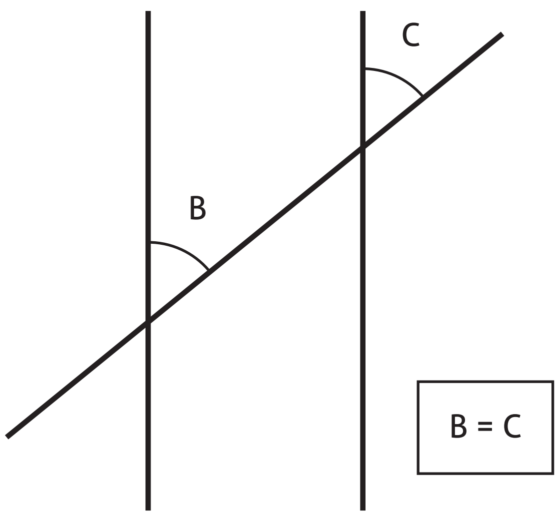


Fig. 3

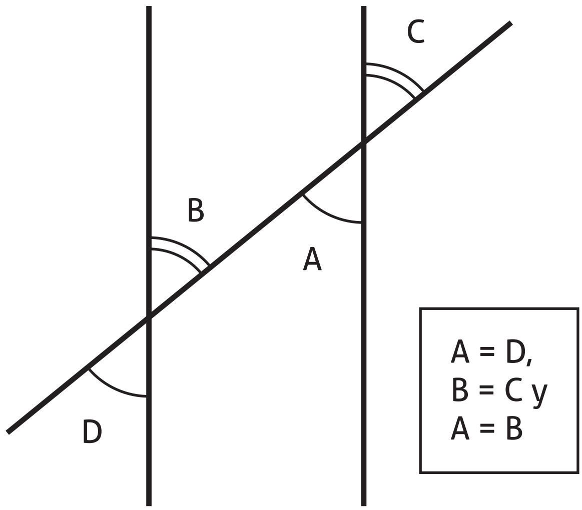


Fig. 4

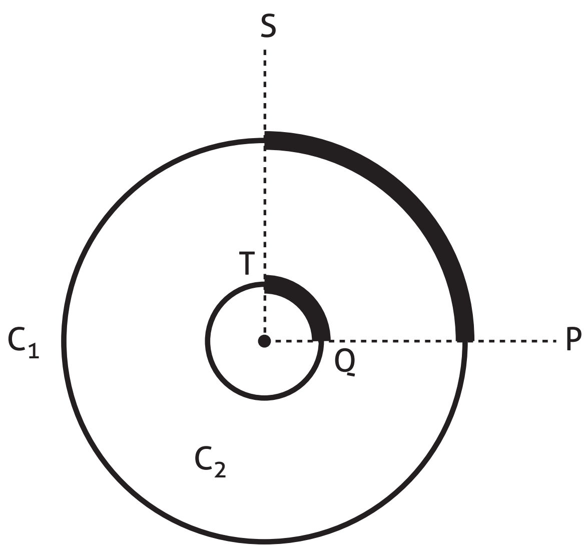


Fig. 5

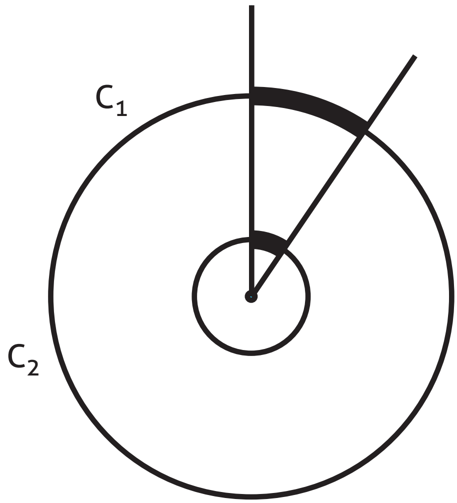


Fig. 6

Dicho todo esto, quiero contar lo que hizo Eratóstenes. De acuerdo con lo que cuentan los historiadores, Eratóstenes encontró un libro que decía que en la ciudad de Siena[49], había un pozo en el que *en cierto día del año y a una hora determinada ¡no había sombra en su interior!* Es decir, daba la sensación de que los rayos del Sol ingresaban en el pozo en forma perfectamente vertical. A partir de allí, Eratóstenes diseñó el siguiente experimento. En el mismo momento en el que en Siena *no había sombra en ese pozo,* Eratóstenes clavó una varilla vertical pero en Alejandría y observó que allí SÍ había sombra. La midió, y con esa sombra

49. Siena es el nombre en español para una ciudad egipcia conocida como Swenet, en griego como Syene y al día de hoy como Aswan. Hay una Siena un poco más famosa para nosotros, occidentales, que es la ciudad que está en Italia, setenta kilómetros al sur de Florencia. Ésta es *otra* Siena y queda en Egipto.

calcularía el ángulo de incidencia de los rayos del Sol, que se transformaría en un dato clave.

A partir de toda esta información, es evidente para mí que él *sabía (o conjeturaba)* que la Tierra *tenía* que ser esférica, y estaba empecinado en comprobarlo.

Por supuesto, Eratóstenes necesitaba saber cuál era la distancia más o menos precisa entre las dos ciudades (Siena y Alejandría). De este último dato se encargaron los distintos viajeros que terminaron siendo asistentes impensados del matemático griego.

Una vez que tuvo todos los datos, Eratóstenes logró calcular la longitud de la CIRCUNFERENCIA de la Tierra, mediante el siguiente cálculo geométrico[50]:

a) Por la sombra en Alejandría, pudo calcular el ángulo A.
b) Por lo que escribí anteriormente, el ángulo A y el ángulo B son iguales.
c) Cuando Eratóstenes supo cuánto medía B advirtió que había resuelto el problema. ¿Cómo? Acompáñeme en este razonamiento. Una vuelta completa a la circunferencia son 360 grados. Al saber cuánto medía B, podía calcular *cuántas veces entraba B en 360*. Por ejemplo, si B midiera 30 grados, entonces Eratóstenes habría sabido que B entra 12 veces en 360. Pero con ese número, 12 en este caso ficticio, él podía multiplicar 12 por la distancia entre Siena y Alejandría y deducir cuál era la medida del meridiano de la Tierra; y con la medida del meridiano, deducir la medida del diámetro. Y eso fue lo que hizo. Al *dividir* 360 por los grados que medía B, descubrió ese *numerito* que le hacía falta. Al multiplicar la distancia entre Siena y Alejandría

50. Ahora siga la figura 7.

por ese número, obtuvo la medida del meridiano, y el resto surge de la utilización sencilla de la fórmula que involucra a la longitud de una circunferencia con su diámetro[51].

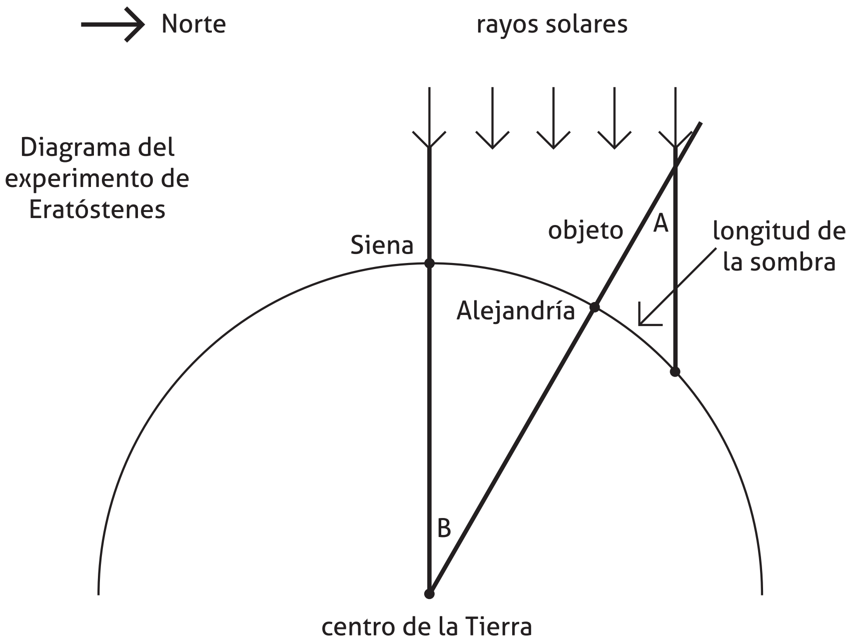


Fig. 7

Moraleja

Una vez que uno se ha familiarizado con lo que hay que hacer y consigue los datos (tarea *no* sencilla en aquella época en particular), tiene resuelto el problema en forma *casi* inmediata.

Justamente el hecho de que todo requiera de una matemática tan elemental (igualdad de ángulos alternos internos, pro-

51. Longitud de una circunferencia = $\pi \times$ diámetro de la circunferencia.

porcionalidad entre arcos y ángulos, y finalmente la fórmula que relaciona la longitud de una circunferencia y su diámetro) me permite conjeturar que Eratóstenes (y seguramente muchísimos otros) supieron por mucho tiempo lo que nos quisieron contar como un descubrimiento de Colón.

No tengo por qué dudar de que Colón haya tenido muchísimos méritos, pero no diría que el haber descubierto la esfericidad de la Tierra fuera uno de ellos.

Mis opiniones y conjeturas son irrelevantes. Lo que sí importa es saber que la matemática involucrada se conocía ya antes que el hombre empezara a medir el tiempo como lo hacemos ahora y, por lo tanto en la época de Eratóstenes *ya se sabía* que la Tierra era un cuerpo, con volumen, de forma *casi* esférica y cuyo diámetro fue estimado (de acuerdo con los registros de la época) con una sorprendente exactitud.

3. LA ESCOBA DE 15, DETECTIVES, SOMBREROS Y PROBABILIDADES

Escoba de 15[52] (parte 1)

Creo que puedo afirmar sin temor a equivocarme que *todos* los humanos hemos jugado a las cartas en algún momento de nuestras vidas. En todo caso, de todos los entretenimientos a los que apelamos, los naipes deben ocupar un lugar ciertamente privilegiado.

En general en los países hispanoparlantes, hay un juego que ha tolerado estoico el paso del tiempo: la *famosa* "Escoba de 15". Mi idea es plantear un problema muy sencillo que se puede resolver 'tanteando' o bien, haciendo un análisis de los posibles casos. Acá va.

Supongamos que usted ha estado jugando a la *escoba* con una amiga, y en un momento determinado del partido, cuando le toca jugar a ella, usted mira las cartas que están sobre la mesa y advierte que es imposible sumar *exactamente* 15 entre ellas. Esto no sería raro porque se da muchas veces en un partido, pero lo que es mucho más infrecuente es que usted detecta que *más allá*

52. Este artículo requiere conocer las reglas de cómo jugar a la 'Escoba de 15'. Si usted no las conoce, olvídese de lo que está leyendo y trate de aprender a jugar, porque es uno de los entretenimientos (usando cartas) más ingeniosos y recreativos.

de las cartas que ella tenga en la mano, ahora que le toca el turno, ella va a levantar ***inexorablemente***[53].

Resumo: después de haber jugado usted, en la mesa quedaron algunas cartas. No importa cómo las combine, no se pueden sumar *quince*. Pero lo curioso es que, cualesquiera sean las cartas que tenga su amiga en la mano, terminará levantando 'sí o sí'.

Tengo tres preguntas para hacerle:

- ¿cuál es el mínimo número de cartas que tiene que haber en la mesa para que usted pueda hacer esa afirmación?
- ¿cuáles deberían ser esas cartas?
- ¿cuántas maneras hay de que eso suceda? Es decir: ¿cuántas posibles combinaciones se pueden encontrar para que eso suceda?

Como ve, el problema es muy sencillo de enunciar. La/lo invito a que le dedique un rato a pensar las respuestas y que en el camino, se entretenga tanto, *o más*, que si estuviera jugando.

Solución

Por motivos prácticos, voy a suponer que las cartas que figuran en el mazo van desde el 1 hasta el 10. Es decir, voy a considerar que la *sota* es un 8, el *caballo* es un 9 y el *rey* es un *10* (independientemente del palo). De esa forma es como si las cartas estuvieran numeradas así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

---

53. Tener que levantar 'inexorablemente' significa que, más allá de las cartas que ella tenga en sus manos, *seguro* que con una de ellas y las que están distribuidas arriba de la mesa, conseguirá *sumar 15*.

Para empezar: como usted no sabe qué cartas tiene su amiga en la mano, las que están en la mesa tienen que poder combinarse para obtener *todas* las sumas entre 5 y 14. ¿Por qué? (piénselo usted por un instante).

Es que como usted afirmó que ella va a poder levantar 'sí o sí', eso significa que puede tener cualquier número entre 1 y 10, y por lo tanto, las sumas tienen que ir desde 5 hasta 14[54].

Como advierte, se tienen que poder obtener *diez* sumas diferentes (cuéntelas): 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

Ahora, empiezo a analizar junto a usted cuántas cartas *tiene* que haber arriba de la mesa para que esto suceda. ¿Cuántas cartas le parece que tiene que haber? Es fácil convencerse de que con una sola carta en la mesa, el resultado es falso. Es que no hay ninguna carta que llegue a 14, por lo cual, si su amiga tiene —por ejemplo— tres *ases* (o números uno), no podría levantar.

Lo mismo sucede en el caso de que haya solamente dos cartas en la mesa. ¿Por qué? Es que con solamente dos cartas, digamos A y B, ¿cuántas posibles *sumas* se pueden formar? Se pueden formar tres sumas: A (si elijo la carta A sola), B (si elijo la carta B sola) y (A+B) si las tomo a las dos juntas. Como se ve, con solamente dos cartas no se pueden conseguir las diez sumas que hacen falta (desde 5 hasta 14).

---

54. Para cada potencial carta que ella tenga en la mano, en la mesa tiene que poder *sumarse* lo que le hace falta para llegar a 15. Por ejemplo, si ella tuviera un número *uno*, en la mesa tendría que haber cartas que sumaran 14. Si ella tuviera un número dos, debería haber suficientes cartas que sumaran 13. O si ella tuviera un número *ocho*, en la mesa tendría que haber cartas que sumaran 7. De esa forma, si en la mesa se pueden conseguir *todas* las sumas del 5 al 14, eso garantiza que su amiga va a poder levantar con cualquier carta que tenga en la mano.

¿Qué pasa con tres cartas? Le sugiero que lo piense por su cuenta. Pierde la gracia —creo— si usted lee lo que sigue sin haber hecho el mínimo esfuerzo. Con tres cartas, que voy a llamar A, B y C, ¿cuántas *sumas* se pueden armar? En total son *siete*. A saber:

A, B, C, (A + B), (A + C), (B + C) y (A + B + C).

En consecuencia, como con tres cartas *solamente* se pueden obtener *siete* sumas, entonces no se van a poder obtener *todos* los números entre 5 y 14[55] y, por lo tanto, la moraleja es que "con tres cartas, *tampoco* se puede".

Esto nos lleva a pensar qué pasaría con *cuatro* cartas (que llamo A, B, C y D). Ahora hay *quince* posibles combinaciones:

A, B, C, D, (A + B), (A + C), (A + D), (B + C), (B + D), (C + D),
(A + B + C), (A + B + D), (A + C + D), (B + C + D) y (A + B + C + D).

Es decir, ahora tenemos suficientes cartas como para obtener 'quince' sumas, cuando en realidad necesitamos diez. Pero aquí aparece una nueva restricción: le recuerdo que entre las cartas A, B, C y D, al combinarlas *no se puede sumar quince*.

Teniendo todo esto en cuenta, le sugiero que ahora se dedique a pensar usted en potenciales respuestas. Creo que vale la pena incluso empezar 'tanteando' y viendo si es posible o no. Es decir, ¿será posible conseguir cuatro cartas de manera tal que elegidas de cualquier forma no sumen quince? Por supuesto, uno podría dar una respuesta inmediata: elijo cuatro cartas pares y listo. Pero el problema es que además, esas cuatro cartas tienen que poder

55. Hay *diez* números entre 5 y 14: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

combinarse para obtener (con sumas) todos los números entre 5 y 14. ¿Se anima a pensar en soledad? ¿No la/lo tienta hacerlo?

Analicemos *juntos* algunos argumentos y veamos qué conclusiones podemos sacar.

- Como entre las cartas que hay arriba de la mesa se tienen que poder obtener *todas* las sumas entre 5 y 14, está claro que la suma de *todas* esas cartas tiene que sumar 14 o más (si no, no se podría obtener el número 14). Por lo tanto, alguna de esas cartas tiene que ser mayor (o igual) que 4. Es que si todas fueran estrictamente *menores* que 4, entonces entre las cuatro cartas podrían sumar a lo sumo doce[56]. **Moraleja 1: *al menos una de las cartas es mayor o igual que 4.***
- Ninguna de las cartas puede ser un 8. Es que si lo fuera, como entre las cartas que hay en la mesa yo tengo que poder conseguir sumar *siete* (obviamente sin involucrar al 8 porque si no me 'pasaría'), entonces entre el número 8 que tengo, más los siete que puedo conseguir sumando alguna(s) de las tres cartas restantes, obtendría *quince*. Eso es imposible, porque el problema tiene como restricción que *las cartas arriba de la mesa no pueden sumar quince.* **Moraleja 2: ninguna de las cartas puede ser un 8.**
- Con un argumento similar, se deduce que *ninguna de las cartas puede ser un 9.* Es que si lo fuera, como entre las sumas posibles usando algunas de (o todas) las otras tres cartas tengo que poder obtener el número seis, entonces

56. Si las cuatro cartas fueran menores que cuatro, a lo sumo podrían ser números 'tres'. En ese caso, cuatro por tres da *doce*, por lo que la suma de esas cuatro cartas podría ser —a lo sumo— el número doce, y eso es imposible porque yo necesito poder obtener (sumando) el número trece y el catorce también.

junto con este nueve, se sumaría quince. **Moraleja 3: ninguna de las cartas puede ser un *nueve*.**

- Con la misma idea, ninguna de las cartas puede ser un *10*. Es que como con las restantes tres cartas se tendría que poder sumar *cinco*, si una de las cartas fuera un *10*, sumando este diez con las que suman cinco, se obtendría quince, cosa que no puede suceder. **Moraleja 4: ninguna de las cartas puede ser un *diez*[57].**

Juntando toda esta información, se deduce que *al menos una de las cuatro cartas es mayor o igual que cuatro*, pero ninguna puede ser ni un 8, ni un 9, ni un 10.

Por lo tanto, de las cuatro cartas que están sobre la mesa, la *más alta* puede ser un 4, un 5, un 6 o un 7.

Ahora, una pregunta: ¿las cuatro cartas tendrán que ser todas distintas?, ¿o podrá haber algunas iguales?

Supongamos que hubiera dos iguales, y las otras dos, no sé. Las voy a llamar entonces A, A, B y C. Le recuerdo que con estas cuatro cartas uno tiene que poder obtener las *diez* sumas: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 y **que no haya forma de sumar *quince* con cualquier combinación de ellas**.

Las sumas *posibles* con las cartas A, A, B y C son estos *once* números:

$$A, B, C, (A + A), (A + B), (A + C), (B + C), (A + A + B), (A + A + C), (A + B + C), (A + A + B + C) \qquad (^*)$$

57. El argumento ya no se puede usar para deducir que ninguna de ellas puede ser el número *siete*, porque si bien yo tengo que poder sumar *ocho* entre las cartas que están en la mesa, podría ser que necesite usar *ese* siete, y por lo tanto la idea que sirvió para deducir que no puede haber ningún ocho ni nueve ni diez, ahora ya no sirve.

Entre estos once números tengo que poder encontrar 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14. Luego, solamente *una* de esas sumas puede *no ser* alguno de los números que van del 5 al 14 (inclusive). Luego, como A, B y C figuran en (*), solamente uno de ellos (o quizás ninguno) *puede ser menor que cinco.*

Por otro lado, si *ninguno de los tres (entre A, B y C) es menor que* 5, entonces la suma (A + B + C) sería mayor o igual que 15 y la suma (A + A + B + C) sería mayor o igual que 20, con lo cual, no serían sumas *queridas.*

Luego, como por un lado, no pueden ser *las tres* mayores o iguales que 5, y por otro lado, no puede haber más que una de ellas menor que 5, se deduce que EXACTAMENTE una de ellas debe ser menor que 5. Las otras dos TIENEN QUE SER mayores o iguales que 5.

Si una de las NO repetidas (digamos B para fijar las ideas) es la carta MENOR que 5, entonces la suma de las tres restantes (A + A + C) es un número mayor o igual que 15, y me paso de 14 que es el número máximo que tengo que conseguir. Luego, se deduce que la carta que TIENE que ser MENOR que 5, tiene que ser A. Pero entonces, como la suma de las cuatro cartas (A + A + B + C) = (2A + B + C) TIENE que ser 14 (porque es el número máximo a conseguir, y ya no me puedo 'pasar' más, porque ya hay uno de los valores de (*) que no es uno de los números que tengo que encontrar), entonces

$$2A + B + C = 14,$$

pero B y C tienen que ser mayores o iguales que 5. Luego,

$$14 = 2A + B + C >= 2A + 10$$

Con lo cual,

4 >= 2A, y por lo tanto, A <= 2

Pero esto no puede ser, porque si no, tanto A como la suma (A+A) <= 4 y sabíamos que SOLAMENTE UNA de las sumas de (*) no estaba entre los números 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

Moraleja: ¡NO PUEDE HABER CARTAS REPETIDAS! Las cuatro cartas que están sobre la mesa tienen que ser TODAS DIFERENTES.

Avancemos un paso más. Ya sabemos que la carta más alta tiene que ser o bien un 4 o un 5 o un 6 o un 7.

- Si la carta más alta fuera un 4, como con las otras tres tengo que llegar a sumar 10 (o más), tiene que haber —por lo menos— otro 4 (si las otras tres cartas fueran menores o iguales que tres, la suma de esas tres cartas, daría a lo sumo 9 y sumado al 4, no me permitiría llegar a 14). Pero esto no es posible porque recién vimos que NO PUEDE HABER CARTAS REPETIDAS, y si esto fuera cierto habría dos números 4. **Moraleja: la carta más alta NO PUEDE ser un 4**
- Si la carta más alta fuera un 5, como alguna de las sumas *tiene* que dar 10, TENGO que usar este 5. Si no, si pudiera sumar 10 con las otras tres cartas, entonces, junto con este 5, sumaría 15 (cosa que está prohibida). Luego, entre las tres cartas que quedan, *dos* tienen que sumar cinco (para poder, junto con el 5, llegar a 10). Y no puede ser que las *tres* sumen 5, porque si no, la suma total de las cuatro cartas daría 10 y en ese caso, no podría levantar con un *uno* por ejemplo. Luego, tenemos una situación así: un 5, dos cartas que suman 5, y la restante, VA A TENER QUE SER

UN 4, porque si no, no podría (con las cartas que están en la mesa) sumar 14. Es decir, tenemos: 5, 4 y dos cartas DISTINTAS que suman 5. Luego, como no puedo usar otra vez el 4, estas dos cartas (que no conozco) tendrán que ser un 2 y un 3, y tendríamos: 2, 3, 4, 5. Pero esta combinación no es posible, porque *no puedo sumar 13*. **Moraleja: la carta más alta NO PUEDE ser un 5**.

- Si la carta más alta fuera un 6, como tengo que sumar *nueve* de alguna forma, esa forma *tiene que incluir el 6*. Si no, tengo un 6, y de alguna forma entre las tres cartas que restan puedo sumar 9, y junto con ese 6, llegaría a 15, cosa que está prohibida. Luego, para sumar *nueve*, *TENGO que usar el 6*. En consecuencia, analicemos los dos casos posibles para sumar *nueve* usando un *seis* y con cartas distintas:
  - Una alternativa es tener 6, 1, 2. Luego, para obtener el 14, necesito tener 6, 1, 2 y 5. Pero con estas cartas no hay forma de sumar 10.
  - La otra alternativa es tener 6 y 3. Si pudiera sumar 12 con las dos cartas que quedan, junto con el 3 llegaría a 15 cosa que está prohibida. Si sumara 12 usando el 6 y no el 3, entonces, al agregarle el 3 llego a 15 también. Si sumara 12 usando el 3 pero no el 6, eso significa que las dos cartas restantes suman 9 (ya que con el 3 llego a 12). Pero si así fuera, entonces esas dos cartas que suman 9 más el 6, llegan a 15 otra vez. En consecuencia, para sumar 12, *no hay otra alternativa que involucrar al 6 y al 3*. O sea, las otras dos cartas que no conozco permiten obtener el número 3. Como no puede haber otro 3 porque no puede haber cartas repetidas, entonces las cartas tienen que ser 1 y 2. Pero en este caso, las cuatro cartas son: 1, 2, 3 y 6... que suman 12 y eso es insuficiente para

lo que queremos hacer. **Moraleja: la carta más alta NO PUEDE ser un 6**.

- Si la carta más alta es un 7, entonces para sumar 8, TENGO que involucrar a este 7. Es que si no, con las otras cartas podría llegar a 8 y junto con el 7 llegaría a 15. Luego, como tengo que usar el 7 para llegar al 8, esto me permite deducir OTRA carta: tiene que haber un *uno*. Para sumar 14 (cosa que necesito porque es uno de los números a los que tengo que acceder), no puedo usar *solamente* las otras dos cartas. ¿Por qué? Es que las otras dos cartas tienen que ser distintas, y a lo sumo podrán ser un 5 y un 6 (ya que el 7 es la carta más alta). Luego, para sumar 14, HACE FALTA usar el 7. Si no usara al número 1, entonces como obtengo 14 con las otras tres cartas, las junto con el 1 y tengo 15. En consecuencia, para sumar 14, no sólo tengo que usar el 7 sino que también tengo que usar el 1. Luego, las otras dos cartas o bien suman 6, o bien tiene que haber un 6.
- Si hubiera un 6, entonces tendríamos: 1, 6 y 7. Como entre las sumas que tengo que obtener está el número 5, entonces la cuarta carta es un 4 o un 5. Si fuera 1, 6, 7 y 4, no puedo sumar el número 9. Y en el caso 1, 6, 7 y 5, no se puede llegar al 10. Luego, eso fuerza a que *no haya un 6 entre las otras dos cartas*. Más aún: la *suma* de las otras dos cartas *tiene que ser seis*.
- Entonces tenemos 1 y 7, y dos cartas que suman seis. Como deben ser TODAS distintas, no pueden ser ambas 3. Tampoco puede ser 1 y 5, porque repetiría el 1. Luego, las dos cartas que faltan tienen que ser 2 y 4.

Moraleja (FINAL): las cuatro cartas son

1, 2 , 4 y 7

y estas cuatro cartas son las ÚNICAS que permiten resolver el problema[58].

Nota 1: estoy seguro de que mucha gente que intentó hacer este problema llegó a la solución *sin necesidad* de hacer todo el análisis que figura anteriormente. Sin embargo, resolverlo de esta forma permite afirmar con seguridad y tranquilidad que (1, 2, 4, 7) es la ÚNICA solución posible con cuatro cartas.

Nota 2: ¿Y si se permitieran cinco cartas? ¿Habrá solución en ese caso? Y si la hubiere, ¿será única?

(Solución al problema de las cinco cartas: 6, 1, 2, 5 y 5... eso resuelve el caso de cinco cartas con las que se puede sumar cualquier número entre 5 y 14, y no se puede sumar 15.) (¿Será única esta solución?)[59]

El problema me parece interesante, pero me da la impresión

---

58. El origen y el crédito TOTAL de esta historia se debe a mi querido amigo Juan Sabia. Él me propuso el problema, él fue el que me 'empujó' para que lo pensara y a él le corresponde todo el reconocimiento. El problema es precioso porque exhibe toda las herramientas que uno *debería* tener que usar si quisiera *demostrar* que la única combinación posible de cuatro cartas que resuelve el problema es la que aparece en la solución.

59. Cuando Carlos D'Andrea leyó el problema, me escribió un mail con estas observaciones que le sugiero que no se las pierda. 'Atacan' la solución que yo escribí y exhiben la potencia que tiene el uso de computadoras y ordenadores para resolver problemas de este tipo. Hice un programa en Mathematica que te calcula todas las soluciones, y me devolvió esto:
{{1, 1, 1, 4, 7}, {1, 1, 2, 3, 7}, {1, 1, 2, 4, 6}, {1, 1, 2, 5, 5}, {1, 1, 3, 3, 6}, {1, 1, 3, 4, 5}, {1, 1, 4, 5, 7}, {1, 1, 5, 5, 7}, {1, 2, 2, 2, 7}, {1, 2, 2, 3, 6}, {1, 2, 2, 4, 5}, {1, 2, 3, 3, 5}, {1, 2, 3, 4, 4}, {1, 2, 5, 5, 6}, {1, 3, 3, 4, 6}, {1, 3, 3, 5, 5}, {1, 3, 4, 4, 5}, {2, 2, 3, 3, 6}, {2, 2, 3, 4, 5}, {2, 2, 4, 5, 5}, {2, 3, 3, 4, 4}, y {2, 3, 3, 5, 6}}

de que la solución es bastante larga, y seguramente va a perder a mucha gente. Desde un punto de vista matemático esto de perseguir un árbol de posibilidades para encontrarse con la única solución tiene algún valor educacional, pero no puedo evitar pensar que en menos de la octava parte de lo que tardé en leer y entender el planteo de la solución pude hacer un programa en un ordenador que hizo lo mismo en 3 segundos...

Curiosamente, Mathematica dice que no importa si tenés cartas de 1 a 10, podrías tener cartas de 1 a 30 que también hay una única solución al problema del mínimo: se alcanza con 4 cartas y es {1, 2, 4, 7}... Esto también es razonable porque con cartas por arriba del 15 el juego de la escoba de 15 no tiene gracia :-)

Escoba de 15 (parte 2)

Una pregunta más sobre la escoba de 15.

"¿Cuál es el número ***máximo*** de cartas que puede haber sobre la mesa sin que sumen 15?"

Más aún: ¿cuáles serían esas cartas?

Solución

Por motivos prácticos, consideremos las cartas como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (es decir, el 8 es la sota, el 9 el caballo y el 10 el rey).

Una forma de *no* sumar 15 en la mesa es que todas las cartas sean pares, ya que suma de números pares resulta siempre un número par. Por lo tanto, nunca dará 15.

En el mazo de 40 cartas, hay 20 cartas pares y 20 impares. Luego, puedo empezar poniendo sobre la mesa *las 20 cartas pares*. Como estamos buscando el *máximo* número de cartas que se puedan tener sobre la mesa sin sumar 15, ya sabemos que ese máximo es —por lo menos— veinte cartas.

Ahora, ¿qué pasará en un grupo cualquiera de 20 cartas (o más) que tenga alguna carta impar? ¿Será verdad que *siempre* habrá algunas que sumen 15? ¿O será que si hay una carta impar no puede haber VEINTE CARTAS sobre la mesa de manera tal que NO SUMEN 15?

Le pido que me acompañe a analizar algunos casos.

Si en un grupo de 20 cartas o más, hay un 5 y no hay cartas que sumen 15, entonces:

- No puede haber ningún 10 (porque si no, junto con el 5 sumarían 15). Luego, al excluir los 10, ***hay cuatro cartas menos***.
- Si hay un 9, entonces no puede haber un *1*. Es que si hay un 9 y un 1, junto con el 5 sumarían 15. Lo mismo sucede al revés: si hay un 1, no puede haber un 9. Luego, o hay que excluir los 9 o los *ases*. En cualquier caso, ***hay cuatro cartas menos***.
- La misma relación que hay entre los 9 y los *ases*, existe entre los *8 y los* 2. Si hay un 8 no puede haber un 2, o si hay un 2 no puede haber un 8. Corolario: ***hay otras cuatro cartas menos.***
- De la misma forma están relacionados los 7 y los 3. Por lo tanto, ***hay otras cuatro cartas menos.***
- Por último, también están *ligados*, los 6 y los 4. Luego, ***hay otras cuatro cartas menos.***
- Por último, si bien hay un 5, a lo sumo puede haber *dos números* 5. Si hubiera tres, sumarían 15.

Moraleja 1: si entre las cartas que están arriba de la mesa hay un número *cinco* y *no hay manera de sumar 15 eligiendo algunas de ellas*, entonces hay 22 cartas que NO PUEDEN ESTAR, llevando el máximo posible a ¡18 cartas! En consecuencia, si hay un *cinco* no se puede mejorar el máximo que se obtiene con todas las cartas pares.

Ahora analicemos el caso en el que uno tiene cartas arriba de la mesa de manera tal que:

a) no importa que subgrupo de ellas yo elija, no voy a poder sumar 15;
b) al menos una de las cartas tiene que ser un número 7. Entonces:

- No pueden estar los *ochos* (si no, junto con el 7 sumarían 15). Luego, ***hay CUATRO cartas menos***.
- Los *10* y los 5 están relacionados. Para no tener que excluir los 10, es preferible excluir los 5. Es que si optamos por quedarnos con los 5, entonces no se podrían poner más que dos (ya que con el tercero sumarían 15). Luego, quedan 'afuera' los 5. ***Hay CUATRO cartas menos.***
- O bien no hay números **6** o bien no hay números **2.** Es que si hubiera simultáneamente un **6** y un **2**, junto con el 7, sumarían 15. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- Hay a lo sumo ***un*** número **4.** Es que si hubiera dos, junto con el 7 sumarían 15. ***Luego, hay TRES cartas menos.***
- O no hay ningún ***1*** o no hay más que *un solo* número **7.** Luego, ***hay TRES cartas menos.***
- De la misma forma, o bien no hay ningún **9,** o no hay más que ***un solo*** número **3.** Luego, ***hay TRES cartas menos.***

Moraleja 2: si entre las cartas que están arriba de la mesa no se puede sumar 15, y además una de ellas es un 7, entonces hay 21 cartas que no pueden estar. En consecuencia, si hay un 7, a lo sumo hay ¡19 cartas! Luego, si hay un 7 no se puede mejorar el máximo que se obtiene con todas las cartas pares. Si en el grupo de cartas que están arriba de la mesa no se puede sumar 15 y entre ellas hay un 3, entonces:

- Al haber un número **3**, los números ***10*** y los ***dos*** están relacionados (porque con el tres suman 15). O no hay ***10*** o no hay **2**. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- Por la misma razón, los *8* y los ***4*** están relacionados también (por el 3). O bien no hay **8**, o bien no hay ***4***. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- A lo sumo puede haber ***un*** *solo* número **6**. (Es que si hubiera dos números **6**, junto con el 3 sumarían 15.) Luego, ***hay TRES cartas menos.***
- Al haber dejado o bien los 8 o bien los 4, ***no** puede haber números* 7. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- También hay una relación entre los 9 y el 3. Si están los 9 entonces *puede haber* **un solo número 3** (si hubiera dos o más, sumarían 15). Entonces, dejo los 9 y excluyo los 3. Luego, ***hay TRES cartas menos.***
- Si en el primer ítem dejamos los 10, entonces ***no*** puede haber **5**. Si dejamos los cuatro números **2**, *con tres de ellos*, junto con el *6 y el* 3, *formamos 15*. En consecuencia, conviene quedarse con los cuatro ***10***. Pero si es así, ***tenemos que excluir los 5***. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***

Moraleja 3: si entre las cartas que están arriba de la mesa no se puede sumar 15 y entre ellas hay un 3, entonces hay 22 cartas que no pueden estar. Por lo tanto, a lo sumo hay ¡18 cartas! Luego, si hay un 3 no se puede mejorar el máximo de 20 cartas si éstas son todas pares. Si entre las cartas que están arriba de la mesa no se puede sumar 15 y una de ellas es un número *1*, entonces:

- Los 8 y los 6 están relacionados de manera tal que *hay* que prescindir de alguno de los dos. Es que si hubiera *un* 8 *y un* 6, *junto con el 1 sumarían 15*. Luego, ***hay CUATRO cartas***

menos. Pero conviene dejar los cuatro 8, porque si incluyo los 6, tengo que excluir también a los 9. Corolario: ***quedan los CUATRO números 6 afuera.*** (Y hasta acá, quedan incluidos los 8 y los 9).

- Pero al quedar los 8, entonces *no puede haber ningún* 7. Luego, ***hay CUATRO cartas menos***.
- Con el mismo argumento que en los ítems anteriores, los *10* y los *4* están relacionados porque hay un *1.* Si quedaran los *10*, entonces habría que excluir los 5 *con lo que excluiríamos OCHO cartas.* En cambio, si quedaran los *4*, entonces podríamos quedarnos con *un solo* 5 (si hubiera dos, junto con el *1* y un 4, sumarían 15). Conviene entonces que queden los *4 y un 5* pero deben quedar afuera *todos los 10 y tres de los* 5. En total, quedan **SIETE cartas menos.**
- No puede quedar ningún 2, porque si lo hubiere, junto con el 5 y cualquiera de los 8 sumarían 15. Pero aun así, *no puedo dejar ningún* **2,** porque junto con un 4 y un 9 sumamos 15. Luego, quedan excluidas **CUATRO cartas menos (todos los números 2).**
- Por último, solamente puede haber *un solo* 3, ya que si hubiera dos (o más), sumarían seis y junto a cualquier número 9 terminarían sumando 15. Luego, ***hay TRES cartas menos.***

Moraleja 4: si entre las cartas que están arriba de la mesa no se puede sumar 15 y entre ellas hay un *1*, entonces hay 22 cartas que *no pueden estar*. Es decir, a lo sumo hay 18 cartas. Luego, si hay un *1* entre ellas, no se puede mejorar el *máximo* de 20 cartas si éstas son todas las pares.

Por último, falta considerar el caso en que tengamos un grupo de cartas arriba de la mesa de manera tal que no se pueda sumar 15 y entre ellas hay un número **9**, *entonces*:

- Al haber un número 9, no puede haber ningún 6. Luego, ***hay CUATRO cartas menos***.
- Al haber un número 9, puede haber *un solo número* **3.** Luego, ***hay TRES cartas menos.***
- Los *4* y los 2 están relacionados por la existencia del 9. *Luego*, ***hay CUATRO cartas menos.*** Pero si quedan los 4, con tres de ellos y el número 3, sumarían 15. Luego, los *4* quedan excluidos y quedan los números 2. Pero tampoco conviene que estén los 2, porque tres de ellos suman seis y con el 9 sumarían 15. Como el 9 no lo podemos tocar, conviene entonces EXCLUIR al único 3 que había, **dejar los *4***, *pero en lugar de excluir solamente TRES de los números* 3, sacarlos a todos. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- O bien están los *10* o bien los 5. Pero en el caso de que quedaran los números 5, podrían quedar nada más que dos de ellos y los otros dos no. Entonces, conviene dejar los *10, y excluir los números* 5. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- **No puede haber ningún número *1.*** Es que como quedaron los números 4, *junto con uno de ellos y los diez sumarían 15*. Luego, ***hay CUATRO cartas menos.***
- Por último, o bien hay que excluir los 7 o bien los 8. Luego, hay ***CUATRO cartas menos.***

Moraleja 5: si entre las cartas que están arriba de la mesa no se puede sumar 15 y entre ellas hay un **9**, entonces hay 22 cartas que *no pueden estar.* Es decir, a lo sumo hay 18 cartas. Luego, si hay un 9 entre ellas, no se puede mejorar el *máximo* de 20 cartas si éstas son todas las pares.

Respuesta final

El número máximo de cartas que se pueden tener arriba de la mesa sin que sumen 15 es de veinte cartas, y hay una *única* manera de hacerlo: tener las 20 cartas pares.

Tres caras y tres cecas: ¿qué es más probable?

El siguiente problema es *fascinante*. Bueno, al menos a mí me pareció que lo era. En principio, creo que sirve para mostrarnos cuán poco sabemos sobre el azar. Es decir, cuando uno tiene que hablar de que algo se produjo *al azar*, tiene una *idea personal* de lo que significa, algo que se fue forjando a lo largo del tiempo. Pero después, cuando tiene que confrontar esa idea con la realidad, las cosas cambian. Vea si no.

Supongamos que yo le planteara la siguiente situación: voy a tirar una moneda diez veces seguidas. Le voy a ofrecer dos alternativas para que usted elija cuál de las dos le parece más probable:

a) que salgan tres caras o tres cecas consecutivas, o bien
b) que *no* salgan tres caras o cecas consecutivas.

¿Qué es lo que usted cree que es más probable: la posibilidad (a) o la posibilidad (b)?

Más allá de leer lo que sigue, le propongo que se detenga un momento para poder pensar qué contestar. ¿Por cuál de las dos alternativas se inclina usted? ¿Qué le dice su *intuición*?

Respuesta

¿Cómo se puede pensar este problema? Le ofrezco un camino que me resultó útil a mí, pero no significa que sea ni el único ni muchísimo menos *el mejor*. Más aún: ni siquiera sé si es el más corto. Lo que *sí* sé es que es *un* camino conducente a contestar la pregunta.

Mi idea es ésta: si uno va a tirar una moneda diez veces seguidas y quiere dar una respuesta educada a la pregunta, necesita poder contestar antes:

- ¿cuántos resultados posibles se pueden obtener?
- del total de resultados posibles, ¿cuántos hay con tres caras y/o tres cecas?

Si somos capaces de contestar estas dos preguntas, tenemos resuelto el problema, ya que habremos averiguado si hay más posibilidades de que la moneda caiga tres veces consecutivas del mismo lado, de que esto *no* ocurra.

La parte (a) es la más sencilla: los resultados posibles al tirar una moneda son 'cara' (que voy a denominar con una letra C) o 'ceca' (para la que voy a usar una letra X). Por lo tanto, hay *dos* posibles resultados por tirada. Si la tirara dos veces, habría cuatro resultados posibles:

XX, XC, CX y CC.

Si la tirara tres veces, habría ocho posibilidades:

XXX, XXC, XCX, XCC, CXX, CXC, CCX y CCC.

O sea, al aumentar el número de tiradas, *se duplica* la cantidad de posibilidades (le sugiero que piense por su cuenta que lo que escribí más arriba es correcto, antes de avanzar en la lectura).

Por lo tanto, si uno tira una moneda *diez* veces, el número de posibles resultados es:

$$2^{10} = 1.024$$

Esta parte fue bastante sencilla. La dificultad se traslada ahora en saber ¿cuántas de estas 1.024 posibilidades incluyen *tres caras o tres cecas* consecutivas?

Creo que ésta es una de las partes más atractivas del problema. Acá es donde necesito hacer una reflexión: si usted sigue leyendo, se encontrará con una forma de avanzar hacia la solución que pensé yo. Eso le va a quitar la posibilidad de que la descubra por su cuenta. Dicho de otra forma: si lee lo que sigue, y lo entiende, le servirá para saber cómo hizo *otro* para resolver la situación. En cambio, si se da tiempo, y se tiene *paciencia* a usted misma/mismo, aunque no llegue a la respuesta correcta, habrá descubierto el grado de dificultad que tiene. Después, podrá corroborar si estuvo bien o mal, y podrá descubrir que quizás usted encontró un método mejor, más corto, más elegante... o no, pero en definitiva... ¿qué importaría? ¿Quién impediría que sintiera la satisfacción de haberlo pensado en soledad?

Después de esta digresión, le sugiero que me siga con lo que pensé yo: estamos tratando de contar, entre las 1.024 posibles maneras de que caiga una moneda al tirarla diez veces, cuántas hay con tres caras y/o tres cecas seguidas. Lo que yo pensé es *empezar por contar las que* NO *contienen ni tres caras ni tres cecas seguidas*. Si encontramos ese número, todo lo que tendremos que hacer es *restarlo* de 1.024, y el resultado serán las que SÍ contienen las tres caras o tres cecas seguidas.

Una vez entendido eso, veamos cómo se componen las que NO contienen tres consecutivas que hayan salido cara ni ceca.

¿Cómo son las *tiras* de resultados posibles? Pongamos algunos ejemplos:

a) XXXCXCXCCC
b) XCXCXCXCXC
c) XXXXXXXXXX
d) CCCCCCCCCC
e) CCXXCCXXCC

Es decir, se trata de 1.024 formas posibles de combinar las C y las X en tiras de diez. ¿Cómo hago para contar las que *no* tienen ni tres X ni tres C seguidas?

Supongamos que llegamos hasta una fila de *nueve* tiradas que no contienen tres seguidas. Puede terminar en una X o en una C. Fabriquemos una de diez (que tampoco tenga ni tres caras ni tres cecas seguidas) de la siguiente forma: si la tira de nueve termina en una X, ponemos una C. Si la de nueve termina en una C, ponemos una X. De esta forma, ***todas*** las de nueve sin tres repeticiones[60], generan una de diez sin repeticiones.

Una pausa entonces: hemos *descubierto* que *todas* las *tiras* de nueve sin repeticiones, generan *una de diez* sin repeticiones. Pero, ¿serán todas? Es decir, ¿las de diez sin repeticiones serán solamente las que venían de nueve sin repeticiones pero cambiándoles la condición al final? (le sugiero que piense usted la respuesta).

60. Por *repetición* entiendo que aparezcan o bien tres caras o bien tres cecas consecutivamente.

Sigo yo. La respuesta es que *no*. ¿Por qué? Es que cualquier tira de diez que termine en XX o en CC no la podemos 'encontrar' con el método anterior (como una de nueve en la que ponemos en el lugar *diez* lo contrario de lo que había en el lugar *nueve*).

Veamos. ¿Cuáles pueden ser los tres últimos resultados de cada tira de diez sin repeticiones?

Pueden terminar así:

a) CXX
b) CXC
c) CCX (*)
d) XCC
e) XCX y
f) XXC

¿Por qué solamente pueden terminar en esos valores? Es que los dos únicos casos que faltarían, son los que terminan en CCC o en XXX. Pero estos dos no pueden darse, porque estamos contando *solamente* los que no tienen tres repetidos. Luego, no hay más combinaciones que las que figuran en (*).

Los casos (b), (c), (e) y (f) se obtienen con las de nueve como indiqué más arriba: uno agrega una X cuando termina en C, o una C cuando termina en X.

Pero como se ve, todavía me faltan los casos (a) y (d), ya que ésos no están contemplados en los que agregué de las tiras de nueve. ¿Qué hacer? Bien, en este caso, tomemos las tiras que contienen *ocho* valores de X y de C sin tres repeticiones. Pueden terminar en X o en C. Si terminan en C, les agrego dos X. Si terminan en X, les agrego dos C.

De esa forma, incorporo los casos (a) y (d) que me faltaban, y las tiras de *ocho* también generan parte de las de diez.

Resumiendo: las tiras de diez valores que *no* tengan tres repetidas (consecutivas) se obtienen sumando las que había de *nueve* sin tres repeticiones, más las que había de *ocho* sin tres repeticiones. ¡Y esto es algo muy importante!

De la misma forma, yo podría haber usado ese mismo argumento mucho antes. Es decir, las tiras de *tres* sin repeticiones, se obtienen sumando las que había de *dos* más las de *uno*. Las de *cuatro*, sumando las que había de *tres* y de *dos*. Y así siguiendo.

Calculemos todas entonces.

Si tiro la moneda *una* vez, se tienen 2 casos[61]. Si la tiro dos veces, tampoco puede haber repeticiones, y en ese caso hay 4 alternativas.

¿Cómo hago para calcular las de 3 tiradas? Sencillo, sumando las de 1 y las de 2, que eran 2 y 4 respectivamente. Moraleja: las de 3 tiradas, que *no* contengan tres repetidas consecutivas son: $2 + 4 = 6$.

O sea, uno se va construyendo una sucesión de números, en donde los dos primeros son 2 y 4, y los restantes se van obteniendo al sumar los dos que le preceden. Sígame y fíjese si está de acuerdo con esta sucesión:

$$2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178 \qquad (**)$$

Es que el 6 se obtiene sumando 2 y 4. El siguiente, el número 10, aparece como la suma de los dos anteriores: 4 y 6. Luego el 16, aparece como suma de 6 y 10. Y así siguiendo.

¿Qué hemos descubierto? En total, el número de posibles tiras de diez valores que combinan X y C que *no* contienen tres caras ni tres cecas consecutivas, es de 178.

61. En este caso, como en el de dos monedas, no tiene sentido preguntarse si hay tres repetidas porque ni siquiera hay tres tiradas en juego.

Luego, si uno quiere calcular las que SÍ tienen tres consecutivas, lo que tiene que hacer es restar 1.024 - 178 = 846. Es decir, de los 1.024 posibles resultados, ¡846 ofrecen o bien una cara o una ceca repetida tres veces consecutivamente, y solamente 178 que no!

Si ahora uno quiere contestar la pregunta original dice: es *muchísimo más probable* que salgan tres caras o tres cecas consecutivas que que *no* salgan, y esta diferencia de probabilidades está medida por estos datos:

$$178/1.024 = 0.17382813\ldots$$

y

$$846/1.024 = 0.82617188\ldots$$

En términos de porcentajes, hay más de un 82,5% de posibilidades de que *sí* salgan tres caras o tres cecas consecutivas, de que *no* salgan, para lo que hay *un poco más del 17,38% de los casos.*

Varias observaciones finales.

Primero, ¿qué había pensado usted?, ¿qué le decía su intuición?, ¿cuánto creyó que esto podía ser posible?

Segundo, y muy importante: para poder determinar el número de formas posibles en los que al tirar diez veces una moneda *no* aparezcan ni tres *caras* ni tres *cecas* consecutivas, utilicé lo que sabía de dos casos anteriores. ¿De cuáles? Usé los casos donde se tira la moneda *ocho* y *nueve* veces respectivamente. Esa información, que yo ya conocía, me permitió deducir lo que sucede cuando se arroja una moneda *diez* veces. La sucesión que figura en (**),

2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178…

se llama sucesión de Lucas[62] y cada término (salvo los dos primeros) se generan sumando los dos anteriores.

Por otro lado, si uno quisiera saber qué pasaría en el caso de 20 tiradas, lo que se podría hacer es avanzar en la sucesión diez pasos más:

2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754,
1.220, 1.9794, 3.194, 5.168,
8.362, 13.530, 21.892

Por lo tanto, como 2^{20} = 1.048.576, entonces la probabilidad de que *no* salga una tira de tres caras o tres cecas consecutivas al tirar una moneda *veinte* veces es:

21.892/1.048.576 = 0.02087784…

o sea un poquito más de un 2% de las veces. En cambio, de que SÍ salga una terna de caras o cecas consecutivas es de

1.048.576 - 21.892 = 1.206.684

1.206.684/1.048.576 = 0.97912216…

o sea, casi un 98% de las veces.

62. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es una sucesión de Lucas si se conocen los dos primeros términos, y los siguientes cumplen con la siguiente condición de recurrencia: an = $a_{(n-1)} + a_{(n-2)}$. Hay un caso muy famoso de la sucesión de Lucas, y es la sucesión de Fibonacci. En este caso particular, los dos primeros términos a_1 y a_2 son ambos iguales a 1, y la sucesión 'empieza' así: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, etcétera.

Es bueno, entonces, revisar la idea que uno tiene del *azar*, de cómo funciona, y sobre todo, de hacer bien las *estimaciones/cuentas*, de manera tal de saber qué esperar.

¿Qué números naturales se pueden escribir como suma de números consecutivos?

Me explico. Tomemos por ejemplo el número tres. Como usted advierte, el número tres se puede *descomponer* así:

$$3 = 1 + 2.$$

Como los números 1 y 2 son consecutivos, al sumarlos generan el número 3 que por lo tanto, pertenece *a la categoría* de números que se pueden obtener sumando dos consecutivos.

Otro ejemplo: el número 14 *también* se puede obtener así. Es que

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5.$$

Y hay muchísimos otros que se obtienen sumando números consecutivos de diferentes formas. Por ejemplo, el número 15, se puede obtener así:

- $15 = 7 + 8$
- $15 = 4 + 5 + 6$
- $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Es decir, hay *muchos* números que se pueden obtener como consecutivos y esta descomposición *no es única*.

Los matemáticos andamos siempre a la búsqueda de *patrones generales* y por lo tanto, aparece la pregunta inmediata: ¿será verdad que *todo* número natural se puede obtener como suma de dos o más números consecutivos?

Y la respuesta es... ¡no! Es fácil encontrar rápidamente algunos ejemplos.

A continuación escribo una lista con los primeros veinte números, pero le sugiero que empiece usted una por su cuenta, para ver hacia dónde la/lo lleva.

1: excluido
2: excluido
3: = (1 + 2)
4: no se puede
5: = (2 + 3)
6: = (1+2+3)
7: = (3+4)
8: no se puede
9: = (4+5)
10: = (1+2+3+4)
11: = (5 + 6)
12: = (3 + 4 + 5)
13: = (6 + 7)
14: = (2 + 3 + 4 + 5)
15: = (7 + 8) = (4 + 5 + 6) = (1+2+3+4+5)
16: no se puede
17: = (8 + 9)
18: = (5 + 6 + 7)

19: = (9 + 10)
20: = (2 + 3 + 4 + 5 + 6).

Esta lista es sugerente. Los números que han quedado excluidos son el 4, el 8 y el 16. ¿Qué tienen en común todos ellos? Sí, son todas *potencias* del número 2. Es decir, tanto el 4 como el 8 como el 16 se obtienen multiplicando varias veces el número 2.

$$4 = 2 \times 2$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Uno está tentado entonces de conjeturar que si un número es una potencia de 2, entonces *no se podrá escribir como suma de números consecutivos.* ¿Será verdad esto?

Por supuesto, está invitada/invitado a pensarlo por su cuenta. Yo voy a escribir acá algunas ideas que le sugiero que no lea ahora si es que quiere pensarlo en soledad. Acá van.

Fíjese en el siguiente hecho: cuando usted quiere calcular el *promedio* entre cinco números, ¿qué hace? Lo que uno puede hacer, es *sumar* todos los números y dividirlo por la cantidad que hay: cinco. Si quisiera calcular el *promedio* entre 23 números, lo que uno podría hacer es *sumar* los veintitrés números y dividir el resultado por 23. Y así en todos los casos.

Por lo tanto, si se trata de calcular el promedio (que voy a llamar *P*) entre N números (que voy a llamar A_1, A_2, A_3, …., A_N), la fórmula que usa más frecuentemente es la siguiente:

$$P = (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_N)/N. \qquad (^*)$$

De esta igualdad uno deduce que la *suma* de esos *N* números, se puede obtener multiplicando el promedio por la cantidad de números. Es decir:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_N) = P \times N. \qquad (^{**})$$

Todo lo que hice fue *pasar* multiplicando la cantidad de números *N* hacia el otro lado de la ecuación.

Ahora usemos la igualdad que figura en (**) para tratar de deducir lo que queremos, o sea, que si un número *es una potencia* de 2, entonces *no se podrá escribir como la suma de números consecutivos.*

Primero, quiero proponerle que calculemos juntos el promedio de varios números consecutivos. Por ejemplo, si quisiéramos calcular el promedio de estos siete números:

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \qquad (^{***})$$

como vimos antes, lo que uno puede hacer es sumarlos y dividir por la cantidad de números (siete en este caso). O sea,

$$P = (3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)/7 = 42/7 = 6.$$

De la misma forma, el promedio de

$$\{15, 16, 17, 18, 19\}, \qquad (^{****})$$

se calcula sumando y dividiendo por cinco:

$$P = (15 + 16 + 17 + 18 + 19)/5 = 85/5 = 17.$$

Lo curioso de este hecho, es que cuando uno tiene que calcular el promedio entre una cantidad ***impar*** de números consecutivos, la forma más sencilla de hacerlo es fijarse cuál es el número del medio. En el caso (***) el número del medio es 6, mientras que en el caso (****) el número del medio es 17. Le sugiero que trate de convencerse haciendo algunas cuentas y proponiéndose a usted misma/mismo algunos ejemplos.

¿Y qué sucede cuando uno tiene que calcular el promedio de una cantidad ***par*** de números consecutivos? Miremos algunos ejemplos para ver si podemos conjeturar alguna propiedad general.

Para calcular el promedio de

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad (^{o})$$

hay que sumar estos números y dividirlos por seis. O sea,

$$P = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3{,}5.$$

Otro ejemplo: si queremos calcular el promedio de

$$\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}, \qquad (^{oo})$$

entonces, sumamos estos números y al resultado lo dividimos por *ocho*. O sea,

$$P = (12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19)/8 = 124/8 = 15{,}5.$$

¿Qué le sugieren estos dos ejemplos? Ahora ya no se puede buscar el promedio como el número del 'medio' porque hay una cantidad par de números. Sin embargo, si uno toma 'los dos del medio' y calcula 'el promedio de esos dos', entonces *sí* se obtiene el promedio.

En el caso (º), los dos números del medio son 3 y 4. Los sumamos (3 + 4 = 7) y dividimos por dos y se obtiene 3,5 que es el promedio de esos cuatro números. De la misma forma, los dos números del medio en el caso (ºº) son 15 y 16. Los sumamos (15 + 16 = 31) y dividimos por dos, y se obtiene 15,5 que es el promedio.

Estos resultados son ciertos en general, o sea, cualquiera sea la cantidad de números consecutivos de los cuales uno quiera calcular el promedio, si es una cantidad *impar*, el promedio resulta ser *el número del medio*, y si es una cantidad *par*, entonces es la suma de los dos del medio dividido por dos[63].

---

63. En el caso impar, busque el número del medio. "Párese" allí y fíjese que si usted suma los dos que tiene al costado obtiene el doble del número que hay en el medio. Siga recorriendo los números tomándolos de a pares, eligiendo uno que está a la derecha y otro hacia la izquierda y si los suma verá que vuelve a obtener el doble del número del medio. Si llamamos A al número del medio, y suponemos (por ejemplo) que hay *siete* números en total, la suma de *todos* los números será igual a 7A, ya que la suma de todos los que están al costado de A suman en total 6A y al agregarle el A del medio, se llega a 7A. Luego, al dividirlo por *siete* se obtiene el número A. Otro ejemplo ilustrativo: si la cantidad de números fuera 21, la suma de *todos* los números que están *alrededor* de A resultaría ser 20A. Al agregarle el A del medio, la suma resulta ser 21xA. Al dividirlo por 21, se obtiene A —el número del medio— como habíamos *anunciado* antes. En el caso de que haya un número *par* de números, el promedio se calcula sumando *los dos* del medio y dividiéndolo por *dos*. Es que si se trata de calcular el promedio de (por ejemplo) de {(a - 2), (a - 1), a, (a + 1), (a + 2) y (a + 3)} lo que hay que hacer es sumarlos y dividir por seis. O sea {(a - 2) + (a - 1) + a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3)}/6. Pero si uno suma los dos del medio {a y (a + 1)}, se obtiene (2a + 1), y al ir yendo hacia la derecha y la izquierda como hicimos en el caso

Bien. Ahora, con todos estos datos estamos en condiciones de *demostrar* que ninguna potencia de dos puede obtenerse como suma de números consecutivos. Veamos por qué.

Supongamos que para algún número *n*, fuera cierto que 2^n se pudiera descomponer como suma de números consecutivos. O sea, se tendría la siguiente igualdad:

$$2^n = (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_N).$$

Pero como ya vimos en (**), este número se puede escribir también como el producto de su promedio *P* y de la cantidad de números N. O sea,

$$2^n = (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_N) = P \times N.$$

Ahora analicemos esta última igualdad:

$$2^n = P \times N. \qquad (^{ooo})$$

Si estos dos números (P y N) fueran números naturales, tendrían que ser los dos números pares (ya que 2^n no puede tener factores *impares*).

En el caso en que N fuera un número impar, P resultaría ser ‘el número del medio’, y por lo tanto, es un número natural. Dicho esto, por la fórmula (^{ooo}), se tendría que 2^n tiene un factor *impar*, y eso es imposible.

---

impar eligiendo uno de cada lado, la suma resulta ser *siempre* (2a + 1). En este caso, cuando son seis números, se obtiene tres veces (2a + 1), o sea {3(2a + 1)}. Luego hay que dividir este número por *seis*, y se obtiene 3(2a + 1)/6 = (2a + 1)/2, que es lo que queríamos demostrar.

Por otro lado, si hubiera una cantidad *par* de sumandos, entonces ya sabemos que el promedio se calcula sumando los dos números 'del medio' y dividiéndolos por dos. Pero si bien no sabemos cuáles serían esos dos números (los del 'medio') sí sabemos que son *consecutivos*. Por lo tanto, P se calcula como:

$$P = (A + (A + 1))/2 = (2A + 1)/2,$$

donde A y (A+1) son los dos números del 'medio'.

Si ahora reemplazamos esta igualdad en la ecuación (ººº), se tiene:

$$2^n = P \times N = (2A + 1)/2 \times N = (2A + 1) \times (N/2).$$

Pero esto es una contradicción porque el número (2A + 1) es un número impar y, por lo tanto, *¡no puede dividir a una potencia de dos!*

Es decir, en cualquiera de los dos casos, tanto si el número N fuera impar o par, resultaría imposible que un número que sea una potencia de dos se escribiera como suma de números consecutivos, y justamente eso era lo que queríamos mostrar.

Ahora, una pausa para reflexionar un instante. Ya hemos probado que si un número se *puede* descomponer como suma de números (naturales) consecutivos es porque ese número *no es* una potencia de dos.

Lo que me interesaría hacer con usted ahora es convencernos de que en *cualquier otro caso*, o sea, cualquiera sea el número *n*, si NO es una potencia de *dos*, entonces *sí* se puede escribir como suma de números naturales consecutivos.

Es decir, una vez que nos hayamos convencido de este hecho, habremos probado que los *únicos* naturales que *no se pueden* escribir como suma de naturales consecutivos son las potencias de dos.

Sin embargo, antes de avanzar en esta dirección, quiero detenerme un instante para contar una historia breve pero muy ilustrativa. Este problema lo empecé a pensar (y a escribir) en el mes de octubre del año 2012. Fue Juan Pablo Pinasco quien lo propuso para que lo hiciéramos en alguno de los programas de *Alterados por PI*, que habríamos de grabar en noviembre de ese año en alguna de las escuelas públicas de la Argentina.

Cuando llegué a este punto en la demostración, me faltaba encontrar la forma de mostrar que cualquier número natural n que no fuera una potencia de dos se podía escribir como suma de números naturales consecutivos. Y después de pensar bastante, encontré la 'tal' forma. El problema es que si bien tenía la respuesta, la demostración que yo había encontrado no me parecía 'elegante', clara. Cada vez que paso por una situación similar, suelo recurrir a quienes son mis compañeros de ruta en todo este camino que sirve para la divulgación de la matemática: Alicia (Dickenstein), Juan (Sabia), Carlos (D'Andrea), los dos 'Pablos' (Milrud y Coll), Manu (Ginóbili), Cristian (Czubara), Teresa (Krick), Gary (Crotts), Kevin (Bryson), Gerry (Garbulsky), Santiago (Bilinkis), por poner algunos ejemplos. Cuando apelo a ellos, no les mando lo que yo pensé para no *distorsionar* ni *desviar* lo que ellos puedan pensar. Ellos suelen *mirar* los problemas desde otro lugar y —en general— me aportan ideas que yo no hubiera tenido. No fue distinto esta vez.

Carlos le propuso el problema a dos matemáticos que son colegas de él en la Universidad de Barcelona: Martín Sombra y Juan Carlos Naranjo. Carlos y Martín me aportaron soluciones muy parecidas a la mía y ellos mismos intuían que tenía que haber alguna otra forma. Y la había. Fue Juan Carlos quien resolvió el problema en pocos renglones, proveyendo una solución preciosa, elegante y constructiva.

La voy a escribir acá y ahora, pero más adelante, voy a escribir también 'mi' solución, para que usted pueda comparar y coincidir con mi opinión.

Ahora sí, sigo con el problema propiamente dicho.

Solución de Juan Carlos Naranjo

Tomemos un número natural *n* cualquiera, pero que **no** sea una potencia de dos. Por lo tanto, el número *n* tiene que poder escribirse así:

$$n = 2^m (2k + 1),$$

en donde el 'exponente' m , indica la *mayor* potencia de 2 que lo divide.

Por ejemplo, si $n = 30$, entonces,

$$n = 2 \times 15 = 2\ ((2 \times 7)+1)$$

En este caso, el exponente $m = 1$.

Si $n = 28$, entonces

$$n = 4 \times 7 = 2^2 \times 7 = 2^2 \times ((2 \times 3) + 1)$$

En este caso, el exponente $m = 2$.

Otro ejemplo: si $n = 112$, entonces,

$$n = 16 \times 7 = 2^4 \times 7 = 2^4 \times ((2 \times 3)+1)$$

En este caso, el exponente $m = 4$.

Lo que voy a hacer ahora, es mostrar como *cualquier* número natural que se escriba como $n = 2^m (2k + 1)$, se puede escribir como suma de números naturales consecutivos.

Si $m = 0$, entonces

$$2k + 1 = k + (k + 1).$$

Si $m = 1$, entonces

$$2(2k + 1) = (k - 1) + k + (k + 1) + (k + 2)$$

Si $m = 2$, entonces

$$2^2(2k + 1) = 4(2k + 1) = + (k - 3) + (k - 2) + (k - 1) + k + (k + 1)(k + 2) + (k + 3) + (k + 4)$$

Si $m = 3$, entonces

$$2^3(2k + 1) = 8(2k + 1) = (k - 7) + (k - 6) + (k - 5) + (k - 4) + (k - 3) + (k - 2) + (k - 1) + k + (k + 1)(k + 2) + (k + 3) + (k + 4) + (k + 5) + (k + 6) + (k + 7) + (k + 8) \qquad (+)$$

Como usted advierte, uno puede repetir este proceso de manera tal que cualquiera sea la potencia de dos que uno pueda 'aislar' para luego multiplicarla por un número impar, *siempre* habrá una manera de escribir el número como suma de números naturales consecutivos.

La pregunta que HAY que hacerse es la siguiente: en la fórmula (+), hay muchos números que podrían ser negativos. Es decir, fíjese que, por ejemplo, el número (k - 7) podría ser negativo. Bastaría que el número *k* fuera menor que 7. Y lo mismo con los que siguen. Pero lo notable es que si usted revisa la fórmula (+), esos números ¡se cancelan!, y solamente quedan números positivos.

Mire junto conmigo el siguiente ejemplo.

Tomemos el número 40. Este número se puede escribir así:

$$40 = 8 \times 5 = 8 \times (2 \times 2 + 1)$$

En este caso, el número $k = 2$.

De acuerdo con la fórmula (+), se obtendría la siguiente descomposición:

$$40 = (2 - 7) + (2 - 6) + (2 - 5) + (2 - 4) + (2 - 3) + (2 - 2) + \\ (2 - 1) + 2 + (2 + 1) + (2 + 2) + (2 + 3) + (2 + 4) + \\ (2 + 5) + (2 + 6) + (2 + 7) + (2 + 8)$$

Cuando uno 'cancela' todos números iguales pero con distinto signo, la ecuación se reduce a:

$$40 = (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \\ 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = [(-5) + (-4) + (-3) + \\ (-2) + (-1) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5] + (6 + 7 + 8 + 9 + 10)$$

O sea, hemos encontrado los números naturales consecutivos {6, 7, 8, 9 y 10} de manera tal que al sumarlos se obtiene el número 40. Y esto resuelve el problema. El crédito de esta demostración preciosa le corresponde entonces a Juan Carlos Naranjo.

Para terminar, quiero escribir la demostración que yo encontré. Si tiene tiempo y ganas, léala con detenimiento. Verá que es larga y tediosa, pero conducente. El objetivo se logra, pero el camino es bastante tortuoso. Dejo constancia acá de que lo que se me ocurrió a mí es prescindible. Lo que vio Juan Carlos, no.

Otra demostración

Tomemos un número natural *n* cualquiera.

Si el número *n* es *impar*, entonces

$$n = 2k + 1,$$

y por lo tanto, lo puedo escribir así:

$$\mathbf{n = k + (k + 1)} \qquad (1)$$

Como k y $(k + 1)$ son números consecutivos, el problema queda resuelto para los números impares.

Faltan todavía por analizar algunos casos más. Quiero invitarlo a pensar lo siguiente: tomemos un número natural *n* cualquiera. Al dividirlo por el número 4, se pueden obtener cuatro posibles restos: 0, 1, 2 y 3.

Es decir, cualquier número natural *n* se escribe de alguna de estas cuatro formas:

a) $n = 4k$
b) $n = 4k + 1$, (2)
c) $n = 4k + 2$… y
d) $n = 4k + 3$

En lo que sigue, voy a concentrarme en mostrar cómo se puede *escribir* el número *n* como suma de números naturales consecutivos, dependiendo de cuál sea su *resto* al dividirlo por 4.

La primera reflexión que quiero hacer con usted es que de acuerdo con lo que vimos en la situación (1), si el número *n* es impar, ya sabemos cómo escribirlo como suma de números naturales consecutivos. Por lo tanto, de las cuatro situaciones que se presentan en las igualdades que figuran en (2), tanto el caso (b) como el caso (d) ya están resueltos. ¿Por qué? Porque tanto en el caso que *n* se pueda escribir como (4k + 1) o como (4k + 3), es porque *n* es un número impar.

Luego, solamente nos queda por revisar los casos (a) y (c). Voy a empezar por el caso (c).

Caso c):

Supongamos que

$$n = 4k + 2 = 2(2k + 1). \text{ Entonces}$$

$$\boxed{\mathbf{(k - 1) + k + (k + 1) + (k + 2) = 4k + 2}}$$

Y esto resuelve la situación.

Ejemplo 1: si n = 38 = (4 × 9 + 2) = 2 (2 × 9 + 1), escribimos 38 así:

$$38 = 8 + 9 + 10 + 11$$

Ejemplo 2: si n = 138 = 136 + 2 = 4 × 34 + 2 = 2 (2 × 34 + 1), escribimos 138 así:

$$138 = 33 + 34 + 35 + 36.$$

Ahora abordemos el último caso que nos queda, el caso (a).

Caso a): Supongamos que $n = 4k$.

Ahora hay que analizar *dos* posibilidades (y le pido que las lea con cuidado):

i) $n = 4 \times (2k + 1)$
ii) $n = 2^m(2k + 1)$ con $m > 2$

Antes de avanzar, quiero invitarla/invitarlo a pensar lo que voy a hacer: solamente falta analizar el caso de los múltiplos de 4, o sea los números naturales *n* que se pueden escribir como

$$n = 4 \times m$$

Sin embargo, agrupo a todos los múltiplos de cuatro en dos subgrupos distintos, que son los que figuran en (i) y (ii). En el caso (i), son los múltiplos de 4 que se escriben como 4 por un número *impar*. En el caso (ii), son los múltiplos de 4, que son además múltiplos de alguna potencia de 2 *mayor* que 4, y por eso los puedo escribir como figura en (ii).

Caso i)

Si $n = 4(2k + 1)$, "separo" $(2k + 1) = k + (k + 1)$ y agregamos a izquierda y derecha números consecutivos hasta sumar *cuatro* veces $(2k + 1)$.

Se tiene entonces:

$$(k - 3) + (k - 2) + (k - 1) + [\mathbf{k + (k + 1)}] + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4)$$

Los pares $(k - 1)$ y $(k + 2)$ suman $(2k + 1)$. Lo mismo sucede con $(k - 2)$ y $(k + 3)$ y también el par $(k - 3)$ y $(k + 4)$.

Por ejemplo, si $n = 4 \times 37 = 148$, entonces $n = 4(2 \times 18 + 1)$.

Escribimos $37 = 2 \times 18 + 1 = 18 + 19$. Ahora agregamos a izquierda y a derecha números consecutivos hasta sumar *cuatro* veces el número 37:

$$15 + 16 + 17 + (18 + 19) + 20 + 21 + 22 = 4 \times 37 = 148.$$

Los pares (17, 20), (16, 21) y (15, 22) suman 37 cada uno.

Caso ii)

Si $n = 2^m (2k + 1)$, entonces uno puede escribir:

$$\begin{gathered} n = (2^m - k) + (2^m - (k - 1)) + (2^m - (k - 2)) + \ldots + \\ (2^m - 2) + (2^m - 1) + \mathbf{2^m} + (2^m + 1) + (2^m + 2) + \ldots + \\ (2^m + (k - 1)) + (2^m + k) = 2^m (2k + 1) \qquad (3) \end{gathered}$$

Lo que hice fue aparear los números desde las puntas y al sumarlos se obtienen $(2k + 1)$ copias de 2^m, y por lo tanto aparece escrito el número n como suma de números consecutivos.

La descomposición que figura en (3) está bien, pero le sugiero que advierta un detalle (no menor, por cierto): para que todos los números que figuran en la fórmula (3) sean números naturales, es necesario que el número $(2^m - k)$ sea mayor o igual que *uno*. Es decir, que sea un número natural. Si no, alguno de los números que aparecen en (3) serían negativos.

Entonces, ¿qué pasa si $(2^m - k) < 1$?

Para fijar las ideas, observe el siguiente ejemplo: supongamos que

$$n = 2^5 \times 91 = 32 \times 91 = 2912$$
$$n = 2^5 \times 91 = n = 2^5 (2 \times 45 + 1)$$

En este caso justamente, se verifica que $(2^5 - 45) < 1$.

Entonces, ahora no se puede usar la fórmula (3) . ¿Qué hacer?

Sígame con este razonamiento: lo que voy a usar es que $(2 \times 45 + 1) = 91$ es un número impar.

Escribo $91 = (45 + 46)$ y ahora voy a agregar 32 copias del número 91, sumando números consecutivos de a pares, a izquierda y derecha de 45 y 46.

Los pares a considerar son: (14, 77), (15, 76), (16, 75),…, (44, 47).

Éstos son (cuéntelos) 31 pares de números. Cada par suma 91. Pero si uno agrega el par 'original' (45, 46), se tienen 32 pares que suman 91. Luego, la suma:

$$\boxed{14 + 15 + 16 + \ldots + 45 + 46 + 47 + 48 + \ldots + 76 + 77 = 32 \times 91 = 2.912}$$

Pasemos ahora al caso general.

Supongamos ahora que

$$n = 2^m (2k + 1), \text{ pero con } \qquad (2^m - k) < 1.$$

Entonces, primero, escribimos el número $(2k + 1) = (k + (k + 1))$ como hicimos antes, y después voy agregando pares de números que sumen $(2k + 1)$. Necesito en total, 2^m de estos pares.

En definitiva se tiene:

$$(k - 2^m - 1) + (k - 2^m) + (k - 2^m + 1) + \ldots + (k - 2) + (k - 1) +$$
$$[\mathbf{k + (k + 1)}] + (k + 2) + (k + 3) + \ldots + (k + 2^m + 1) + (k + 2^m + 2).$$

Cuéntelos y verá que hay 2^m pares:

$$(k, (k + 1))$$

$$((k - 1), (k + 2))$$
$$((k - 2), (k + 3))$$
$$\dots\dots\dots$$
$$((k - 2^m), (k + 2^m + 1)) \text{ y}$$
$$((k - 2^m - 1), (k + 2^m + 2)).$$

Cada par suma $(2k + 1)$ que es lo que queríamos conseguir.

Ahora sí, hemos terminado de analizar *todos* los posibles casos y estamos tranquilos porque hemos probado lo siguiente:

> Un número natural *n* se puede escribir siempre como la suma de números naturales consecutivos si y solamente si el número *n* no es una potencia de dos.

Un problema de dados, sumas y probabilidades

Suponga que tiene un dado (común). Lo empieza a arrojar arriba de una mesa tantas veces como le haga falta hasta que al sumar los resultados, supere el número 12 (excluyendo el 12).

Pregunta: ¿cuál le parece que será la suma más probable con la que se acaba el juego? Es decir, va a haber un momento en que al ir tirando el dado, la suma va a exceder al número 12, ¿cuál será el número mayor que 12 que tendrá más posibilidades de salir?

Respuesta

La/lo invito a pensar en la siguiente idea. Usted venía arrojando el dado repetidamente, y sumando los resultados que obtenía. Hubo un momento en que lo arrojó por última vez, porque superó el número 12. En el tiro *previo* al último, ¿qué resultados pudo haber obtenido usted hasta allí? Vale la pena que piense la respuesta antes de avanzar.

Sigo yo. Usted debió haber llegado a estos potenciales resultados:

12, 11, 10, 9, 8 o 7

¿Por qué? Porque si llegó a un número cualquiera *menor* que siete, lo máximo que puede agregar es un *seis*, y por lo tanto, nunca llegará a superar el número 12, y haber llegado a *seis* tampoco es suficiente, porque con un solo tiro a lo sumo podrá alcanzar a 12 pero no superarlo como es el objetivo.

Ahora sí, analicemos las diferentes situaciones.

a) Si usted llegó a 12, entonces, en el siguiente tiro usted pudo haber llegado a

13, 14, 15, 16, 17 y 18

Y todas son igualmente posibles.

b) Si usted llegó a sumar 11 (en el penúltimo tiro), ¿a qué valores puede llegar cuando arroja el dado por última vez?

13, 14, 15, 16 y 17[64]

c) Si usted llegó a sumar 10, entonces los valores posibles ahora son:

13, 14, 15 y 16

d) Si usted llegó a sumar 9, entonces los valores posibles al tirar el último dado son:

13, 14 y 15

64. Y todas son igualmente posibles.

e) Si llegó a sumar 8, los resultados posibles son: 13 y 14, y por último

f) si llegó a sumar 7, el único resultado al que usted puede llegar en el último tiro es 13 (es que para poder superar a 12, usted se vio forzado a sacar un 6 en el último intento).

Dicho todo esto, y explorando todos los resultados posibles, es fácil detectar que el número que más posibilidades tiene de salir es ¡13![65]

Nota

Usando el mismo argumento, si en lugar de haber propuesto superar al número 12 eligiéramos un número cualquiera A[66], entonces el resultado con más posibilidades de aparecer sería (A + 1).

---

65. Esto sucede porque —por un lado— todos los casos son igualmente posibles y, por otro, el número 13 es el que aparece en *todos* los casos. Ésa es la razón por la cual tiene más posibilidades de salir.

66. El número A tiene que ser mayor o igual que *seis*.

¿Está o no está? Sobre el diseño de una estrategia

Tome 100 hojas en blanco, como si fueran cartas. Suponga que en cada una hay escrito un número entero positivo diferente. O sea, tenemos 100 enteros distintos, uno por hoja.

Suponga que le dicen que los números están ordenados en diez filas y diez columnas, de menor a mayor (de izquierda a derecha) en cada fila y también de menor a mayor (de arriba hacia abajo) en cada una de las columnas.

Ahora, piense en un número entero positivo cualquiera. ¿Cómo se puede diseñar una estrategia para que dando vuelta MENOS de 20 cartas uno pueda saber si el número que usted pensó, *está o no* entre los 100 números que figuran en las hojas?

Solución

Miremos la grilla de diez por diez como aparece en la figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1								4	2	1
2									5	3
3										6
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Fig. 1

Supongamos que el número elegido es el A. Empecemos dando vuelta la carta que figura con el número 1. Si el número A es el que figura en el lugar 1, listo: encontramos lo que buscábamos. Si no, puede que sea menor o mayor. Si el número A es *menor* que el que figura en 1, entonces el número que buscamos no puede figurar en la última columna (ya que son todos aun mayores que el que figura en el lugar 1, y ya sabemos que nuestro número A es *menor* que el que está en 1).

Luego, podemos pasar a la columna previa, la que está a la izquierda. Allí nos fijamos lo que sucede en el lugar que figura con el número 2.

Si en cambio el número A fuera más grande que el que figura en 1, entonces A no puede estar en la primera fila (ya que son todos menores que el que figura en 1), y por lo tanto podemos analizar lo que sucede con el número que figura en el lugar 3.

Y ahora seguimos. Supongamos que el número A era *menor* que el que figuraba en 1. Entonces vamos al número que figura en 2, y repetimos el proceso: si A es *menor* que el que figura en 2, entonces no puede estar en esa columna, y nos vamos hacia la columna que está a la izquierda, permaneciendo en la misma fila (en este caso, la primera) y revisamos lo que sucede con la carta que aparece en el número 4. Si A fuera mayor que la carta que figura en 2, entonces no podría estar en la primera fila, y por lo tanto 'bajaríamos' para analizar lo que sucede en la segunda fila, en el lugar 5.

Si uno sigue con este proceso, termina o bien encontrando el número y allí se detiene, o bien continúa hasta el extremo inferior izquierdo. Ese camino haciendo un paso hacia la izquierda o un paso hacia abajo, toca a lo sumo 19 casillas (¡compruébelo usted!). Por lo tanto, con ese *algoritmo*, uno está en condiciones de decidir si el número A está o no entre los 100 escritos en las cartas. ¿No es sencillo y bonito?[67]

---

67. Pregunta: ¿habrá algún algoritmo que resuelva el problema con *menos* de 19 cartas? ¿No tiene ganas de pensarlo?

Candados con y sin repetición de dígitos

Mire el candado que figura a continuación:

Estos candados funcionan así: entre todas las posibles combinaciones de cuatro dígitos, hay *una sola* que es la que permite abrir la cerradura.

Dicho así, es muy sencillo. La pregunta es: ¿cuán difícil es *encontrar* esa combinación? Es decir, si uno tuviera que intentar con pocos números, el candado sería fácilmente vulnerable, pero si la cantidad de variantes con los que uno debería intentar son muy grandes, entonces, el candado se vuelve más atractivo, e invita a quien lo quiera vulnerar a intentar con otros métodos y no el de probar 'a la bruta'. Una vez más entonces, cabe la pregunta: ¿cuán difícil es encontrar la combinación indicada si uno tiene *nada más* que cuatro dígitos?

Acompáñeme a pensar algunas variantes dependiendo del número de dígitos entre los cuales uno puede elegir y si se permiten repeticiones o no.

En todas las variantes que figuran más adelante, el candado tiene siempre *cuatro lugares* para llenar y quien intente abrirlo, deberá encontrar los cuatro dígitos que le permitan hacerlo.

Analicemos las distintas variantes.

Primer caso

Supongamos que uno tiene *nada más* que cuatro dígitos de los cuales elegir. O sea, para ocupar los lugares, solamente se puede elegir entre los dígitos {1, 2, 3, 4}. Y quiero proponerle además que separemos dos casos: en donde se pueden repetir los dígitos y en donde no se puede.

Por ejemplo, en el primer caso (cuando no se puede repetir), la combinación correcta *no puede ser* (1, 1, 3, 4). Los dígitos tienen que ser todos distintos y como son cuatro en total y cuatro lugares para llenar, inexorablemente hay que usarlos todos. Analicemos las diferencias.

Sin repetición

Para el primer lugar podemos usar cualquiera de los cuatro dígitos. Una vez elegido el primero, quedan nada más que tres para el segundo lugar. Por lo tanto, entre los dos primeros lugares hay *doce* (que resulta de multiplicar 4 por 3) posibles combinaciones. ¿Por qué?

Éstas son las doce posibilidades:

12, 13 y 14 (son las tres que empiezan con el número *uno*)
21, 23 y 24 (son las tres que empiezan con el número *dos*)

31, 32 y 34 (son las tres que empiezan con el número *tres*) y finalmente

41, 42 y 43 (son las tres que empiezan con el número *cuatro*).

Con esta idea, ahora agreguemos el tercer dígito. Como ya tenemos elegidos los dos primeros, hay nada más que dos opciones para el tercer lugar, y tal como hicimos con los dos primeros, para calcular la cantidad de combinaciones **sin repetición** de los primeros tres lugares, hay ahora 24 posibilidades (cada una de las 12 que teníamos para los dos primeros, ahora la podemos completar con cualquiera de los dos dígitos que no hemos usado al principio). En total, son $12 \times 2 = 24$.

Y no hay más, ya que una vez elegidos los tres primeros, el último queda inmediatamente determinado.

Respuesta entonces al primer problema: hay 24 posibles combinaciones distintas que se pueden conseguir para llenar cuatro lugares con cuatro dígitos **sin repetición**.

Con repetición

Como ahora no hay que preocuparse por las repeticiones, en el primer lugar podemos ubicar cualquiera de los cuatro dígitos, y para cada uno de estos cuatro, tenemos cuatro posibilidades para el segundo, lo cual permite deducir que nada más que entre los dos primeros lugares ahora hay $(4 \times 4) = 16$ posibilidades:

11, 12, 13, 14
21, 22, 23, 24
31, 32, 33, 34
41, 42, 43, 44

Como para el tercer lugar también tenemos la libertad de elegir cualquiera de los cuatro, ahora hay que multiplicar por *cuatro* otra vez: en total, son $16 \times 4 = 64$ (que es lo mismo que 4^3).

Para terminar, el último dígito puede ser cualquiera otra vez. Cada una de las 64 combinaciones que teníamos para los primeros tres lugares, ahora la podemos completar con cualquiera de los cuatro dígitos, y por lo tanto, para calcular el número total de posibilidades, basta con volver a multiplicar por *cuatro*. Resultado: $64 \times 4 = 256 = 4^4$.

Esto resolvió el problema inicial: uno tiene cuatro lugares que puede llenar con solamente cuatro dígitos.

Si no se permite repetir, hay nada más que 24 (que resulta de hacer $4 \times 3 \times 2 \times 1$).

Si se permite repetir, hay 256 posibilidades (que resulta de hacer 4^4), que como se ve, son muchísimas más.

Segundo caso

¿Cómo se modifica el número de combinaciones posibles si en lugar de usar nada más que cuatro dígitos usamos cinco? Es decir, siempre tenemos un candado con *cuatro* lugares para llenar con algún dígito, pero en lugar de elegir entre {1, 2, 3, 4} ahora podemos elegir entre {1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántas más posibilidades hay? ¿Y cuál es la diferencia si uno permite repeticiones o no?

Sin repetición

Para el primer lugar, ahora tenemos *cinco* posibles dígitos. Una vez elegido el primero, hay cuatro posibles candidatos para el segundo lugar. Es decir, entre los dos primeros lugares (igual que hicimos en el caso anterior) hay ahora $(5 \times 4) = 20$ combinaciones posibles:

$$\begin{array}{l} 12, 13, 14, 15 \\ 21, 23, 24, 25 \\ 31, 32, 34, 35 \\ 41, 42, 43, 45 \\ 51, 52, 53, 54 \end{array} \qquad (^*)$$

Para el tercer lugar, ahora tenemos tres dígitos que nos quedan como candidatos. Luego, para cada uno de los 20 que figuran en $(^*)$ hay tres posibilidades para elegir. En consecuencia, hay $20 \times 3 = 60$. Y por último, para el cuarto lugar, nos quedan dos dígitos entre los cuales podemos seleccionar. Por lo tanto, tenemos $60 \times 2 = 120$.

Vale la pena observar que el número 120 se obtiene como producto de:

$$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

En consecuencia, con estos cálculos, uno deduce que hay 120 formas de elegir cuatro dígitos entre cinco posibles si uno **no permite repeticiones**.

Con repetición

Si ahora uno permite repeticiones, entonces lo que sucede en cada lugar es independiente de los restantes. En cada lugar hay cinco posibilidades y en total hay cuatro lugares para llenar, el resultado es: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$.

Tercer caso

Con estas experiencias, ¿estará usted convencido de que podemos pasar al caso en donde en lugar de tener cuatro o cinco dígitos entre los cuales elegir para llenar los cuatro lugares, ahora permitimos tener *seis o siete u ocho o nueve o los diez dígitos*?

Veamos. Supongamos que uno tiene los diez dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Sin repetición. Le sugiero que piense la solución en soledad, sin necesidad de leer lo que voy a escribir acá. En todo caso, vuelva dentro de un rato, cuando lo haya intentado por su cuenta. Yo creo que si usted relee el caso anterior y trata por sus propios medios, tiene *altas* posibilidades de deducir solo cada fórmula (o encontrar su propia solución). En cualquier caso, ahora sigo yo.

Si uno tiene *diez dígitos* entre los cuales elegir, y tiene cuatro lugares, el número de combinaciones posibles **sin repetición** es:

$$(10 \times 9 \times 8 \times 7) = 5.040 \qquad (**)$$

El análisis es el mismo que hicimos antes. Para el primer lugar, podemos usar cualquiera de los diez dígitos (de ahí el número *10* como primer factor en la fórmula (**). Una vez elegido el primer dígito, ahora quedan *nueve* para el segundo, y eso explica el número *nueve* que figura en la fórmula (**). Como son cuatro lugares, la conclusión es 5.040.

Si en cambio se permiten repeticiones, entonces hay

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$$

Es interesante este resultado y la/lo invito a reflexionar un instante sobre lo que hemos concluido. Por un lado, si usted me siguió en el razonamiento que venimos haciendo hasta acá, entenderá que para el primer lugar hay 10 dígitos posibles, lo mismo para el segundo lugar, para el tercero y el cuarto. O sea, que haya que multiplicar cuatro veces al número *diez*, no debería sorprenderla/sorprenderlo. Es, justamente, 10^4.

Pero por otro lado, si yo le diera un candado con cuatro lugares para llenar de cualquier forma, en donde se admiten repeticiones, aunque usted no hubiera estado leyendo nada, me miraría y me diría: "Hay *diez mil números* que puedo usar: desde el 0000 hasta el 9999".

O sea, hemos redescubierto la fórmula que usted hubiera encontrado en cualquier caso.

Resumen (que sugiero que revise y no que me acepte los números sin confrontarlos con sus propias cuentas). Voy a escribir una tabla que indica la cantidad de dígitos disponibles (que van entre cuatro y diez), y cada columna analiza el caso sin o con repetición. Lo hago solamente para que podamos juntos (usted y yo) verificar la diferencia que hay entre el número de posibilidades a medida que va aumentando el número de dígitos y cuánto afecta que se pueda repetir o no. Acá va.

Número de dígitos	Sin repetición	Con repetición	Cociente
4	24	256	10,67
5	120	625	5,21
6	360	1.296	3,6
7	840	2.401	2,85
8	1.680	4.096	2,44
9	3.024	6.561	2,17
10	5.040	10.000	1,98

La última columna muestra cómo, al incrementar el número de dígitos, permitir repeticiones o no va empezando a perder significado. De hecho, si uno tuviera (en un mundo ideal) *cien dígitos* entre los cuales uno pudiera elegir, la primera columna ofrecería este número: $100 \times 99 \times 98 \times 97 = 94.109.400$. La segunda, sería $100^4 = 100.000.000$ y, por lo tanto, el cociente resultaría:

$$100.000.000 / 94.109.400 = 1{,}062$$

Esto dice que ya habría 'casi' tantas posibilidades con repetición que sin repetición (ya que el cociente está mucho más cerca de *uno*). Por lo tanto, si uno tuviera cada vez más dígitos disponibles, permitir o no repeticiones sería 'casi' irrelevante.

Detectives, sombreros y marcas en la frente

No puedo escribir un libro y no incluir algún problema sobre sombreros, detectives y decisiones lógicas. Es por eso que he buscado alguna versión que no hubiera incluido en ninguno de los tomos anteriores. Y encontré esta que incluyó en uno de sus trabajos Raymond Smullyan, uno de los más prolíficos inventores y generadores de problemas lógicos y de juegos usando matemática recreativa. El crédito, entonces, es para él. Yo solamente hago de intermediario. Acá va.

Una compañía situada en la época de Al Capone, en Chicago, estaba a la búsqueda de contratar detectives que tuvieran un alto nivel de preparación intelectual. Para eso, no se requería haber *estudiado* mucho ni contar con un conocimiento enciclopédico, sino tener desarrollada la capacidad para pensar en cosas que no son necesariamente las habituales.

¿Cómo hacer para encontrar buenos candidatos? ¿Cómo descubrirlos? El presidente de la compañía, después de una selección que ya habían hecho sus asistentes, termina reunido con los tres mejores. Se junta con ellos en su oficina, y les dice cómo va a hacer para determinar quién se quedaría con la posición vacante.

Les muestra dos marcadores, uno negro y otro rojo. Les dice que les va a tapar los ojos y les va a hacer a cada uno una marca en la frente. Afirma además, que *uno* de los tres al menos, tendrá una marca de color negro, pero podría ser que hubiera más de una. Eso sí: cuando les destape los ojos, elegirá un orden cualquiera y les irá preguntando de a uno por vez si pueden determinar el color con el que tienen pintada la frente. El primero que llegue a una conclusión correcta y que pueda explicarla racionalmente, tendrá el puesto asegurado dentro de la compañía.

Dicho esto, cuando los tres candidatos dijeron haber entendido el procedimiento, les tapó a los tres los ojos, y les hizo *a los tres una marca de color negro*.

Una vez que se secaron las marcas, les quitó el pañuelo con el que les había tapado los ojos, y cada uno de ellos miró inmediatamente la frente de los otros dos. Los tres vieron, entonces, que los otros tenían una marca de color negro. El presidente empezó por uno cualquiera: "¿Puede contestar de qué color tiene marcada la frente?". El candidato contestó: "No, no puedo". Le preguntó al siguiente: "¿Y usted?". "Tampoco", dijo el segundo. El tercero entonces, dijo inmediatamente: "¡Yo tengo una marca de color negro!".

¿Cómo hizo esta persona para llegar a esa conclusión?

Ahora, le toca a usted. Le sugiero, como hice y hago sistemáticamente, que dedique un rato para pensar e imaginar diferentes posibilidades. Por supuesto que la solución figura más adelante, pero como usted advierte el problema en sí mismo es muy sencillo, y todo lo que se requiere es tener ganas y tiempo de pensarlo. No hace falta 'saber' nada particular, solamente se necesita utilizar su capacidad de análisis.

Solución

La solución pasa por lo siguiente. El tercero *sabe* que tiene la frente pintada de negro, porque si él la hubiera tenido pintada de rojo, *alguno de los dos anteriores —razonando lógicamente— hubiera sabido de qué color tenía pintada la frente 'antes' que le tocara el turno a él*. Veamos.

En lo que sigue, quiero convencerla/convencerlo de que el tercero tenía una manera de deducir de qué color tenía marcada la frente, no sólo porque veía que los otros dos la tenían marcada de negro (esto solo no hubiera sido suficiente), sino porque escuchó que los dos anteriores *no pudieron contestar*. ¿Cómo hizo? En principio, el tercero hizo la siguiente reflexión: 'Supongamos que yo (pensó) tuviera la frente pintada de rojo'. Voy a mostrar ahora que si así fuera, entonces alguno de los dos anteriores debió haber contestado qué color tenía en la frente.

Supongamos entonces que el tercero tiene la frente pintada de rojo. ¿Qué podría pasar con el segundo?: podría tenerla pintada de rojo o de negro.

Si tuviera la frente pintada de rojo, entonces el primero habría visto que el segundo y el tercero tenían la frente pintada de rojo. Como el presidente de la compañía había dicho que *al menos uno* de los tres tendría la frente pintada de negro, *el primero sabría que él tenía la frente pintada de ese color* y por lo tanto, él se quedaría con el puesto en la compañía.

Pero como el primero no pudo contestar, esto le está indicando al segundo que él (el segundo) tiene la frente pintada de negro (ya que si la tuviera de rojo, el primero habría contestado antes). Luego el segundo hubiera sabido que tenía pintada la frente de negro y habría ganado el lugar.

Esto muestra que si el tercero tiene pintada la frente de rojo, o bien el primero o bien el segundo hubieran podido contestar antes. Como ninguno de los dos lo hizo, eso significa que el tercero tiene la frente pintada de negro, y listo.

Lo interesante de *pensar* este problema, es que como usted detecta uno *nunca* va a estar enfrentado a una situación de este tipo. Es un problema *totalmente* irreal, imposible de replicar en la vida cotidiana. Pero aspiro a que usted sí acuerde conmigo que este tipo de situaciones en donde uno necesita analizar diferentes posibilidades y/o combinaciones, imaginar potenciales escenarios futuros dependiendo que uno asuma tal hipótesis y no tal otra, sí son problemas de la vida real. Y de ahí, me parece, la utilidad en analizarlas y entrenarse.

Nota final. Me imagino que usted debería estar preguntándose: ¿y dónde están los sombreros? Bueno, no están en ninguna parte, pero cambié los sombreros y usé marcas de diferentes colores en la frente. En cualquier caso, es exactamente lo mismo, ¿no?

A la búsqueda de patrones

Muchas veces en el afán de resolver un problema, uno apela a la ‘fuerza bruta’: prueba y prueba. No necesariamente es un mal camino, porque aunque no conduce al resultado final, permite descubrir algunos patrones que permanecerían ocultos si uno no ‘se ensuciara las manos’.

Con todo, ese tipo de problemas suelen ser muy útiles por cuanto enseñan y abren caminos que uno no sabía que existían. Le propongo entonces que me acompañe en esta aventura que es el *pensar.*

Fíjese en el siguiente tablero:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Y en este otro:

11	9	10	12
3	1	2	4
15	6	5	8
7	13	14	16

Suponga que le permiten intercambiar filas y/o columnas del primer tablero, ¿se podrá llegar al segundo usando únicamente esas operaciones?

Si se puede, muestre un camino que lleve de uno a otro.

Si no se puede, dé un argumento que lo explique.

Respuesta

Pensemos juntos qué sucede cuando uno se dispone a usar las operaciones permitidas. Es decir, se permiten intercambiar filas con filas y columnas con columnas.

Tomemos la fila 1 del primer tablero, e intercambiémosla con la tercera (sólo por poner un ejemplo). Los *cuatro* números que figuran en la primera fila (1, 2, 3 y 4), ahora quedan ubicados en la tercera fila, mientras que simétricamente, los de la tercera (9, 10, 11 y 12) pasaron a ocupar la primera fila. El tablero queda ahora así:

9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4
13	14	15	16

Si, por otro lado, ahora permutáramos la segunda y la tercera columna, el tablero aparecería así:

9	11	10	12
5	7	6	8
1	3	2	4
13	15	14	16

Estos dos movimientos, que parecen *irrelevantes*, dan *toda* la información que uno necesita.

Fíjese en los números que figuran en las filas y en las columnas del último tablero y compárelos con los que figuran en el tablero inicial. ¿Qué deduce?

Lo que se deduce es que los números de *cada* fila y de *cada* columna son los mismos. Alteraron su posición, sí, pero siguen siendo los mismos. Por lo tanto, uno puede conjeturar que las permutaciones de filas con filas y columnas con columnas *no alteran los números que figuran en cada una de ellas*.

Con este dato *nuevo*, ahora le pido que se fije nuevamente en el problema original y compare los dos primeros tableros. ¿Le parece que se puede llegar de uno a otro?

La respuesta es que *no se puede*, porque en el segundo tablero (por ejemplo) el número 7 *perdió* a sus compañeros de fila. En el tablero inicial, son 5, 6 y 8. En el segundo, son 13, 14 y 16. ¡Y esto no pudo haber pasado con los movimientos permitidos!

Por lo tanto, la respuesta es que *no se puede pasar de uno a otro*, porque con los movimientos permitidos, esa configuración es inalcanzable.

Claro, uno podría haber intentado *a mano*, tratando de ver si se puede o no. Es difícil probar con *todas* las posibles combinaciones hasta concluir que ninguna lleva a destino. En cambio, una vez que uno detectó que los compañeros de filas y columnas permanecen *invariantes* por las permutaciones permitidas, descubre casi en forma inmediata que la respuesta es negativa: no se puede.

Y justamente eso es *hacer matemática*, hacer *visible* lo *invisible*, modelar y avanzar en direcciones que parecen ocultas, pero la única forma de lograrlo es, como decía más arriba, *arremangándose y ensuciándose las manos:* la satisfacción llega después.

Jaime Poniachick. Un recuerdo

Extraído de la revista del Snark, del primer número que se imprimió en mayo de 1976. Vaya como tributo a una persona que contribuyó de una forma hipersignificativa al progreso de la matemática recreativa. Lamentablemente, falleció muy joven y no pudo aprovechar de la difusión que internet hubiera ofrecido a toda su creatividad.

Es imposible hacer justicia seleccionando *un* problema del volumen descomunal de ideas que brindó Jaime durante su vida, pero al menos quiero tomar el valor simbólico que tiene publicar el primer problema del primer volumen de la primera revista publicada hace casi cuarenta años.

Textualmente, Jaime escribió:

> El profesor Zizoloziz no deja pasar un boleto de colectivo sin hacer de inmediato la suma de sus cinco dígitos. Viajando ayer con un amigo en un coche de la línea 62, el profesor anunció con fervor que la suma de los diez dígitos de ambos boletos daba, precisamente, 62. El amigo, persona lógica y en sus cables, decidió seguirle la corriente y le preguntó si, por casualidad, la suma de los cinco dígitos de alguno de los boletos no daría 35. El profesor Zizoloziz contestó, y el amigo supo entonces la numeración de los boletos. ¿Quiere usted seguirnos la corriente y deducir qué boletos son?

No tengo yo la revista, y por lo tanto sólo pude acceder por internet a copiar este enunciado. De todas formas está usted invitada/invitado a pensar la solución. Es un problema muy bonito y sobre todo permite evaluar varias potenciales respuestas. Si bien no está explícito, yo supuse que los amigos subieron *juntos* al colectivo y por lo tanto, compraron boletos con numeración consecutiva y fue el profesor quien compró los boletos y tenía ambos en su poder sin mostrárselos a su amigo. La/lo dejo por unos minutos y volveré luego.

Solución

Como usted advierte, hay algo que no está dicho en el enunciado. Es decir, hay algo que falta determinar. Vale la pena releerlo y luego volver acá. Vaya, tómese el tiempo que necesite.

Ahora sí: lo que no está dicho/contestado es qué respuesta le dio el profesor Zizoloziz a su amigo. Pudo haber contestado o bien que sí, o bien que no. Analicemos ambas posibilidades y le propongo que tratemos de descubrir juntos la respuesta que debió dar el profesor y la solución al problema.

En lo que *sí* nos tenemos que poner de acuerdo es en que los boletos que ambos compraron (el profesor y su amigo) al subir al colectivo tenían números consecutivos. Es decir, hay un dato implícito y es que se subieron juntos al colectivo y que el colectivero les vendió dos boletos seguidos sin que mediara ningún otro pasajero en el medio. Esto resulta ser importante para la solución porque indica que los números de cada boleto ya no pueden ser cualesquiera.

Voy a dividir las respuestas del profesor en dos partes. Primero, suponiendo que contestó que sí (a la pregunta de si los dígitos de uno de los boletos sumaba 35), y el segundo caso, en el que el profesor contestó que no.

Primer caso

Si el profesor contestó que sí, entonces tendríamos estos datos:

la suma de los dígitos de los dos boletos resulta ser 62,
la suma de los dígitos de uno de los dos boletos es 35,
los boletos tienen dos números consecutivos.

Primera conclusión (fácil): la suma de los dígitos del otro boleto tiene que ser 27.

Sin embargo, no es un dato menor, porque al ser los números de los boletos consecutivos, uno está tentado de suponer que si la suma de los dígitos de uno de los boletos es impar, la suma de los del otro debería ser par (o al revés). Sin embargo, en este caso uno sumaría 35 y el otro 27. ¿Qué sugiere esto? En principio, que el dígito del final tiene que ser un 9, y que además de cambiar el último dígito en *uno*, debe cambiar también el dígito de las *decenas*.

Segunda conclusión: ¿Habrá *una sola solución*? La respuesta es que no. Fíjese. Tomemos estos tres pares:

28889 y 28890
47789 y 47790
37889 y 37890

Como usted advierte, las sumas de cada boleto en cada par resultan respectivamente 35 y 27. Le sugiero que piense otras alternativas porque hay más soluciones. Es decir, si la respuesta del profesor fue que *sí*, entonces hay muchas soluciones al problema.

Segundo caso

Supongamos que contestó que *no*. Entonces, como en el primer caso, al ser la suma de los diez dígitos que intervienen un número par, eso significa que o bien son los dos números pares o los dos son impares. Pero eso no puede pasar, ya que los dos números son consecutivos. Por lo tanto, la única alternativa —una vez más— es que el último dígito sea un número *nueve*. Más aún: el último dígito del otro boleto tiene que ser un *cero*.

Hay que analizar entonces cuatro posibles casos:

Caso 1

abcd9
abce0 (en donde el dígito *d NO ES un número nueve*)

Caso 2

abc99
abf00 (en donde el dígito c *NO ES un número nueve*)

Caso 3

ab999
ag000 (en donde el dígito b *NO ES un número nueve*)

o, por último,

Caso 4

a9999
h0000

Analicemos caso por caso.

Caso 1
Supongamos que los boletos son: (abcd9) y (abce0).
En este caso, fíjese que los tres primeros dígitos de cada boleto son los mismos y el penúltimo del segundo (que es *e*) tiene que ser *(d+1)*. Por ejemplo, si *(d9) es 89, entonces (e0) será 90. Si el primero termina en 59, el segundo termina en 60.*
La suma de *todos los dígitos involucrados será entonces*

$$(a + b + c + d + 9) + (a + b + c + e + 0) = 62$$

Pero como sabemos que e = (d+1), se deduce que:

$$(2a + 2b + 2c + d + 9 + e + 0) = (2a + 2b + 2c + 2d + 10) = 62,$$

y por lo tanto,

$$2a + 2b + 2c + 2d = 52$$

Dividiendo por 2 de ambos lados

$$(a + b + c + d) = 26 \qquad (*)$$

Pero lo notable de esto es que de la igualdad (*) y del hecho que el primer número está compuesto por estos cinco dígitos: abcd9, se deduce que la suma de *todos* estos dígitos resulta ser 35. Y eso no puede ser, porque ya sabemos que en el caso que estamos analizando el profesor Zizolozi había dicho que la suma de los dígitos de ninguno de los dos boletos era 35. Luego, este caso queda excluido.

Caso 2

Supongamos ahora que los boletos son: abc99 y abf00.

Como en el caso anterior, la suma de *todos* los dígitos tiene que resultar 62. Y por otro lado, el dígito c *no puede ser un número nueve.* Pero, al mismo tiempo, el dígito *f* tiene que ser igual a $(c + 1)$.

O sea, $f = (c + 1)$

La suma de todos los dígitos es:

$$(a + b + c + 9 + 9) + (a + b + f + 0 + 0) =$$
$$(a + b + c + 9 + 9) + (a + b + c + 1) = (2a + 2b + 2c + 19) = 62$$

Como se ve, este caso es imposible, porque el número de la izquierda es un número *impar* y el número de la derecha es 62. Luego, hay que excluir este caso también.

Caso 3

Supongamos ahora que los boletos son: (ab999) y (ag000), en donde *b* no es un número *nueve.*

La suma de todos los dígitos tiene que ser 62. Además, $g = (b + 1)$. Luego:

$$(a + b + 9 + 9 + 9) + (a + g + 0 + 0 + 0) = 62$$

$$(a + b + 27) + (a + b + 1) = 62$$

$$(2a + 2b + 28) = 62$$

$$(2a + 2b) = 34$$

$$(a + b) = 17$$

Como sabemos que *b* no puede ser un número *nueve*, entonces la única forma en que la suma (a + b) = 17, y que *b* no sea un nueve, es que *a* = 9 , y *b* = 8.

Luego, los números de los boletos son:

$$\boxed{98999 \text{ y } 99000}$$

Caso 4

Si los números fueran (a9999) y (h0000), no hay manera de que en total los diez dígitos sumen 62, porque aun si los dos primeros dígitos (*a* y *h*) fueran ambos números *nueve*, habría seis números nueve que suman 54. O sea, el último caso queda descartado.

Moraleja

De los cuatro casos posibles, el *único* que permite que se cumplan *todas* las condiciones es el caso en el que los boletos sean (98999) y (99000). Por lo tanto, el profesor *no pudo haber con-*

testado que sí a la pregunta sobre si los dígitos de alguno de los dos números sumaba 35 porque si no, habría varias respuestas posibles; pero al contestar que *no*, claramente identificó a los dos boletos.

Final

El crédito y todo el mérito de este problema es para mi querido Jaime Poniachick. Éste fue el primer problema de la primera revista de Matemática Recreativa que apareció en la Argentina, en mayo de 1976. Gracias, Jaime, por *todo* lo que hiciste por nosotros.

4. DADOS, NIÑOS, MONEDAS Y CAMPANAS

Suena el teléfono mientras estamos jugando a las cartas

Imagine la siguiente situación. Un grupo de cuatro amigos están jugando a las cartas. El juego requiere que se distribuyan *todas* las cartas del mazo. En un momento, cuando están en el proceso de repartirlas para empezar a jugar, suena el teléfono. El dueño de casa, que justamente estaba 'dando cartas' pero aún no había concluido, dice: "Nadie toque ninguna carta. Déjenlas como están apoyadas arriba de la mesa. Yo voy a atender el teléfono y seguimos inmediatamente".

Todos cumplen con la premisa. Cuando quien estaba repartiendo vuelve a la mesa, descubre que no recuerda a quién le había entregado la última carta antes de interrumpir para atender el llamado. Pregunta: ¿hay alguna manera de continuar sin que ninguno de los participantes deba contar las cartas que tiene y que se siga respetando el orden en que cada uno las hubiera recibido?

La/lo invito a que piense alguna estrategia. Es posible que no sea única, pero la que voy a describir, sin duda, muy creativa (no se me ocurrió a mí, por cierto).

Respuesta

¿Cómo hace usted para dar cartas? ¿Reparte hacia la derecha o hacia la izquierda? No es relevante, pero en cualquier caso, toda persona que 'da cartas' elige una dirección y las va distribuyendo de a una. El último en recibir es quien está repartiendo, y continúa *siempre* en ese sentido hasta agotar las cartas.

Ahora bien. Supongamos que el dueño de casa estuviera repartiendo *hacia su derecha*. Independientemente de esto, la última carta del mazo la recibiría él. De la misma forma, la *penúltima* carta, la recibiría quien está a su *izquierda*. Y la antepenúltima, la habría recibido quien está a la izquierda del penúltimo. Y así siguiendo. Es decir: si el dueño de casa ahora empezara a repartir desde abajo, y se entrega a sí mismo la última carta, y distribuye ahora *hacia la izquierda* (o sea, en sentido *contrario* al orden en el que venía repartiendo antes de que sonara el teléfono), creo que está claro que utilizando esta estrategia las cuatro personas recibirán las cartas en el orden en que las habrían recibido antes. Y como usted advierte, no hizo falta contar cuántas cartas había recibido cada uno ni en qué momento se había interrumpido el proceso.

Seis problemas breves

Los que siguen son problemas breves para entretenerse en el ascensor, en una sala de espera, en el tren, subte o esperando en un semáforo.

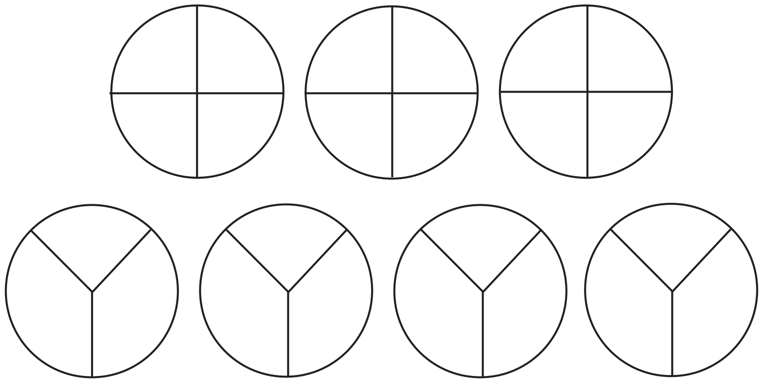
1) Usted invitó a un grupo de amigos a su casa para celebrar su cumpleaños. En total (incluyéndolo a usted) son 12 personas. Para cenar preparó siete pizzas grandes. Naturalmente usted querría que todo el mundo comiera el mismo número de porciones. ¿Cómo hacer? Por supuesto, uno podría cortar cada pizza en 12 (doce) y entonces, a cada uno de sus amigos le tocaría una de las miniporciones en cada pizza. Pero este método es impráctico (¿se imagina cortando cada pizza en 12?). ¿Se le ocurre alguna otra solución?
2) Usted se encuentra con dos personas, sabiendo que son siempre consistentes en sus respuestas: dicen siempre la verdad o siempre mienten. Puede que ambos sean mentirosos, o que ambos sean siempre sinceros, o incluso que uno mienta y uno diga siempre la verdad. Se establece entonces el siguiente diálogo con uno de ellos: “Ustedes dos, ¿son sinceros o mentirosos?”, y recibe esta respuesta: “Al menos uno de nosotros es mentiroso”. Preguntas: la perso-

na con la que usted habló, ¿es sincera o mentirosa? ¿Y la otra con la que no habló, miente o dice siempre la verdad?

3) Usted llega a una cena en un restaurante en donde habrá (en total) cinco personas sentadas en una mesa circular. A usted le interesa mucho poder conversar e interactuar con una de las personas presentes. ¿Qué es más probable que suceda: que al sentarse le toque estar a uno de sus lados o no?
4) Una bebida gaseosa hace una promoción con sus tapitas y deciden pintarlas de cuatro colores: rojo, amarillo, verde y azul. Para poder participar en la premiación es necesario juntar cuatro tapitas del mismo color o cuatro tapitas de los cuatro colores diferentes. Si uno tiene suerte, puede que comprando cuatro gaseosas sea suficiente: o consigue las cuatro iguales o las cuatro distintas. Pero esto es poco probable que suceda. La pregunta es: en el peor de los casos, ¿cuántas gaseosas tiene que comprar para estar *seguro* de que puede aspirar al premio?
5) Uno tiene cuatro dados convencionales, como cuando se juega a la 'generala', pero en lugar de ser *cinco* hay nada más que cuatro. Los pone en un cubilete y luego de batirlo, arroja los dados en la mesa. ¿Qué es más probable que suceda: que alguno de los dados muestre un *seis* o que no?
6) Piense la solución de este problema sencillo: "El precio de un traje y una camisa fue de 1.100 pesos. Si el traje cuesta 1.000 pesos más que la camisa, ¿cuál es el precio de la camisa?".

Respuesta al problema 1

Lo que uno puede hacer es cortar tres de las pizzas en cuatro porciones iguales y las otras cuatro pizzas en tres porciones iguales:



Hecho esto, cada uno de sus amigos come una de las porciones de las tres pizzas cortadas en cuatro, y una de las porciones de las cuatro pizzas cortadas en tres. En consecuencia, todos comen la misma cantidad de pizza.

Respuesta al problema 2

El que habló con usted pudo haber dicho algo cierto o falso. Analicemos cada situación. Si la persona con la que usted habló fuera mentiroso, sería mentira entonces ***que al menos uno de los dos es mentiroso***. ¿Qué quiere decir esto? Si es mentira que ninguno de los dos es mentiroso es porque *los dos dicen la verdad*. Pero si así fuera, el que habló *estaría diciendo una mentira*. Luego, como el que habló no puede decir simultáneamente algo que sea *verdad* y *mentira*, la persona que habló con usted tiene que haber dicho la verdad. En consecuencia, la frase que dijo ('al menos uno de nosotros es mentiroso') es verdadera, y como él no lo es, entonces la otra persona es mentirosa. Y ésa es la respuesta: el que habló con usted dice siempre la verdad y el otro, es mentiroso.

Respuesta al problema 3

La probabilidad es la misma, ya que una vez que la persona con la que usted querría poder conversar ocupa un lugar cualquiera en la mesa redonda, a su lado tendrá dos sillas, y alejadas, otras dos. Luego, o bien usted ocupará una de esas dos sillas, o bien alguna de las otras dos. En cualquier caso, si la distribución es al azar, tendrá tantas posibilidades de estar sentado junto a esta persona como alejado de ella.

Respuesta al problema 4

Por supuesto que uno no puede comprar menos de cuatro gaseosas, porque si no, no hay manera de tener ni cuatro distintas ni cuatro iguales. Pero ciertamente cinco no son suficientes, porque usted podría tener dos de un color y tres de otro. Y lo mismo sucede con seis, siete, ocho e incluso nueve. Es que con nueve podría darse el caso en que usted tuviera tres de cada color. Sin embargo, esto *sugiere* la respuesta final (¿no lo quiere pensar usted?). Con *diez tapitas*, si no hay cuatro de un mismo color, el mayor número que puede haber de cada una es tres. Pero teniendo tres de cada uno de tres colores, suman nueve tapitas. La décima está forzada a ser o bien de un color distinto de los tres que usted ya tiene en la mano (con lo cual tendría cuatro tapitas de cuatro colores distintos), o bien debería repetir uno de los tres colores que ya tiene (en cuyo caso, tendría cuatro tapitas de *ese* color). Moraleja: hacen falta *diez* tapitas.

Respuesta al problema 5

Contemos (usted y yo) los casos posibles. Es decir, cuando uno arroja los cuatro dados, ¿cuántos resultados posibles hay? En cada dado puede aparecer cualquiera de los seis números (del as al seis). Y como cada dado es independiente de los otros, hay en total 6^4 = 1.296 posibilidades. Veamos cuántas de estas *tiradas* NO contienen un seis. Ahora, lo que uno hace es permitir que el dado recorra los números del as hasta el cinco. Otra vez, como los cuatro dados son independientes, uno deduce que pueden aparecer 5^4 = 625 formas en la mesa, pero ahora, *ninguno* de ellos es un número *seis*. Luego, del total (1.296) hay un poco menos de la mitad (625) que *no contienen* un seis. O sea, como la mitad de 1.296 es 648, se deduce que *más de la mitad* (1.296 - 625 = 671) contienen un *seis* y *menos de la mitad*, 625, no contienen ningún seis.

Respuesta al problema 6

El traje cuesta $ 1.050 y la camisa cuesta $ 50. En total, $ 1.100 y el traje cuesta exactamente $ 1.000 más que la camisa (como decía el problema). Una observación: dejé este problema para el final porque con él me sucedió algo realmente increíble: ¡absolutamente todas las personas que conozco (y me incluyo, porque yo me conozco) cometimos el *mismo* error! La tentación de creer que es un problema *tan fácil* hace suponer que la solución es: ‘el traje cuesta $ 1.000 y la camisa cuesta $ 100’. Pero esta respuesta es equivocada, porque el problema dice claramente que el traje "*cuesta mil pesos* ***más*** que la camisa", y si la camisa costara $ 100 entonces el traje tendría que costar $ 1.100, y en ese caso, el precio de los dos objetos sería de $ 1.200 y no $ 1.100 como indica el problema. Notable, ¿no?

Madre de siete niños

Una madre tiene siete hijos, entre ellos dos grupos de trillizos. Cuando la madre hizo el producto de las edades, el número resultó ser 6.591. ¿Qué edades tenían cada uno? (se supone que contabilizamos solamente números enteros positivos).

Respuesta

De acuerdo con el *Teorema Fundamental de la Aritmética*[68], el número 6.591 se puede escribir así

$$6.591 = 3 \times 13^3$$

Por lo tanto, ya sabemos que un grupo de trillizos tenía 13 años. Por otro lado, el número *tres* no se puede descomponer más (ya que es número primo) y en consecuencia sabemos las edades de cuatro de los hermanos: uno tiene tres años y un grupo de trillizos tiene 13 años cada uno.

68. El Teorema Fundamental de la Aritmética dice que todo número entero (positivo) mayor que *uno* se puede descomponer de una *única* forma como producto de primos (salvo el orden).

¿Y los otros tres? Como tienen que ser trillizos, deben tener la misma edad. ¿Qué piensa usted?

Si uno advierte que el número 6.591 se puede escribir *también* así:

$$6.591 = 1^3 \times 3 \times 13^3$$

resulta que la *única* solución posible es que los otros tres niños tengan *un año cada uno*.

Ahora sí tenemos resuelto el problema: uno de los hermanos tiene tres años, un grupo de trillizos tiene *un* año y los restantes trillizos tienen *trece* años cada uno.

Un sencillo (¿seguro?) problema con monedas

Este problema pone a prueba el sentido común. Creo que es muy sencillo y sin embargo, no me parece que sea evidente. Fíjese qué le pasa a usted cuando quiere contestarlo.

Suponga que los dos tenemos la misma cantidad de monedas en una bolsa, digamos que son más de 20. En realidad no importa cuántas, sólo que los dos tengamos el mismo número dentro de cada bolsa.

Pregunta: si yo quiero darle a usted tantas monedas como le hagan falta, de manera tal que ahora usted tenga diez más que yo, ¿cuántas tengo que darle? No se apure en contestar. Fíjese lo que le pasa si quiere aventurar un resultado en forma inmediata.

Respuesta. La primera tentación (al menos lo que le sucede a la mayoría de las personas a las que les propuse el problema) es contestar que yo tendría que entregarle *diez* monedas. Pero esa solución es equivocada (¿quiere pensar por qué?).

Es que si yo le entrego *diez* de mis monedas a usted, yo tengo diez menos que las que tenía y usted tiene diez más que las que tenía. O sea, que ahora usted tiene *veinte* monedas más que yo, y no era eso lo que queríamos.

Ahora usted advierte cuál es la respuesta correcta, ¿no es así? Para que usted pase a tener *diez monedas* más que yo, tengo que darle *cinco*. En ese caso, yo tengo cinco menos, y usted cinco más, y entonces la diferencia entre usted y yo (en cuanto al número de monedas que tenemos) es exactamente diez. ¿No es interesante que suceda esto?

Un avión con viento de cola y de popa

Suponga que un avión viaja a *una velocidad constante* desde A hacia B, y vuelve a la misma velocidad desde B hasta A. Si NO HAY VIENTO en ninguna de las dos direcciones, tarda el mismo tiempo tanto al ir como al volver. Ahora, supongamos que SÍ HAY VIENTO y que va en la dirección de A hacia B. La velocidad del avión va a incrementarse porque el viento de cola lo impulsará más rápido hacia B. Por lo tanto, el tiempo que le llevará llegar desde A hasta B va a ser menor que el que tardaba antes. Cuando el avión vuelva desde B hasta A, si el viento se mantiene en la misma dirección y velocidad que a la ida, el tiempo que tardará el avión en volver será mayor porque ahora tendrá el viento de frente. La pregunta que tengo para usted es la siguiente: ¿se compensará el tiempo de menos que le llevará al avión viajar a la ida con el tiempo de más que le llevará viajar a la vuelta? Dicho de otra forma: si no hay viento, el viaje le lleva al avión un determinado tiempo para ir desde A hasta B y luego volver. Cuando sí hay viento, ¿el tiempo es el mismo? En estas condiciones, ¿tarda más o tarda menos? ¿Depende de la velocidad del avión y del viento?

Respuesta

Tarda más. ¿Por qué? Porque el tiempo que va con viento de cola es *menor* que el tiempo que pasa con el viento en contra. Piénselo. Si todavía no está convencida/convencido, acompáñeme con esta idea: supongamos que el avión va a 500 kilómetros por hora, y el viento de cola también fuera 500 kilómetros por hora. Eso querría decir que para ir desde A hasta B tardaría la mitad de lo que tardaba sin viento. Pero ahora, para volver de B hasta A, el avión ¡no podría volver! Es que los 500 kilómetros por hora del viento de frente, compensarían la velocidad propia del avión. Entonces, este caso extremo muestra que si el avión pasa más tiempo con viento en contra que con viento a favor, el tiempo que tardaría en ir y volver desde A hasta B sería mayor.

El recibo con números borroneados

Un señor acaba de inaugurar un hotel con 72 habitaciones. Entre los objetos que tuvo que distribuir en cada una de ellas había un televisor. El gerente que tenía que ocuparse del tema fue a una empresa de electrodomésticos y compró 72 televisores iguales.

Cuando hacían la revisión de todas las inversiones, el dueño le pidió al gerente que le diera el recibo de compra, y allí descubrieron que el papel se había humedecido y había borroneado algunos números. Con todo, se podía ver que era un número de cinco cifras, pero se habían borrado la primera y la última. Se veía algo así:

X679Y

¿Puede usted decidir cuánto salió cada televisor (suponiendo que el gerente pagó por cada uno un número entero de pesos)?

Respuesta

Para que sea múltiplo de 72 tiene que ser múltiplo de 8 y de 9 porque son coprimos. Para que sea divisible por 8, las tres últimas cifras (79Y) tienen que formar un número múltiplo de 8. Luego, tiene que ser 792. Por otro lado, para que sea múltiplo de 9, la suma de sus dígitos tiene que ser múltiplo de 9: luego, $X + 6 + 7 + 9 + 2 = X + 24$ tiene que ser múltiplo de 9. Conclusión, $X = 3$. El número en cuestión era 36.792. Por lo tanto, cada televisor salió \$ 511 (ya que multiplicado por 72 resulta ser \$ 36.792).

Bolsillos y monedas

Suponga que usted está vestido con un saco y un pantalón con muchos bolsillos. Digamos que en total tiene *diez bolsillos*.

Por otro lado, antes de salir de su casa advierte que tiene 44 monedas. ¿Será posible que usted distribuya las 44 monedas en los 10 bolsillos poniendo en cada uno de ellos un número diferente de monedas? ¿Tendrá solución este problema? Fíjese si se le ocurre alguna estrategia para hacer la distribución o si encuentra algún argumento para convencerse de que no será posible.

Respuesta

Es curioso, pero por más que uno intente no es posible encontrar una distribución que contemple un número de monedas diferente en cada bolsillo. ¿Por qué? Como usted advierte, si yo afirmo que no se va a poder, necesito exhibir un argumento que demuestre que, sin importar quién lo intente, no le será posible hacerlo. Es decir, lo que pretendo establecer es que no *alcanza* con escribir que yo no pude o que usted tampoco. La idea es mostrar que nadie podría. ¿Cómo hacer?

Suponga que fuera posible encontrar esa distribución. Más aún, que en uno de los bolsillos no pone ninguna moneda (lo que correspondería al caso de poner *cero* monedas en ese bolsillo). Así, uno tendría: un bolsillo sin monedas, otro bolsillo con una moneda, otro con dos monedas, otro con tres, y así siguiendo, hasta llegar a que el décimo bolsillo tiene *nueve* monedas. En ese caso, la suma de las monedas que usted logró distribuir en los bolsillos es:

$$\boxed{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45}$$

O sea, para *no repetir* el número de monedas en alguno de los bolsillos necesitaría tener *como mínimo* 45 monedas, y solamente hay 44[69].

Eso prueba que no importa quién lo intente, el problema no tiene solución. La matemática provee —en este caso— una herramienta muy poderosa: uno supone que el problema *sí tiene solución*, pero si la tuviera, obligaría a que haya por lo menos 45 monedas y no 44. De esa forma, uno concluye que no hay forma de encontrar la solución al problema pedido.

---

69. En realidad, esto prueba que uno *no* puede distribuir las monedas en diez grupos de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 monedas. Para completar la solución uno debería decir: un bolsillo tendrá que tener *cero o más monedas, el segundo tendrá una o más monedas, el tercero, dos o más, y así siguiendo con todos los bolsillos.* Luego, la suma de todas las monedas que aparecen en los bolsillos será de 45 (o más). Y esto termina la solución.

Cinco personas distribuidas en un cuadrado

Éste es un desafío interesante. Suponga que tiene dibujado un *gran* cuadrado en el piso. No importan las dimensiones pero hace falta que sea un cuadrado.

Usted tiene que distribuir ahora cinco personas en ese cuadrado, ubicándolas o bien en los bordes o bien en el interior de manera tal que las distancias entre dos cualesquiera de esas personas sea la 'máxima' posible. O sea, separándose lo más que puedan entre sí, de manera tal que podamos lograr la mayor distancia posible entre las dos personas que estén más cerca. ¿Cuál será esa distancia?

Por ejemplo: si fueran cuatro personas en lugar de cinco, lo mejor sería ponerlas en cada una de las puntas del cuadrado. De esa forma, cualquier par de personas o bien están a una distancia igual al 'lado' del cuadrado o en el mejor de los casos, los separa la diagonal. Claramente, no se los puede distribuir de una *mejor* forma, porque si uno pone alguna persona 'dentro' del cuadrado y deja las otras tres en los vértices, lo que termina haciendo es acercando a esta persona a los otros tres.

Si en cambio desliza a esa persona por cualquiera de los bordes, termina acercándola a la persona que está en el otro vértice del lado en donde usted empezó el deslizamiento.

Por lo tanto, la manera óptima de distribuirlos es poniendo cada una en una esquina. Pero, ¿y si fueran cinco personas? Entonces... ¿qué hacer?

Ahora le toca a usted.

Solución

Le propongo que dividamos el cuadrado en cuatro 'cuadraditos' iguales. Es decir, como se ve en la figura 1, uno 'divide' el cuadrado uniendo los puntos ubicados en la mitad de cada lado. Ahora queda formada una cuadrícula.

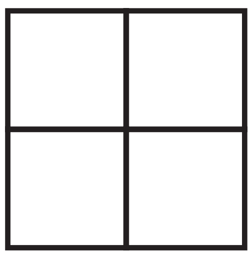


Fig. 1

Como ahora tenemos cinco personas en lugar de cuatro, empezamos por distribuir cuatro de ellas igual que hice antes: poner cada una (de las cuatro) en cada uno de los vértices. De esa forma, habrá una persona por 'subcuadrado' en el que quedó dividido el cuadrado original. Ahora bien: ¿dónde poner la quinta persona?

Lo 'mejor' que uno puede hacer ahora es colocar a esa quinta persona justo en el medio del cuadrado original, o sea, en el medio de la cuadrícula. Por lo tanto, la mejor configuración es poner una persona en el centro y las restantes en las esquinas. ¿Por qué?

Porque si uno mira la cuadrícula, en alguno de los subcuadrados tiene que haber dos personas ya que son cinco personas y cuatro cuadrículas. Entonces, lo más conveniente es poner a esas dos personas que están en el mismo subcuadrado lo más lejos posible. Eso se logra poniéndolas en diagonal.

Por lo tanto esas dos personas estarán una en una esquina de ese subcuadrado (que es a su vez 'esquina' del cuadrado original) y la otra, en el vértice que está en diagonal (que coincide con el punto del centro del cuadrado original).

Y ésa es la solución que uno buscaba: cuatro en las esquinas y uno en el medio del cuadrado.

Dos trenes, dos estaciones, dos velocidades: punto de encuentro

Imagine dos estaciones de tren: A y B. Están separadas por 400 kilómetros. Un tren sale de la estación A a las 6 de la tarde y viaja a 40 kilómetros por hora hacia la estación B.

El segundo tren sale de la estación B (hacia la estación A) a las 7 de la tarde y corre todo el camino *paralelo* a las vías en las que viaja A. La diferencia está en que el tren que salió de B lleva una velocidad de 50 kilómetros por hora. ¿En qué momento se encuentran?

Solución

Hay varias maneras de pensar este problema. Elijo una: como el tren que está en la estación A sale a las 6 de la tarde y el otro (que sale desde B) lo hace a las 7 de la tarde, podemos suponer que la distancia entre ambos es de 360 kilómetros a las 7 de la tarde. Es que el primer tren salió una hora antes, y por lo tanto, a las 7, cuando el segundo empieza su movimiento, el que estaba en A ya recorrió 40 kilómetros. Por lo tanto, la distancia entre ambos es de 360 kilómetros.

Uno viaja a 40 kilómetros por hora, o sea que en un tiempo t recorre $t \times 40$ kilómetros.

El otro viaja a 50 kilómetros por hora, o sea que en un tiempo *t* recorre $t \times 50$ kilómetros.

Como van en sentidos opuestos, voy a *interpretar* que en un tiempo *t* al segundo tren *le falta* para llegar hasta el tren que salió de A, una distancia igual a $(360 - t \times 50)$. Fíjese que cuando $t = 0$, o sea cuando el segundo tren todavía no salió, están a distancia 360. (De la misma forma, transformando la velocidad del segundo tren de kilómetros por hora a kilómetros por minuto, el segundo tren viaja a $50/60 = 5/6$ kilómetros por minuto. En 12 minutos, hace 10 kilómetros. Por lo tanto, haciendo $t = 360 / 50 = 7{,}2$, o sea 7 horas y 12 minutos, llega a los 360 kilómetros desde donde podemos pensar que *salió* el primer tren, o que estaba a las 7 de la tarde.)

En todo caso, necesitamos encontrar el *número t* de manera tal que

$$t \times 40 = 360 - t \times 50$$

Y esto sucede cuando

$$t \times 90 = 360, \text{ o sea}$$
$$t = 4$$

Luego, cuando $t = 4$ es el momento en que se encuentran, a las 4 horas de que saliera el segundo tren, y a las 5 horas de que partiera el primero, ya que éste salió una hora antes. Es decir, se encuentran a las 11 de la noche.

Otra forma de resolverlo

Si uno llama *t* al tiempo de viaje del segundo tren, medido en horas, se tiene la siguiente igualdad:

$$40\ (t + 1) = 400 - 50t \qquad (^{*})$$

En cuanto a la respuesta al problema, se puede obtener de la ecuación (*) "despejando" el valor de *t* que hace cierta la igualdad.

$$40t + 40 = 400 - 50t$$

O sea,

$$90t = 360,$$

con lo que se deduce que $t = 4$. Por lo tanto, a las 4 horas de que saliera el segundo tren, y a las cinco horas de que partiera el primero es cuando se encuentran: las 11 de la noche.

Salió un seis al tirar dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también haya salido seis?

Suponga que yo le tapo los ojos con un pañuelo y le pido que tire dos dados. Como yo estoy al lado suyo y *veo* el resultado, le digo que *uno* de los dos dados es un seis. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro dado *también* haya salido *seis*?

Acá conviene hacer una observación IMPORTANTE: si yo le hubiera dicho que en *la primera tirada* del dado salió un *seis*, entonces, la probabilidad de que en el otro haya salido también un *seis* sería 1/6. Sin embargo, yo le dije que en *una* de las *dos* tiradas salió un *seis*, no el *primero*.

Respuesta

Entonces, hace falta analizar todas las posibles combinaciones al tirar dos dados que tienen al menos un *seis* y fijarse de todas ellas, cuál tiene *dos números seis*.

Mire junto conmigo todos los resultados posibles en los que haya salido un *seis* en alguno de los dos dados (pongo entre paréntesis los potenciales resultados de cada dado):

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6) y (5,6).

Se ve entonces que hay *once* posibles combinaciones que tienen al menos un *seis*. De ellas, solamente *una* tiene *dos números seis*. O sea, la probabilidad es 1/11: de los *once* resultados posibles, solamente *uno* es favorable ya que hay un solo caso en el que los dos dados resultaron ser números *seis*.

Los niños, las camisetas numeradas y las distintas diferencias

El siguiente problema tiene dos fases (o tres). La primera es la más sencilla y es la que invita a pensar cómo resolver las siguientes. Por eso elegí primero un ejemplo más sencillo, como para 'sugerir' qué hacer en el caso más general. Acá va.

Caso sencillo

Suponga que hay cuatro niños (o niñas) preparados para competir en una escuela. Digamos que van a correr una carrera de 100 metros. Los cuatro están numerados con *pecheras* que llevan los números 1, 2, 3 y 4.

Si uno los ordenara en la pista de esa forma (antes de empezar), entonces las *diferencias* entre los números de las camisetas es siempre constante: uno. Esto sucede porque (sin prestar atención a cuál está primero y cuál está último), si los ordenamos así:

1 - 2 - 3 - 4

entonces, la diferencia entre el primero y el segundo es (2 - 1) = 1, la diferencia entre el tercero y el segundo es (3 - 2) = 1 y por última la diferencia entre el último y el tercero es (4 - 3) = 1.

¿Se podrá ordenarlos de manera tal que las diferencias entre los números de las camisetas sean *siempre* distintas? Si no se puede, explique por qué. En cambio, si se pudiera, muestre alguna forma de ordenarlos.

Solución

Como hay cuatro niños, al ordenarlos en una hilera, hay exactamente tres diferencias (la que va del primero al segundo, del segundo al tercero y por último, del tercero al cuarto). La diferencia *mayor* que se puede obtener es *tres* si pusiera a los niños de camisetas 4 y 1 juntos. Al mismo tiempo, la diferencia *menor* que se puede obtener es *uno*, cuando pongo a dos niños con camisetas que lleven los números consecutivos.

Como en total hay tres diferencias y ya sabemos que la mayor es *tres* y la menor es *uno*, la única que queda por considerar es *dos* (cuando, por ejemplo, ponemos al que lleva el número 1 y 3 juntos, o el 2 y el 4).

¿Se podrán ordenar las camisetas de manera que aparezcan las tres diferencias posibles (uno, dos y tres)?

La única manera de obtener la diferencia *tres* es poniendo al 1 y al 4 juntos. Luego, empezamos la formación con un 1 - 4.

Para poder obtener la diferencia *dos*, como el 1 ya lo tengo al principio, no voy a poder ubicar al 1 y al 3 juntos. Entonces, la *única* alternativa que nos queda es poner al *dos* al lado del *cuatro*. De esa forma, la formación, que había empezado 1 - 4, sigue con el 2.

Se tiene entonces:

1 - 4 - 2

Por último, nos queda un número por ubicar, el número *tres*. La formación final queda:

1 - 4 - 2 - 3 (*)

que justamente cumple con todo lo pedido: las tres diferencias son distintas: tres, dos y uno.

Caso intermedio

Suponga que ahora, en lugar de tener cuatro niños con las cuatro camisetas numeradas en forma creciente del *uno* hasta el *cuatro*, tuviéramos ocho chicos, con camisetas numeradas del *uno* hasta el *ocho*.

¿Se los podrá ordenar de forma tal que las *siete* diferencias entre ellos sean todas diferentes?

Respuesta

Siguiendo con la idea descripta, la *mayor* diferencia que se puede obtener es un *siete*, cuando ponemos juntos al niño con la camiseta número *uno* y al niño con la camiseta número *ocho*. Al mismo tiempo, la *menor* diferencia es *uno*, que se obtiene cuando uno pone juntos a dos niños con números consecutivos.

Como hay para considerar siete diferencias, que van desde *uno* hasta *siete*, y el número *siete* solamente se puede obtener si ponemos juntos a los niños con las camisetas *uno* y *ocho*, la formación tiene que empezar así:

1 - 8

Para poder obtener la diferencia *seis*, hay dos posibilidades: poner juntos al 1 y al 7, o bien al 8 y al 2. Como al *uno* ya no lo podemos usar porque está al lado del *ocho*, entonces no queda más remedio que poner el *dos* al lado del 8. En ese caso, la formación sigue así:

1 - 8 - 2

De la misma forma, para obtener la diferencia *cinco* hay tres posibilidades: 1 y 6, 2 y 7 o bien 3 y 8. Como el 1 y el 8 ya los he utilizado, la única alternativa que tenemos es poner el 7 al lado del 2. En este caso, la formación resulta:

1 - 8 - 2 - 7

Para obtener la diferencia *cuatro* hace falta poner el *tres* al lado del *siete* (las otras ya están ocupadas) y por lo tanto, la formación continúa así:

1 - 8 - 2 - 7 - 3

y continuando con la misma idea, la solución final es:

1 - 8 - 2 - 7 - 3 - 6 - 4 - 5 (**)

Si usted evalúa todas las diferencias que se obtienen entre dos niños consecutivos, advertirá que son todas diferentes.

Acá, pausa. Mire el resultado final tanto en el caso de cuatro niños (que figura en (*)) o el del caso de los ocho niños (como figura en (**)).

En cada uno de los casos, se empieza con el número *uno*, y luego aparece el último posible (para generar la diferencia más grande). En el caso de cuatro niños, aparece el número *cuatro* al lado del *uno*. En el caso de las ocho camisetas, aparece el *ocho* al lado del *uno*. Pero a partir de allí, va subiendo en uno, y la otra secuencia, va bajando en uno. Mire las formaciones (*) y (**) para convencerse de lo que está leyendo.

Dicho esto, quiero plantear el caso general.

Caso general

Si uno tuviera *n* niños, un número cualquiera de niños, con camisetas numeradas desde el número *uno*, hasta el número *n*, y yo quisiera ordenarlos de manera tal que *todas las diferencias posibles que puedan aparecer sean distintas*, ¿habrá alguna forma de obtenerlo? ¿Cuál es?

Solución

Tal como sugieren los dos casos que vimos anteriormente, la idea es empezar con el número *uno*, y luego seguir con el número *n* (que es el mayor). Y a partir de allí, ir *creciendo* desde el *uno* hasta la mitad de *n*, salteando de a una, y *decreciendo* desde *n* hasta llegar a la mitad de *n*.

La solución entonces es ubicar los *n* niños con las camisetas numeradas así:

$$1 - n - 2 - (n-1) - 3 - (n-2) - 4 - (n-3) - 5 - (n-4) - 6 - \dots$$

De esta forma, hemos logrado que aparezcan *todas* las camisetas, y las diferencias entre dos niños adyacentes es siempre diferente.

Más allá del resultado en sí mismo, lo que me importa con este problema es mostrar cómo el estudio y/o análisis de casos particulares, de casos más pequeños, puede *iluminar* el camino para resolver el caso más general.

Si uno tuviera 50 niños, ahora ya sabe lo que tiene que hacer:

1 - 50 - 2 - 49 - 3 - 48 - 4 - 47 - 5- 46 - 6 - 45 - ...

cosa que hubiera sido más difícil de conjeturar de haber empezado directamente por aquí[70].

---

70. Si usted estuvo pensando el problema quizás haya advertido que la respuesta no es única. De hecho, se puede poner 2-3-1-4 para el primer caso, 3-6-4-5-1-8-2-7 en el segundo y esto da la idea de cómo construir al menos otra solución en el caso general. ¿Serán las únicas? ¿Cuántas habrá?

Partidas de ajedrez

Quiero proponerle que piense las siguientes situaciones y decida si son posibles o no.

Un par de niños son alumnos de dos colegios diferentes. Los voy a llamar A y B.

Lea las siguientes afirmaciones que cada uno de ellos hizo y analicémoslas juntos para ver si pueden ser verdaderas las dos.

A dijo:

> "En mi curso somos 24 alumnos y cada uno jugó exactamente *tres* partidas de ajedrez, siempre frente a compañeros diferentes del mismo curso".

Por su parte, B dijo lo siguiente:

> "En mi curso sucedió lo mismo, la única diferencia es que nosotros somos 25 compañeros y no 24".

Al escuchar lo que había dicho B, el niño A replicó inmediatamente: "Eso es imposible".

Ahora, le pregunto: ¿quién de los dos tiene razón?, ¿o es que no se puede dar ninguna de las dos posibilidades?

Respuesta

¿Es posible que lo que dijo A pueda ser cierto? La/lo invito a que piense si se le ocurre alguna distribución de los niños en un curso de 24 estudiantes en donde lo que dijo A pueda ser cierto.

Como siempre, me permito sugerirle algo: no avance en la lectura si no le dedicó un *mínimo* esfuerzo.

Sigo yo. Suponga que los 24 alumnos del curso se dividieron en seis grupos de cuatro estudiantes cada uno.

Si cada miembro de un grupo compite solamente en contra de los que pertenecen a ese grupo, entonces cada uno de ellos juega exactamente tres partidas.

Con ese escenario, lo que planteó A *se hace posible*.

Ahora, pensemos si lo que dijo B puede ser cierto. ¿Habrá alguna forma de distribuirlos?

Como usted advierte, en el caso anterior, para poder afirmar que *sí* había una forma de que lo que dijo A fuera cierto, bastó con encontrar una posible distribución de los estudiantes y determinar de qué forma se tienen que enfrentar.

Le propongo que trate de ver si es posible hacer lo mismo con B (inténtelo, al menos un par de veces): se tropezará con un problema: *pareciera que no se puede*.

Es acá en donde me interesa pensar junto con usted algo importante: el hecho de que ni usted ni yo hubiéramos podido encontrar una forma de hacer la *tal* distribución no parece suficiente, porque bien podría venir otra persona y exhibir lo que nosotros no pudimos. Si no, habría que agotar *todas las posibles configuraciones* hasta determinar que no va a existir solución.

La matemática, sin embargo, es capaz de ofrecer una versión un poco más eficaz para poder sostener que *no va a ser posible* encontrar una manera de hacer que lo que dijo B sea cierto. Veamos cómo.

Supongamos que *sí fuera posible*. Es decir, si lo que dijo B fuera posible, cada alumno de su curso (son 25) habría jugado exactamente *tres* partidas cada uno. Por lo tanto, como (3 × 25) = 75, eso significaría que en total se jugaron 75 partidas. Pero… pero… como usted se da cuenta, *estamos contando cada partida dos veces*. Es que cuando el niño X juega contra la niña Y, la contamos una vez como una de las partidas que jugó X. Pero al mismo tiempo, contamos la misma partida cuando estamos incluyendo las partidas que jugó Y.

Luego, el número de 75 partidas es exactamente el *doble* de las partidas jugadas. O sea, si uno quisiera calcular *el número correcto* de encuentros, habría que dividir 75 por *dos*. Y eso ¡no es posible!, ya que el número 75 es un número impar.

Moraleja: lo que dijo B no puede ser cierto.

Moraleja 2: La gracia que tiene haber analizado este problema ficticio es que la matemática vino en auxilio para *demostrar* que una afirmación no puede ser cierta, y no hizo falta ni que *agotáramos todas las posibles maneras de distribuir los 25 niños, ni que pensáramos ninguna estrategia para que cada uno juegue exactamente tres partidas, ni nada*. Un argumento muy sencillo (usar que el número 75 no es un número par) sirvió para desechar cualquier análisis posterior.

Cuando uno piensa en problemas de este tipo, no es que los vaya a usar *exactamente* con este planteo en la realidad. Es decir: ¿cuán probable es que usted se vea enfrentado con un cálculo parecido en su vida cotidiana? Sin embargo, el hecho de haber descubierto (y utilizado) ciertas herramientas en el camino, permite tenerlas *guardadas* en nuestras neuronas y aprovecharlas en alguna otra ocasión[71].

---

71. Si usted está interesado en avanzar un poco más en este tema, hay un hecho más general que se llama 'El Lema del Apretón de Manos' que formuló Euler (uno de los mejores matemáticos de la historia). Se puede buscar información sobre el tema en http://es.wikipedia.org/wiki/Grado_%28teor%C3%ADa_de_grafos%29

Cuatro campanas y una estrategia para hacerlas sonar

Imagine que estamos en un colegio cuyo edificio central y el patio fueron construidos tres o cuatro siglos atrás. Lo notable es que en el centro de ese patio hay cuatro campanas, muy grandes, muy pesadas, que suelen ser el orgullo del pueblo.

Todos los días, antes de entrar a clase, los alumnos de la escuela escuchan el tañido de las cuatro campanas (digamos que están numeradas: 1, 2, 3 y 4). Pero lo interesante es que las campanas suenen todos los días en todos los órdenes posibles.

Uno podría preguntarse: ¿cuántos *órdenes* hay? Y esa respuesta no es muy difícil de encontrar (piénsela usted y verá que no es muy complicado… y si no, la voy a escribir un poco más adelante), pero lo que transforma el problema en algo mucho más atractivo es que como las campanas son *tan pesadas* y vibran durante tanto tiempo, el director y los alumnos de la escuela quieren encontrar algún método que, si bien recorra *todos* los órdenes posibles, lo haga de manera *eficiente*.

¿Qué quiero decir con *eficiente*? La idea es tratar de evitar que si uno las hace sonar en un determinado orden, cuando pase al *siguiente* no tenga que repetir (o al menos *trate de evitar repetir*) la campana que recién acaba de hacer sonar, porque lo que uno quiere es que las campanas hagan perdurar su sonido tanto como sea posible y además, como son muy pesadas, se trata de darle un pequeño resuello a los que las están haciendo tañir.

Por ejemplo, si uno empieza con el orden 1-2-3-4, lo que no querría es que el próximo orden sea: 4-3-2-1 (por ejemplo), ya que la campana 4 tendría que sonar dos veces seguidas. Si sonó en el orden 1-2-3-4, un orden 'aceptable' para seguir sería (por ejemplo) 2-1-4-3.

Estas campanas pesan toneladas y los sonidos tardan un tiempo en amortiguarse. El objetivo entonces es tratar de encontrar una estrategia que permita recorrer *todos* los órdenes posibles, pero al mismo tiempo que esa estrategia contemple que las campanas tarden la mayor cantidad de tiempo hasta que haya que hacerlas repicar otra vez.

Ahora le toca a usted. Yo sigo un poco más adelante.

Solución

Contemos primero cuántos órdenes posibles hay. ¿Cuántas campanas pueden sonar primero? Como usted advierte, cualquiera de las cuatro puede ser la primera. ¿Y luego? ¿Cuál puede sonar segunda? ¿Cuántas posibilidades hay? Es que una vez que uno fijó la primera, para la segunda quedan tres alternativas. Luego, para las dos primeras hay *doce* posibilidades: 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-4, 4-1, 4-2 y 4-3.

Establecido el orden para las dos primeras, lo que hay que hacer es decidir cuál de las dos que quedan sonará tercera. En consecuencia, como para cada una de las *doce* alternativas que hay para los dos primeras hay *dos* para la tercera, en total hay 24. La que empieza con 1-2 puede seguir con la 3 o la 4, la que empieza con la 1-3 puede seguir con la 2 o la 4, la que empieza con 1-4 puede seguir con la 2 o la 3, y así siguiendo. De esa forma se obtienen las 24. Y no hay nada más que hacer, porque una vez decididas las tres primeras, la cuarta es la única que no está incluida.

Conclusión: en total hay 24 órdenes posibles:

1-2-3-4	1-2-4-3	1-3-2-4	1-3-4-2	1-4-2-3	1-4-3-2
2-1-3-4	2-1-4-3	2-3-1-4	2-3-4-1	2-4-1-3	2-4-3-1
3-1-2-4	3-1-4-2	3-2-1-4	3-2-4-1	3-4-1-2	3-4-2-1
4-1-2-3	4-1-3-2	4-2-1-3	4-2-3-1	4-3-1-2	4-3-2-1

Ahora bien, ¿cómo planificar la segunda parte? ¿Cómo lograr que al ir variando el orden, las campanas estén lo más alejadas posibles para darles tiempo a que *amortiguen* su sonido?

Voy a proponer un método, pero es uno entre varios posibles. Quizás usted tenga otra forma de lograrlo y sería buenísimo que así sucediera. Le cuento lo que voy a hacer: voy empezar con un orden cualquiera, digamos 1-2-3-4.

Luego, el siguiente orden será conmutando las dos primeras, y las dos últimas. Es decir, el siguiente orden será: 2-1-4-3. Como usted ve, di vuelta las dos primeras (en el primer caso sonaron 1 y después 2, y en el segundo caso, suenan primero 2 y después 1) y luego las dos finales: primero se escuchan 3-4 y en el siguiente orden 4-3. Resumiendo, empezaríamos así: 1-2-3-4, 2-1-4-3.

Ahora, si volviera a hacer lo mismo, recuperaría el orden original. Por lo tanto, le propongo que demos vuelta las dos del centro. Es decir, partiendo de 2-1-4-3, el siguiente orden será 2-4-1-3 (ya que conmuté las dos del centro, la 1 y la 4).

Tendría entonces este orden desde el comienzo:

1-2-3-4, 2-1-4-3, 2-4-1-3

¿Y ahora? Y ahora propongo volver a conmutar las dos primeras y las dos finales entre sí. Es decir, partiendo de 2-4-1-3, la siguiente sería 4-2-3-1, y la idea es ir alternando: primero, rotar las dos primeras y las dos últimas, y luego las dos del centro. Veamos (juntos) qué sucede empezando por 1-2-3-4.

1-2-3-4 (cambiamos las dos de las puntas)
2-1-4-3 (ahora las dos del centro)
2-4-1-3 (las dos de las puntas)
4-2-3-1 (las dos del centro)
4-3-2-1 (las dos de las puntas)
3-4-1-2 (las dos del centro)
3-1-4-2 (las dos de las puntas)
1-3-2-4

Y al llegar acá, uno descubre que si quiere seguir con este método, volvería a un orden que ya usamos. Es decir, de 1-3-2-4 el próximo paso nos llevaría a 1-2-3-4.

¿Qué hacer? Como es fácil ver, si en total había 24, y usamos solamente ocho, puedo elegir alguna que no hubiera utilizado hasta acá, repetir el proceso y ver qué sucede. Para obtenerla, voy a cambiar *nada más* que las dos de una punta respecto de la última a la que habíamos llegado.

Estábamos en 1-3-2-4 y cambiamos nada más que las dos últimas.

1-3-2-4 (cambiamos por única vez las dos de la punta derecha)

1-3-4-2 (las dos de las puntas ahora)
3-1-2-4 (las dos del centro)
3-2-1-4 (las dos de las dos puntas, como antes)

2-3-4-1 (las dos del centro)
2-4-3-1 (las dos de las puntas)
4-2-1-3 (las dos del centro)
4-1-2-3 (las dos de las puntas)
1-4-3-2

Y acá vuelve a suceder lo mismo que antes. Si cambio las dos del centro obtengo 1-3-4-2, que ya la habíamos usado. Entonces, igual que en el caso anterior cuando íbamos a repetir si no cambiábamos el método, ahora conmutamos las dos de la punta derecha nada más.

Partiendo de

1-4-3-2 (cambiamos por única vez las dos de la punta derecha)

1-4-2-3 (las dos de las puntas ahora)
4-1-3-2 (las dos del centro)
4-3-1-2 (las dos de las puntas)
3-4-2-1 (las dos del centro)
3-2-4-1 (las dos de las puntas)
2-3-1-4 (las dos del centro)
2-1-3-4 (las dos de las puntas)
1-2-4-3

Y hasta acá llegamos. Hemos *barrido* todas las posibilidades (las 24) y lo que restaría es comprobar cuál es la distancia que hay entre *campanas*.

Tomo la primera lista de ocho:

1-2-3-4 2-1-4-3 2-4-1-3 4-2-3-1 4-3-2-1 3-4-1-2 3-1-4-2 1-3-2-4

Siga la trayectoria, por ejemplo, de la primera campana (que voy a *distinguir* poniéndola con el número *1* en letra más gruesa):

1-2-3-4   2-**1**-4-3   2-4-**1**-3   4-2-3-**1**   4-3-2-**1**   3-4-**1**-2   3-**1**-4-2   **1**-3-2-4

Fíjese que nunca aparece dos veces seguidas, y más aún: la distancia más corta es por lo menos *tres*, cuando suena la campana *uno* por sexta vez, suenan después las números 4 y la número 2 antes que vuelva a repetir, y esto es lo más cerca que voy a tener que hacerlas repicar.

Le propongo que haga el recorrido con todo lo que hicimos, y verá que lo mismo sucede con las cuatro campanas.

¿Será ésta la *mejor* estrategia? No lo sé. Puedo decir que esta es una *buena* estrategia, pero no sé si es la mejor. Sería interesante entonces, si tienen ganas y tiempo, sentarse a diseñar algún otro camino que incluya *todos los órdenes posibles* y que mejore el algoritmo, en donde *por lo menos* si suena una campana, para que suene otra vez, tienen que sonar dos en el medio.

¿Se podrá? Ahora le toca a usted.

5. JUEGOS, BELLEZAS Y DELICIAS

Quiero presentar un juego[72]. Es un juego de lógica y tiene un costado detectivesco. No hace falta *saber* nada de antemano. El único requisito es tener la voluntad de *pensar*. Y encima es entretenido. Acá va.

En un pueblo arrestan a cuatro sospechosos de haber robado un banco. Los voy a llamar A, B, C y D.

Luego de hacer las investigaciones pertinentes, el jurado tiene estos datos:

1) Si A fuera culpable, B también lo fue.
2) Si B fuera culpable, entonces o bien A es inocente o bien C es culpable.
3) Si D fuera inocente, entonces A tiene que ser culpable y C es inocente.
4) Si D fuera culpable, entonces A también es culpable.

72. Hay muchísimas variantes de este tipo de juegos de lógica, popularizados por Raymond M. Smullyan, el célebre matemático nacido en Nueva York en 1919. Smullyan es además mago, concertista de piano, lógico y seguramente algo más que yo no sé. El crédito por este problema le corresponde *todo* a él.

Con estos datos: ¿se puede decidir quién o quiénes de los cuatro fueron culpables (y quiénes son inocentes)?

Antes de avanzar, quiero hacer dos observaciones.

El punto (2) dice que —si B fuera culpable— entonces: "o bien A es inocente o bien C es culpable": hay que interpretar que ***por lo menos** una de las dos conclusiones es válida*[73].

Es decir, *al menos* una de las dos afirmaciones (A es inocente, C fue cómplice de B) es verdadera, pero incluso podría pasar que fueran ciertas las dos. Lo que es seguro que *NO* puede pasar es que ambas sean falsas.

Por último, aunque parezca una perogrullada, prefiero dejarlo escrito (vicios de matemático, supongo): una persona no puede ser culpable e inocente al mismo tiempo.

Obviamente, no hay ninguna trampa. Siéntese en un lugar tranquilo, concédase tiempo para pensar y permítase disfrutar del recorrido.

Solución

Para comenzar, quiero proponerle que hagamos juntos algunas conjeturas.

Tomemos el caso de D. No sabemos (aún) si es culpable o inocente. Por la afirmación (3), si D fuera inocente, entonces se deduce que A tiene que ser culpable[74].

Pero por otro lado, si D fuera culpable, por (4), A también tendría que ser culpable.

---

73. Me interesa enfatizar que esto se cumple "si B fuera culpable". Si B fuera inocente, entonces ambas premisas no tienen por qué ser verdaderas.

74. Se saca además *otra* conclusión: que C sería inocente, pero eso no es lo que me/nos interesa usar en este momento.

Entonces, de las dos reflexiones anteriores hemos deducido que *pase lo que pase* con D (inocente o culpable), resulta que A ¡tiene que ser culpable!

Sigamos. Como ahora sabemos que A es culpable, por el dato (1) se deduce que B es culpable también.

Usando (2), como B es culpable, quedan dos alternativas: o bien A es inocente, o bien C es culpable. Al menos una de estas dos afirmaciones tiene que ser cierta. Pero como ya sabemos que A *no es inocente*, entonces no queda más remedio de que C sea culpable.

Resumen: hasta acá entonces, hemos deducido que A, B y C son culpables. ¿Qué pasa con D?

Fíjese que de (3) se concluye que si D fuera inocente, entonces tienen que suceder dos cosas simultáneamente: A tiene que ser culpable y C tiene que ser inocente. Pero como ya sabemos que C es culpable, la suposición que involucra el dato (3) no puede ser cierta: D *no puede ser inocente*. En consecuencia, D es culpable también.

Y esto concluye el análisis. Con los cuatro datos que figuran anteriormente, se deduce que *¡los cuatro sospechosos son culpables!*

Una reflexión final. No se me escapa que uno *nunca* tendrá que hacer una evaluación de este tipo al investigar el robo de un banco, pero —obviamente— ésa *no es la idea*. Lo que pretendo es usar este ejemplo para mostrar cómo uno puede entrenarse a pensar, a conjeturar, a hilvanar ideas, a *deducir* y a sacar conclusiones un poco más elaboradas, menos inmediatas. Y eso *sí* que es necesario en la vida cotidiana.

Y de paso sirve para preguntarse por qué este costado lúdico de la matemática no tiene una inserción más evidente en los estadíos iniciales de las escuelas y los colegios.

La 'belleza' de la matemática se expresa una vez más

Describir la belleza es una tarea imposible. Por lo tanto, *abandono* antes de empezar. Es decir, no quiero intentar convencer ni a usted (ni a nadie) sobre qué características tiene que tener *algo* para ser considerado 'bello'.

Sin embargo, de lo que no me quiero privar es de compartir con usted algunas singularidades de la *aritmética*, aquella que involucra a los números y sus maravillosas cualidades. Y curiosidades también. Acá van algunas. Pase por acá. Se encontrará con seis pequeñas 'joyas'.

Número 1

Tome el número 12.345.679.

Como usted advierte, contiene todos los dígitos *no nulos* salvo el *ocho*.

Ahora bien. Fíjese lo que sucede si uno lo va multplicando sucesivamente por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

12.345.679 × 1 = 12.345.679 (falta el 8)
12.345.679 × 2 = 24.691.358 (falta el 7)
12.345.679 × 3 = 37.037.037
12.345.679 × 4 = 49.382.716 (falta el 5)

$12.345.679 \times 5 = 61.728.395$ (falta el *4*)
$12.345.679 \times 6 = 74.074.074$
$12.345.679 \times 7 = 84.419.753$ (falta el 2)
$12.345.679 \times 8 = 98.765.432$ (falta el *1*)

... y por último,

$12.345.679 \times 9 = 111.111.111$

Varias observaciones interesantes

1) Si uno multiplica por 1, el dígito que falta es el 8. ¿Cuál es la suma entre 1 y 8? Respuesta: *nueve*.
2) Si uno multiplica por 2, el dígito que falta es el 7. ¿Cuál es la suma entre 2 y 7? Respuesta: *nueve*.
3) Si uno multiplica por 4, el dígito que falta es el 5. ¿Cuál es la suma entre 4 y 5? Respuesta: *nueve*.

Y así uno puede seguir: la suma entre el dígito que falta y el número por el cual uno está multiplicando siempre resulta ser *nueve*.

Número 2

El número $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ es el *cubo*[75] más pequeño que se puede descomponer como la suma de tres[76] cubos:

---

75. Un número se llama '*un cubo*' cuando se puede escribir como *otro natural elevado al cubo*. Por ejemplo, el número 8 es un cubo, porque se puede escribir como 2^3. El número 27 también, porque $27 = 3^3$. En el caso que nos ocupa, el número 156 es el primer *cubo* (ya que se escribe como $156 = 6^3$) que se puede escribir como la *suma* de tres cubos.

76. Todos los números involucrados en este problema son números naturales.

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 \qquad (*)$$

Es decir,

$$216 = 27 + 64 + 125$$

Pero por otro lado, el *siguiente cubo más pequeño* que se puede descomponer como la suma de tres cubos es:

$$9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3 \qquad (**)$$

Es que

$$729 = 1 + 216 + 512$$

Pero como sabemos que el mismo 6^3 se puede descomponer como suma de tres cubos, usando las igualdades (*) y (**), se deduce que 9^3 se descompone también como suma de *cinco* cubos:

$$9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3 = 1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3$$

Número 3

$$\left.\begin{aligned} 153 &= 1^3 + 5^3 + 3^3 \\ 371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 \\ 370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 \\ 407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3 \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

son los únicos cuatro números mayores que 1 que son iguales a la suma de los cubos de sus dígitos.

Nota: yo había escrito esta curiosidad sobre los cuatro números (153, 371, 370 y 407) que son iguales a la suma de los cubos de sus dígitos. Cuando Carlos Sarraute tuvo este material en su poder, escribió un programa sencillo[77], que le permitió calcular todas las posibilidades para números de hasta siete dígitos y potencias que van desde $p = 2$ hasta $p = 7$. Y esto fue lo que 'descubrió':

---

77. Éste es el programa para aquellos a quienes les interese *programar*:

```
for p = 2:7
  printf("p = %d \n", p);
  for x1 = 0:9
    for x2 = 0:9
      for x3 = 0:9
        for x4 = 0:9
          for x5 = 0:9
            for x6 = 0:9
              for x7 = 0:9
              s = x1^p + x2^p + x3^p + x4^p + x5^p + x6^p + x7^p;
              n = 1000000*x1 + 100000*x2 + 10000*x3 + 1000*x4 +
              100*x5 + 10*x6 + 1*x7;
              if (s == n) & (n > 1)
                printf("%d \n", n);
               end
              end
            end
          end
        end
      end
    end
  end
end
```

Para $p = 2$, no hay ninguna solución (salvo la trivial $1 = 1^2$).

Para $p = 3$, están los cuatro números que figuran anteriormente en (***).

Para $p = 4$, hay tres posibilidades:

$$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$
$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$
$$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$

Para $p = 5$, ocurre algo curioso, y es que hay soluciones de cuatro, cinco y seis dígitos. A saber:

$$4150 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$$
$$4151 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5$$
$$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$$
$$92727 = 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5$$
$$194979 = 1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5$$

Para $p = 6$, hay una única solución y tiene seis dígitos:

$$548834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$$

Para $p = 7$, hay cuatro soluciones, todas de siete dígitos:

$$1741725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$$
$$4210818 = 4^7 + 2^7 + 1^7 + 0^7 + 8^7 + 1^7 + 8^7$$
$$9800817 = 9^7 + 8^7 + 0^7 + 0^7 + 8^7 + 1^7 + 7^7$$
$$9926315 = 9^7 + 9^7 + 2^7 + 6^7 + 3^7 + 1^7 + 5^7$$

Número 4

$$\text{i)}\quad 8.712 = 4 \times 2.178$$
$$\text{ii)}\quad 9.801 = 9 \times 1.089$$

Éstos son los únicos números de cuatro dígitos que son múltiplos exactos de sus "inversos". Es decir, 2.178 es el 'inverso' de 8.712 y 1.089 es el 'inverso' de 9.801.

Número 5

Fíjese el resultado que se obtiene si uno multiplica 111.111.111 por sí mismo:

$$111.111.111 \times 111.111.111 = 12.345.678.987.654.321.$$

¿No es notable?

Número 6

Mire lo que sucede con el número 1.741.725.

Eleve a la séptima cada dígito y sume los resultados. El número que se obtiene es exactamente el número inicial: 1.741.725.

$$1.741.725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$$

Producto de dígitos

Imagine que usted está durmiendo. Alguien lo despierta y le dice: ¿cuál es el resultado de multiplicar los dígitos que aparecen en los primeros *veinte* números naturales? O sea, usted tiene que multiplicar los ***dígitos*** que aparecen en los primeros veinte números naturales:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

Así planteado, si uno quiere *realmente* contestar rápido la pregunta, la tentación es ir a buscar una calculadora o una computadora y multiplicarlos. Por supuesto, uno necesita *querer mucho* a la persona que lo despertó en el medio de la noche para semejante pavada.

Sin embargo, créame, no hace falta. ¿Quiere pensar un instante por qué? No lea tan rápido la respuesta, permítase pensar un par de minutos (o menos).

Respuesta

Para comenzar quiero escribir los primeros veinte números naturales, y después, le pido que "mire fijo" a esos números y preste atención a los dígitos que los componen. Acá van:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Éstos son los *números* involucrados. ¿Y los dígitos? ¿Cuáles son los dígitos? Mírelos bien. ¿Le parece que aún necesita una calculadora o computadora?

La respuesta es que no, que no debería hacer falta, porque si uno mira los dígitos que aparecen involucrados, como entre ellos hay un *cero*, entonces, no importa cuáles sean los otros: ¡el producto va a dar cero!

Luego, la respuesta es más sencilla de lo que uno imaginaba, pero esto es algo que sucede *siempre*, cada vez que uno sabe la solución de un problema, ¿no es así?

Lo bueno de estas situaciones es que uno desarrolla ciertas destrezas para prestar atención a los enunciados y dedicarse a pensar por unos minutos. De allí que este resultado, que es obviamente muy sencillo, tenga una implicación con la que espero coincidir con usted: es fácil, muy fácil, siempre y cuando uno haya sorteado la dificultad inicial y haya comprendido bien el problema.

Números que contienen o no el ‘ocho’ entre sus dígitos

Una curiosidad: si yo le preguntara cuántas veces aparece el dígito *ocho* entre los primeros diez números, intuyo que usted encontraría la respuesta en forma sencilla: “hay uno solo”. Es que los primeros diez números son (empezando en el cero):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Por lo tanto, el único número que *contiene* al dígito *ocho* es él mismo.

Ahora, ampliemos la búsqueda. En lugar de buscar los números que contienen al dígito *ocho* entre los primeros diez números, busquemos los que contienen al dígito *ocho* entre los primeros *cien* números.

Como usted advierte, ahora son más. Además del propio *ocho*, están todos los números que ‘terminan’ en ocho (18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88 y 98). Éstos son nueve números. Además, aparecen todos los que ‘empiezan’ en ocho: 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 y 89. Éstos son diez números. Me imagino que usted está un poco preocupada/preocupado por el caso ‘88’, ya que parece como que lo hubiéramos contado dos veces. Y es así: por lo tanto, deberíamos decir que hay 18 números (de dos dígitos) que tienen al número *ocho*. Pero, incluyendo al número ocho cuando aparece solo, tenemos en total 19.

Resumen hasta acá: entre los primeros diez números, hay uno solo que contiene un *ocho*. El 10%. Entre los primeros cien números, hay 19, o sea un 19%.

¿Qué pasará entre los primeros mil? La primera observación es que yo querría (y supongo que usted también) no tener que *escribir* todos los números y después contar cuáles contienen al 'ocho' entre sus dígitos y cuáles no. *Tiene* que haber otra manera de poder decidir sin tener que hacer una lista. ¿Quiere pensar usted en soledad?

Sigo yo. Fíjese en esta idea y vea qué le parece: tomemos juntos un número de tres cifras: *ABC*. Creo que está claro que todos los números que van entre 0 y 999 son de tres dígitos. Es que por ejemplo, si yo quiero escribir el número 37, lo puedo re-escribir así: 037. Por otro lado, el número 7, lo podría re-escribir como 007 (sí, como James Bond).

¿Cómo saber cuántos de los números *ABC* contienen algún número 8? Lo que le propongo es que hagamos algo diferente: contemos *todos* los que *no* contienen al *ocho* como dígito y luego, restemos ese número de los *mil* que hay en total. De esa forma, vamos a saber cuántos SÍ lo contienen (al número '8').

El primer dígito es A. Hay nueve posibilidades de que no sea un número 8. Puede ser un cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y nueve. O sea, en total *nueve*. Por otro lado, lo mismo sucede con *B*. Es decir hay nueve posibilidades para A y nueve para B. En total entonces, hay $(9 \times 9) = 81$ posibilidades para los dos primeros dígitos.

Lo mismo que hicimos para A y B, ahora lo replicamos para C y uno advierte que C *también* puede ser cualquier dígito *salvo* el número *ocho*. Luego, para C tenemos también nueve posibilidades, y por lo tanto, hay que multiplicar las 81 formas que teníamos para *AB* por las *nueve* que tenemos para C. De esa manera, se tienen en total $81 \times 9 = 729$.

Moraleja: en los primeros mil números (desde 000 hasta 999) hay 729 que *no* contienen al dígito *ocho*. Los restantes 271 = 1.000 - 729 sí lo contienen.

Como usted ve ahora, entre los primeros mil números 271 sí contienen al número ocho entre sus dígitos, por lo que ahora el porcentaje trepó hasta llegar el 27,1% de los números.

Esta tendencia se mantiene. ¿Qué quiero decir con esto? Es que si uno ahora (y le sugiero que lo haga usted por cuenta propia) intenta averiguar cuántos números entre los primeros 10.000 (diez mil) NO contienen al dígito 8, descubrirá que hay

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6.561,$$

lo que significa que los que quedan

$$(10.000 - 6.561) = 3.439$$

SÍ contienen al ocho entre sus dígitos. Es decir, ahora los que *no* contienen al ocho entre sus dígitos son el 65,61%.

Para completar la idea, fíjese en la lista que preparé a continuación:

Entre	#números sin 8	#números con algún 8	% números con 8
1 y 10	9	1	10%
1 y 100	81	19	19%
1 y 1.000	729	271	27,1%
1 y 10.000	6.561	3.439	34,39%
1 y 105	59.049	40.951	40,951%
1 y 106	531.441	468.559	46,8559%
1 y 107	4.782.969	5.217.031	52,1703%
1 y 108	43.046.721	56.953.279	56,9533%
1 y 109	387.420.489	612.759.511	61,258%
1 y 1010	3.486.784.401	6.513.215.599	65,1322%
1 y 1018	150.094.635.296.999.00	849.905.364.703.001.000	84,9905%

¿Qué conclusión puede sacar uno al mirar esta lista y la que aparece en la siguiente página? Fíjese que lo que dice la última línea que escribí es que en el primer *trillón* de números (un *uno* seguido por *dieciocho* ceros) casi el 85% tiene algún *ocho* entre sus dígitos. A medida que uno va a avanzando, se hace cada vez más difícil encontrar un número que no tenga un ocho entre sus dígitos.

Haga la prueba: pídale a alguna persona que le diga un número de 18 cifras y verá que la probabilidad de que alguna de esas cifras sea un *ocho* es casi de un 85/100, o sea de un 85%[78].

---

78. Carlos D'Andrea me sugiere que incluya el siguiente caso: Suponga que usted va a tirar 18 veces un dado, y se pregunta cuál es la probabilidad de que *no* salga —por ejemplo— ningún número *cinco*. Haga la cuenta y verá

Entre	#números sin 8	#números con algún 8	%números sin 8	%números con 8
1 a 10	9	1	90%	10%
1 a 100	81	19	81%	19%
1 a 1.000	729	271	72,9%	27,1%
1 a 10.000	6.561	3.439	65,61%	34,39%
1 a 10^5	59.049	40.951	59,049%	40,951%
1 a 10^6	531.441	468.559	53,1441%	46,8559%
1 a 10^7	4.782.969	5.217.031	47,8297%	52,1703%
1 a 10^8	43.046.721	56.953.279	43,0467%	56,9533%
1 a 10^9	387.420.489	612.579.511	38,7420%	61,2580%
1 a 10^10	3.486.784.401	6.513.215.599	34,8678%	65,1322%
1 a 10^11	31.381.059.609	68.618.940.391	31,3811%	68,6189%
1 a 10^12	282.429.536.481	717.570.463.519	28,2430%	71,7570%
1 a 10^13	2.541.865.828.329	7.458.134.171.671	25,4187%	74,5813%
1 a 10^14	22.876.792.454.961	77.123.207.545.039	22,8768%	77,1232%
1 a 10^15	205.891.132.094.649	794.108.867.905.351	20,5891%	79,4109%
12a 10^16	1.853.020.188.851.840	8.146.979.811.148.160	18,5302%	81,4698%
1 a 10^17	16.677.181.699.666.600	83.322.818.300.333.400	16,6772%	83,3228%
1 a 10^18	150.094.635.296.999.000	849.905.364.703.001.000	15,0095%	84,9905%

---

que es un número muy pequeño (5/6)18 = (aprox) 0,03756... Y si uno siguiera tirando el dado más veces, la probabilidad de que *no salga* un número *cinco* es cada vez más pequeña (tiende a cero).

Por supuesto, yo elegí el número *ocho* pero no hay ninguna razón para que ese dígito sea el dígito *estrella*. De hecho, lo mismo sucede con *todos* los dígitos[79].

79. Esta tabla exhibe con claridad el momento en el que uno supera el 50% de posibilidades de que un cierto dígito *aparezca* o no.

Números que suman 104

El siguiente es un problema precioso y me va a permitir hacerle una suerte de 'desafío'. Sígame por acá.

Suponga que tenemos metidos en una bolsa los siguientes números:

{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ……, 88, 91, 94, 97 y 100}

Fíjese bien cómo los obtuve: empecé por el número *uno*. Le sumé tres unidades. Obtengo el *cuatro*. Le sumo tres unidades. Obtengo el *siete*. Le vuelvo a sumar tres unidades. Obtengo el *diez*. Y así voy sumando tres unidades a cada número que voy obteniendo. Sigo así, hasta llegar al número *100*.

Si quiere, cuéntelos y verá que de esa forma conseguí elegir 34 números.

Ahora bien, acá viene el desafío. Le propongo que usted... sí, usted, elija *veinte* números de la bolsa. Los que usted quiera. Yo le aseguro que entre los veinte que eligió tiene que haber *dos* que sumen exactamente 104.

Es un hecho muy curioso, y por más que uno quiera evitarlo, no se puede. La idea entonces es tratar de encontrar una razón que explique por qué sucede esto. Le toca a usted. Yo lo espero más adelante.

Respuesta

Le propongo un camino para recorrer juntos. El objetivo es tratar de encontrar un argumento que explique por qué, independientemente de la forma en la que uno elija *veinte* de los *treinta y cuatro* números, inexorablemente *dos* de ellos (por lo menos) tendrán que sumar 104. Veamos si es posible *evitar* que eso suceda.

Para empezar, ¿cuántas formas hay de sumar 104 eligiendo dos de los 34 números? ¿Cuántas parejas suman 104? Veamos.

Busquemos esas parejas. Son las siguientes:

(4,100)
(7,97)
(10,94)
(13,91)
(16,88)
(19,85)
(22,82)
(25,79)
(28,76)
(31,73)
(34,70)
(37,67)
(40,64)
(43,61)
(46,58)
(49,55)

Como usted advierte, hay 16 parejas. No se me escapa que si tomara *dos veces* el número 52 (que también figura en la lista de números), esa suma también dará 104, pero ese caso está excluido porque el planteo del problema dice que tiene que haber dos números (distintos) que sumen 104.

Luego, hay 16 parejas que suman 104. Supongamos que uno quisiera seleccionar 20 números entre los 104 de manera tal que *ningún par de números sume 104*. En ese caso, lo que uno debería hacer es evitar elegir los dos integrantes de una pareja. O sea, si elijo uno, *no incluir al otro*. Veamos si esto es posible.

Como hay 16 parejas, yo puedo elegir solamente un miembro de cada una de ellas (y no el otro). Por ejemplo, si elijo el 13, no puedo elegir el 91, o si elijo el 37, no puedo elegir el 67 (¿se entiende por qué? Si yo eligiera el 13 y también el 91, entonces la suma ya da 104 y eso es lo que estoy tratando de evitar).

Luego, eligiendo solamente un miembro de cada pareja, puedo seleccionar 16 números. Me faltan cuatro (para completar los 20). Puedo agregar el número *uno*, porque está en la bolsa, y no figura el 103. Luego, ya tengo 17 números elegidos. Puedo incluso elegir el 52, que también figura en la bolsa, y su potencial 'pareja' es él mismo. Como está explicitado que los dos números tienen que ser distintos, puedo agregar al 52 también. Ya tenemos 18 números.

Pero ahora, ¿qué le parece que va a pasar? Estamos 'perdidos'. Ni bien yo quiera elegir un número más (ni hablar de dos más), como no me quedan ya más parejas de las cuales elegir, tendré que repetir alguna (en realidad dos). En consecuencia, cuando quiera completar los 20 números, inexorablemente me voy a ver forzado a elegir el otro integrante de alguna pareja.

Como usted detecta, esto termina por *demostrar* que, entre los 20 números elegidos, seguro tendrá que haber al menos dos pares que sumen 104. Y con eso, termina la argumentación y prueba lo que queríamos verificar: no es posible elegir 20 números entre esos 34 sin que un par de ellos sume 104. Más aún: incluso eligiendo 19 números el resultado sigue siendo válido[80].

80. Con 18 números ya no tiene por qué suceder, porque uno puede elegir un miembro de cada una de las 16 parejas, y agregar el número *uno* y el número 52, y listo: conseguiría 18 números de los cuales ningún par tiene por qué sumar 104.

La última bolita

Este problema tiene dos partes. Ambas son atractivas y muy ilustrativas. Hay varias formas de abordarlo, pero prefiero contar los enunciados primero y después invitarla/lo a hacer algunas reflexiones.

1) Suponga que se tienen 100 bolitas negras y 50 blancas en una urna. Además, arriba de una mesa hay bolitas negras y blancas a su disposición por si las fuera a necesitar. Ya verá cuándo y por qué. En el momento en que suena un timbre, usted empieza a realizar la siguiente operación: mete la mano en la urna y saca dos bolitas. Si son del mismo color, pone una bolita negra dentro de la urna. Si son de diferente color, repone la blanca. Como usted advierte, en cada paso hay una bolita menos dentro de la urna. Por lo tanto, en algún momento, quedará una única bolita. ¿Será siempre del mismo color? ¿O dependerá de la forma en la que usted fue sacando y reponiendo las bolitas?
2) Si ahora se tienen inicialmente 100 bolitas negras y 49 blancas dentro de la urna, ¿qué puede decir ahora sobre la última bolita? ¿Será siempre del mismo color? ¿O dependerá de la forma en la que usted fue sacando y reponiendo las bolitas?

Como usted ve, el problema es de sencillo enunciado. Todo lo que hay que hacer es ir retirando bolitas de a dos y de acuerdo con los colores, reponer de un color o de otro: negra, si las dos eran del mismo color, y blanca si eran de colores distintos. Por supuesto, en el caso que usted retire dos bolitas blancas, para reponer una negra, usted podría necesitar alguna de las bolitas negras que tenía a su disposición, pero aun así, el proceso terminará porque en cada paso dentro de la urna va quedando una bolita menos.

Ahora, le toca a usted.

Respuesta

Antes de analizar cada caso por separado, quiero que nos pongamos de acuerdo en algunos hechos:

- En cada paso, el número de bolitas decrece en uno. Esto es cierto porque sean las dos bolitas que retire del mismo o distinto color, retiro dos y repongo una.
- En cada paso, el número de bolitas negras *cambia la paridad*. Es decir, si había una cantidad par, pasa a impar, y al revés, si había una cantidad impar, ahora hay una cantidad par. ¿Por qué? Inicialmente, hay 100 bolitas negras. Si usted toma dos bolitas blancas de entrada, como son del mismo color, necesita reponer una negra. Por lo tanto, tiene que usar alguna de las bolitas que había fuera de la urna. Pero lo que importa es que ahora hay 101 bolitas negras. Si en cambio hubiera retirado dos bolitas negras, usted repone una de las negras dentro de la urna. Entonces, ahora quedan 99 negras. Y si usted retiró dos bolitas de diferente

color, usted repone la blanca, con lo cual el número de bolitas blancas no se afecta, y el número de bolitas negras decrece en uno: ahora hay 99. Una vez que usted haya entendido este ejemplo, lo que importa es que el número de bolitas negras baja o sube en uno, y por lo tanto, en cualquier paso del proceso, el número de bolitas negras pasa de par a impar, o al revés. Este hecho es lo que se conoce con el nombre de 'cambiar la paridad'.

- En cada paso del proceso, el número de bolitas blancas *no cambia la paridad*. Es que si uno retiró dos bolitas de diferentes colores, blanca y negra, repone la blanca. Luego, el número de bolitas que había, si era par, sigue siendo par, y si era impar, sigue siendo impar. Y en el caso en que usted haya extraído dos bolitas del mismo color, las deja afuera y repone una negra. O sea, el número de bolitas blancas permanece inalterado (si eran dos negras), o bien se reduce en dos (si eran dos blancas). Moraleja: la paridad de las bolitas blancas no se altera en cada paso.

Si usted entendió estas dos observaciones, ¿estará en condiciones de contestar las dos preguntas? ¿No le dan ganas de pensar el problema en soledad?

Mientras tanto, sigo yo. Avancemos en cada caso por separado.

1) En el primer caso, hay 100 negras y 50 blancas. En cada paso, la paridad de las blancas no cambia, y la de las negras se va alterando paso por paso. En cada paso, el número de bolitas blancas permanece estable, o se reduce en dos. O sea, al principio, o bien se queda en 50, o bien pasa a 48. En el siguiente paso, sucede lo mismo. El número de blancas será: 50, 48 o 46. Y así siguiendo. Como de entrada hay

un número *par* de bolitas blancas, independientemente de cómo vayamos sacando las bolitas de la urna, esa paridad no se altera. Por lo tanto, cuando quede una *última bolita*, esta sola será un número impar (uno). Y la única manera de que haya un número impar de bolitas dentro de la urna, es si son negras. En este caso entonces, la última bolita *tiene que ser negra*.

2) En este caso, el número *inicial* de bolitas blancas es impar. Como en el proceso la *paridad* no cambia, eso significa que cuando quede una sola bolita (que es un número impar) tendrá que ser blanca.

Moraleja: estudiar la *paridad* es determinante. Depende de las condiciones iniciales, la última bolita será negra o blanca. Y es un dato verdaderamente curioso que utilizando el mismo mecanismo, si originalmente hay 150 bolitas (100 y 50), al final tiene que quedar una negra, pero si hay 149 (100 y 49) entonces la última tiene que ser blanca. ¿No es interesante?

El aporte de un programador (Carlos Sarraute)

Cuando Carlos Sarraute vio este problema antes de ver la solución que yo planteaba, me escribió inmediatamente:

"¡Lindo problema! Te cuento cómo lo pensé, con mi pensamiento más de programador, dije '¡ah es un XOR!' Cambiando bolita negra por 0 y bolita blanca por 1, la operación sobre las bolitas es el XOR (el OR exclusivo), que es lo mismo que la suma módulo 2, y es una de las operaciones más básicas de la informática.

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 0”.

Entonces yo le contesté (el 24 de junio de 2013): “*Bueno, me parece muy bien, pero me vas a tener que contar un poco mejor para que lo pueda incluir. Así como lo escribiste es muy ‘críptico’ para el público ‘lego’. Necesito algo un poco más detallado. Si lo podés hacer, creo que no te va a costar demasiado, trato de incluirlo en el libro. Avisame. Un abrazo y gracias*”.

Dos horas después, Carlos me volvió a escribir y ésta es la versión final, y de paso, sirve para que aprenda yo y todos los que están interesados en pensarse como futuros programadores.

“Adrián, aquí va un intento de explicación más detallada. ¡Me doy cuenta de que queda un guiño un poco largo!

Representemos cada bolita negra por un 0, y cada bolita blanca por un 1. La operación que realizamos sobre las bolitas se puede pensar entonces como una operación sobre bits (números que valen 0 o 1), una operación con dos entradas (las bolitas que sacamos de la urna) y una salida (la bolita que ponemos en la urna). Los bits son las unidades más pequeñas de información en una computadora, y se pueden implementar físicamente como algo prendido (1) o apagado (0).

Dados dos bits de entrada, generamos el bit de salida comparando las dos entradas. Si sólo uno de los dos bits vale 1, entonces la salida es 1. Si no, la salida es 0. Esto corresponde exactamente a lo que hacemos en el problema: si sólo una de las bolitas es blanca (1) entonces ponemos una bolita blanca (1), si no, ponemos una negra (0).

Esta operación en informática se llama XOR (del inglés ‘eXclusive OR'). El nombre se debe a que 'a XOR b' vale 1 si a o b vale 1 (pero no los dos). La tabla de valores del XOR es:

0 XOR 0 = 0
0 XOR 1 = 1
1 XOR 0 = 1
1 XOR 1 = 0

Ésta es una de las operaciones básicas de la informática. Tiene muchas propiedades, y las que nos interesan para este problema es que es conmutativa (0 XOR 1 = 1 XOR 0) y asociativa, por ejemplo: (1 XOR 0) XOR 1 = 1 XOR (0 XOR 1) = 0.

Esto quiere decir que dado un conjunto de bits, podemos ir realizando las operaciones XOR en cualquier orden, y obtener siempre el mismo resultado (el XOR de todos los bits). Dicho en términos del problema, podemos sacar las bolitas en cualquier orden, sin que eso afecte el resultado.

¿Y cuál es el XOR de un conjunto de bits? Depende de la cantidad de unos: si es par, el resultado es 0, y si es impar, el resultado es 1. O sea que llegamos por otro camino a la misma solución: depende de la paridad de bolitas blancas (unos)."

Otra moraleja. Como usted puede apreciar mi forma de pensar y la de Carlos difieren. Sin embargo, yo quiero rescatar el valor que tiene su forma de 'acercarse' a un problema. Él piensa cómo puede una computadora ayudarlo a encontrar una solución al problema, y entonces, *escribe él mismo un programa para que esa computadora ejecute y le dé el resultado que busca*. Yo, por el contrario, pienso en términos distintos, no sé si llamarlos más abstractos. La idea de haber incluido estas dos formas de abordar un problema es justamente invitarla/o a usted a que no sólo elija su propio camino, sino que lo elabore con sus propias ideas.

Delicias de la aritmética: ¿Dónde está Wally?

El hombre anda siempre a la búsqueda del *descubrimiento*. El momento de 'ajá', el momento *buscado*. Patrones, repeticiones... ser capaces de poder anticipar que ante 'tal' antecedente se tiene que verificar 'tal' consecuente. Es como llegar a encontrar el 'tesoro', develar el misterio. Puesto en otros términos, *entender*.

Quiero presentar ahora un grupo de números que siguen un patrón, un patrón de belleza. Acompáñeme por acá.

Consiga una calculadora o una computadora cualquiera. Le propongo que haga lo siguiente. Tome el número 1 y divídalo por 17. Deje que corran los decimales. Como usted sabe, los *dígitos* que aparezcan en el desarrollo decimal no pueden *no* seguir un patrón: TIENEN que repetirse, aunque más no sea porque los posibles *restos* de dividir un número por 17, puede tener a lo sumo 17 restos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16.

Una vez que usted haya efectuado la división, descubrirá los siguientes números que vienen después de la coma:

0 588 235 294 117 647

Después de esta tira de 16, los dígitos vuelven a repetirse en el mismo orden. Otra vez

0 588 235 294 117 647

Hasta acá, nada sorprendente. Separe al número 0 que figura adelante. No lo considere. Quédese con los 15 números siguientes. Ahora, vaya multiplicando este número sucesivamente por cada número natural, empezando por el 1, y vaya construyendo una tabla con dos columnas. La primera, contiene la sucesión de números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6,… La segunda, el resultado de multiplicar cada número natural que figura en cada fila, por el número

588.235.294.117.647

Éstos son los resultados:

1	588.235.294.117.647
2	1.176.470.588.235.294
3	1.764.705.882.352.941
4	2.352.941.176.470.588
5	2.941.176.470.588.235
6	3.529.411.764.705.882
7	4.117.647.058.823.529
8	4.705.882.352.941.176
9	5.294.117.647.058.823
10	5.882.352.941.176.470
11	6.470.588.235.294.117
12	7.058.823.529.411.764
13	7.647.058.823.529.411
14	8.235.294.117.647.058
15	8.823.529.411.764.705
16	9.411.764.705.882.352

17	9.999.999.999.999.998
18	10.588.235.294.117.647
19	11.176.470.588.235.294
20	11.764.705.882.352.940... y acá paro.

Le propongo que revise los números que figuran en la segunda columna. Mírelos con atención un rato. Fíjese si es capaz de encontrar algo que le llame la atención. Como puse en el título de esta historia: 'Buscando a Wally'. ¿Quién es Wally acá? ¿Quién *hace* el *papel* de Wally?

Yo voy a escribir algunos apuntes míos, pero créame que no tiene la menor gracia leer lo que yo pienso. Es irrelevante. Es como si nos pusiéramos los dos frente a un cuadro, digamos La Gioconda, y usted, en lugar de mirar el cuadro me mira a mí y me pregunta qué pienso. ¿Para qué fue usted entonces a visitar el museo? Con esa misma idea, con la idea de que no hay *nada* que yo pueda decirle que sea más interesante (ni creíble) de lo que usted piensa, es que le sugiero que investigue en soledad (acá va una pausa del tiempo que usted quiera; yo sigo más adelante).

En primer lugar: ¿No resulta curioso que aparezca el número 9.999.999.999.999.998?

Yo diría que no. Más aún: diría que era *esperable* que sucediera, ¿no? ¿Por qué habría de decir yo que es *esperable*? Es que si usted revisa cuál fue el origen de la tira con la que empezamos nuestros cálculos, descubrirá que empezamos *dividiendo* al número 1 por 17. Los dígitos 588.235.294.117.647 se obtenían como el comienzo del desarrollo decimal de ese cociente. Por lo tanto, si en algún momento yo *multiplico* el número 588.235.294.117.647 por 17, es razonable que obtenga 'casi' 10.000.000.000.000.000. Y escribo 'casi' porque daría *exactamente* 10 mil billones si al dividir al número uno por 17 el desarrollo decimal empezara con los dígitos 0 588 235 294 117 647 y después siguiera con todos *ceros*. Pero como ni 588.235.294.117.647 ni 17 son múltiplos ni de 2 ni de 5, entonces el producto *no puede* dar 10 mil billones, pero sí se acerca muchísimo: 9.999.999.999.999.998.

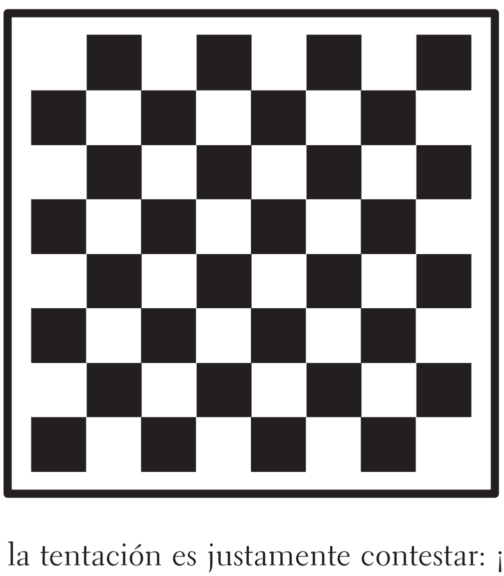
Hasta acá, todo bien. Pero sigamos revisando la tabla entre los dos. Fíjese en el segundo número que aparece:

1.176.470.588.235.290

¿Alcanza a 'descubrir' el número inicial en alguna parte? Sí, está *corrido*. El número original *empieza* con 588.235 y sigue. Acá, los dígitos 5, 8, 8, 2, 3, 5... aparecen en el *medio* del número, pero si uno pudiera seguir en forma circular, re-encuentra al principio los dígitos que faltaban. Y si usted continúa en esta tarea *casi* detectivesca, descubre que los dígitos originales se repiten en el mismo orden y van dando vueltas *en círculos*. Y eso sucede en *todas* las filas de la Lista 1. ¿No es bonito esto? Obviamente, no es La Gioconda, pero tampoco uno se tropieza todos los días con ese tipo de belleza... ¿o sí?

¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar usando las líneas de un tablero de ajedrez?

Tome un tablero de ajedrez. Como usted 'reconoce', el tablero es un cuadrado subdividido en 64 casillas. Esas casillas están distribuidas en ocho filas y ocho columnas. La pregunta es: ¿cuántos cuadrados se pueden dibujar usando las líneas que figuran en el tablero?



Yo sé que la tentación es justamente contestar: ¡son 64! Pero no vaya tan rápido.

En realidad, la respuesta '64' sería correcta si la pregunta fuera: ¿cuántos cuadrados de 1×1 se pueden contar en un tablero de ajedrez? Pero como usted ya advirtió, el cuadrado *grande*, el que resulta de considerar *todo* el tablero, el de 8×8, también es un cuadrado. Por lo tanto, lo que uno debería hacer (y le estoy sugiriendo que lo haga) es contar cuántos hay.

Veamos. ¿De qué tamaños pueden dibujarse cuadrados que estén 'inscriptos' dentro del tablero? Pueden ser cuadrados de (1×1), de (2×2), de (3×3), de (4×4), de (5×5), de (6×6), de (7×7) y de (8×8).

Ahora bien: ¿cuántos hay de cada uno? La respuesta al problema la vamos a tener al final, una vez que hayamos contado qué número de esos cuadrados hay dependiendo del tamaño. Usted advierte que hay 64 cuadrados de (1×1), pero hay *un solo cuadrado* de (8×8), que es justamente *todo* el tablero.

Sin embargo, mi invitación tiene un 'agregado': si le parece que se empieza a complicar, analice casos más pequeños, con menos cuadrados por fila y columna, o sea, con tableros más pequeños y fíjese si al resolver ese problema se le ocurren maneras de abordar el caso más general.

Cuando uno trata de contar los cuadrados de 2×2, descubre que se 'enciman', que se 'superponen'. ¿Cómo hacer para contarlos todos?

Obviamente, hay muchas maneras de poder contar cuántos cuadrados de 2×2 hay, y no importa cuán buena (o mala) sea *mi* forma, será siempre *una* forma posible, y no hay ninguna razón para suponer que será mejor que la que se le ocurra a usted. Pero la expongo acá para su consideración.

Como quiero encontrar una forma *sistemática* de contar los cuadrados de 2×2, podría preguntar: ¿cuántos de ellos pueden *tocar* el borde superior del cuadrado? (Piénselo usted también para que avancemos juntos.)

Como se imagina, hay *siete* cuadrados de 2×2 que tocan el borde superior. Ahora sigo: ¿cuántos tocan la siguiente línea? Con la misma idea, uno descubre que va a haber *siete* también. Pero debemos tener cuidado, porque cuando digo que *tocan* la línea, estoy diciendo (aunque no lo haya explicitado) que el borde superior del cuadrado de 2×2 *toca* el borde superior del tablero, o toca la segunda línea. De esa forma, evito contar *dos (o más) veces*, el mismo cuadrado.

Con estos datos, uno advierte que *tocando* cada línea, hay siete cuadrados de (2×2). Ahora analicemos lo siguiente: en el tablero, contando la línea superior y la inferior, hay en total *nueve* líneas. Si uno quiere calcular cuántos cuadrados de 2×2 tienen su borde superior tocando cada línea, tiene que excluir las dos últimas (la octava y la novena). Es que desde la octava y la novena es imposible tener cuadrados de 2×2. Luego, como hay en total 7 cuadrados por línea, y hay 7 líneas, el resultado es que hay $7 \times 7 = 49$ cuadrados de 2×2.

Pregunta: ¿será cierto que como hay $8 \times 8 = 64$ cuadrados de 1×1, y hay $7 \times 7 = 49$ cuadrados de 2×2, entonces debe haber $6 \times 6 = 36$ cuadrados de 3×3? ¿Se podrá deducir algún patrón? ¿Qué piensa usted?

Con la misma idea que calculamos los de 2×2, ahora podríamos empezar preguntando ¿cuántos cuadrados de 3×3 tocan la línea superior? Y concluir, como antes, que hay seis posibles cuadrados de 3×3. Por otro lado, como ahora hay que excluir (de las *nueve* líneas horizontales que tiene el tablero) las tres últimas, nos quedan seis líneas.

Moraleja: *seis* cuadrados por *seis* líneas permiten deducir que hay $6 \times 6 = 36$ cuadrados de 3×3.

Resumen hasta el momento:

$8 \times 8 = 64$ de 1×1
$7 \times 7 = 49$ de 2×2
$6 \times 6 = 36$ de 3×3
……

si uno sigue (y la/lo invito a que lo haga), descubre que hay en total:

$5 \times 5 = 25$ de 4×4
$4 \times 4 = 16$ de 5×5
$3 \times 3 = 9$ de 6×6
$2 \times 2 = 4$ de 7×7
$1 \times 1 = 1$ de 8×8[81]

Y esto completa el resultado. Ahora estamos en condiciones de afirmar que hay $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$ cuadrados EN TOTAL que se pueden dibujar en un tablero de ajedrez de 8×8.

Con todo, no querría terminar sin escribir una pregunta (y sugerirle que piense/pensemos juntos una respuesta): si en lugar de ser un tablero de ajedrez el que estamos analizando, tuviéramos un cuadrado cualquiera de $N \times N$ cuadraditos de 1×1, ¿cuántos cuadrados será posible considerar en total?

Una vez más, con la misma idea que resolvimos el caso del tablero de ajedrez, ahora podemos afirmar (confiados) que el número *total* de cuadrados que se pueden dibujar en un tablero de $N \times N$ es:

$$(N \times N) + ((N - 1) \times (N - 1)) + ((N - 2) \times (N - 2)) + \ldots + \\ (4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) \qquad (*)$$

81. Vale la pena observar que hay 8^2 cuadrados de 1×1, 7^2 de 2×2, 6^2 de 3×3, 5^2 de 4×4, 4^2 de 5×5, 3^2 de 6×6, 2^2 de 7×7 y 1^2 de 8×8.

Para terminar: mire la fórmula que acabo de escribir. Si yo le hubiera dicho al principio de este problema que la *fórmula* para calcular todos los posibles cuadrados que se pueden dibujar en un cuadrado de lado *N* es la que resulta de hacer la cuenta que aparece en (*), usted me habría dicho —casi seguramente— que a *nunca* se le podría ocurrir. ¿Piensa lo mismo ahora?[82]

82. Si le interesa seguir pensando en la dirección de este problema, acá van algunas preguntas más: a) ¿Cuántos cuadrados hay dentro de un rectángulo de N × M?; b) ¿Cuántos rectángulos puede encontrar en un cuadrado de N × N?; c) ¿Y cuántos rectángulos puede encontrar (en el caso más general) dentro de un rectángulo de N × M?

Ilusión óptica

Fíjese en esta figura:

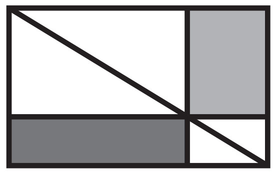
Trate de decidir: ¿Cuál de los dos rectángulos coloreados tiene mayor área? ¿O es que son iguales?

La percepción que uno tiene al mirar el rectángulo grande no permite decidir en forma inmediata cuál de los dos es más grande, incluso cuando uno tiene que comparar dibujos tan sencillos como son dos rectángulos. Con un cuadrado creo que sería diferente, pero con un rectángulo donde los dos lados son de distinto tamaño, ya la respuesta no parece tan simple.

Si puede evitarlo, no lea la respuesta. No hacen falta más datos que los que usted visualiza. Trate de buscar algunas referencias que le permitan 'intuir' o 'decidir' cuál es el de mayor superficie.

Ahora sí, escribo una forma de determinar cuál de los dos es más grande.

Fíjese qué sucede si traza una de las diagonales del rectángulo (la que va del extremo superior izquierdo hasta el extremo inferior derecho). Esta diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales.



Ahora concentre su atención en los dos rectángulos que no están coloreados (o que son de color blanco). ¿Qué ve? Esa misma diagonal termina dividiendo por la mitad cada uno de esos dos rectángulos. Luego, las áreas de los dos rectángulos en cuestión ¡tienen que ser iguales!

A primera vista, sin un razonamiento del estilo del que acabamos de hacer, es muy difícil de descubrir. Una vez que uno traza la diagonal y advierte lo que sucede, lo que no puede comprender después es cómo no lo había advertido antes.

Chiste matemático

El 13 de junio del año 2012, mientras leía algunos de los comentarios y observaciones que me hacía Carlos D'Andrea sobre el libro *Matemática para todos*, apareció intercalado un *chiste matemático*, y como me pareció muy interesante, quise compartirlo con usted. Acá va.

Un grupo de *infinitas personas* entran en un bar. Uno pide *media* jarra de cerveza. El segundo pide ¼ de jarra. El que sigue pide "*la mitad de lo que pidió el anterior*", y así siguiendo: cada uno pide una cantidad que sea exactamente igual a la mitad de lo que pidió previamente.

El barman les dice: "No sean tontos"… y les da una jarra entera.

Nota de *este* autor: ¿dónde está el chiste?

Es que si uno suma las cantidades de cerveza que fue pidiendo cada uno, debería sumar:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

y la suma de esta serie (geométrica, de razón ½) es justamente... *¡uno!* Por eso el barman les entrega exactamente una jarra que contiene la cantidad que le fueron pidiendo todos sus clientes.

Una explicación con un poco más de detalle: Suponga que usted está ubicado exactamente a un metro de distancia de otra persona, y se propone empezar un camino hacia él (que está quieto en una posición). Usted va a dar sucesivos pasos pero con la siguiente particularidad: cada paso que dé, será de una medida igual a la *mitad* de la distancia que lo separa de él.

Por ejemplo, como al comienzo su compañero está a un metro de distancia, el primer paso será de ½ metro (que es la mitad de un metro). Luego, el siguiente paso será de ¼ (o sea de 25 centímetros), ya que su compañero estará ya a medio metro de distancia y la mitad de ½ es ¼. El próximo paso será de 1/8 de metro (12,5 cm), el siguiente de 1/16 (6,25 cm), luego 1/32 (3,125 cm), y así siguiendo....

Evidentemente, usted *nunca* llegará hasta su amigo, porque siempre *le faltará* 'algo' para llegar (la distancia de su último paso). Pero como usted advierte, cada paso que va dando se acerca cada vez más y si pudiera caminar *indefinidamente* entonces sí, *en el límite*, llegaría hasta él.

Con esta idea es que uno puede entender el *chiste matemático*. Si uno pudiera ir sumando jarras de manera tal que cada una contenga un volumen igual a la mitad de la anterior, obtendría esta suma: ½ + ¼ + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + ... En el *infinito* completaría exactamente *uno*. Y es por eso que el barman les entrega una jarra completa.

Una mesa circular y las sumas que no podían evitar[83]

Imagine que hay diez personas que se sientan alrededor de una mesa circular. Cada uno de ellos lleva un número distinto que lo identifica, desde el *uno* hasta el *diez*. Tengo algunas propuestas para hacerle. Las voy a ir formulando de a una y las quiero ir pensando junto con usted.

Propuesta uno

Fíjese si los puede distribuir de manera tal que si usted elige tres números consecutivos cualquiera y los suma, siempre obtenga un número menor o igual que 16. Es decir, trate de encontrar una distribución de las diez personas de manera tal que, si uno suma los números de tres personas consecutivas cualesquiera, en ningún caso llegue a 17. ¿Se podrá?

La respuesta aparece más adelante, por lo tanto, si me permite la sugerencia, no siga leyendo hasta no haber pensado la solución.

---

83. El crédito de este problema es *todo* para mi querido Juan Sabia. Él fue quien me lo propuso y es él quien me hizo ver cuán interesante sería plantear los diferentes tipos de soluciones.

Solución

La/lo invito a que haga una distribución *cualquiera* de las diez personas, la que usted quiera. Yo voy a hacer lo mismo y la voy a exhibir acá, pero usted haga *su* distribución y después comparamos.

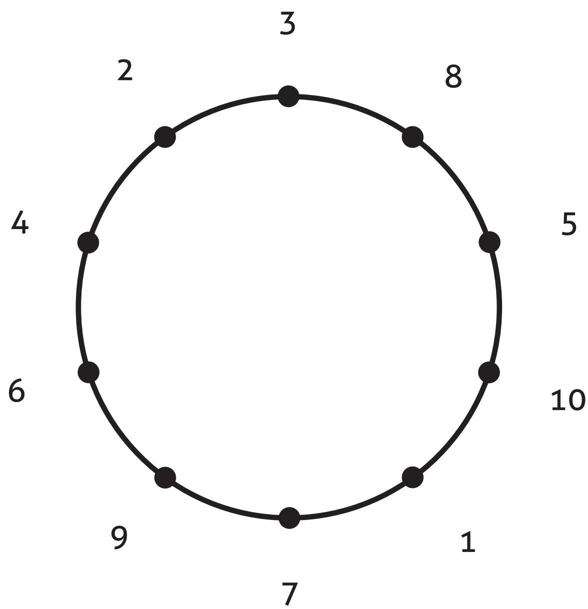


Fig. 1

Sígame ahora con este razonamiento: vaya tomando grupos de tres consecutivos. En la distribución que yo elegí (pero le insisto que usted lo corrobore con la que eligió usted), las ternas serán:

(2,3,8) (3,8,5) (8,5,10), (5,10,1) (10,1,7) (1,7,9) (7,9,6) (9,6,4) (6,4,2) (4,2,3) y a partir de acá, no queda más remedio que *repetir* la que aparece al principio, (2,3,8).

Posibles ternas

Estas diez ternas fueron las que se generaron con la distribución que *yo hice*, pero seguro que usted, en su papel, tiene *otras* diez ternas. Sería una casualidad muy grande que hubiéramos elegido la misma distribución de las *diez* personas. Entre paréntesis: ¿cuántas distribuciones posibles hay de diez personas en una mesa circular en donde solo interesa la posición relativa de las personas? (Respuesta: 9! = 362.880)

Bien, ahora que tenemos las diez ternas, sumemos los tres números de cada terna. Yo sumo los míos, usted sume los suyos. En mi caso, las sumas son:

$$
\begin{aligned}
(2 + 3 + 8) &= 13 \\
(3 + 8 + 5) &= 16 \\
(8 + 5 + 10) &= 23 \\
(5 + 10 + 1) &= 16 \\
(10 + 1 + 7) &= 18 \\
(1 + 7 + 9) &= 17 \\
(7 + 9 + 6) &= 22 \\
(9 + 6 + 4) &= 19 \\
(6 + 4 + 2) &= 12 \\
(4 + 2 + 3) &= 9
\end{aligned}
$$

Por supuesto, a usted le habrán quedado otros diez números. Yo voy a sumar los diez números que me quedaron a mí. Le pido que haga lo mismo, pero ya le anticipo lo que le va a dar: 165. Fíjese. Por favor, vaya y haga la cuenta.

En mi caso, tengo que sumar: 13 + 16 + 23 + 16 + 18 + 17 + 22 + 19 + 12 + 9 = 165.

O sea, el resultado que obtengo yo y el que obtuvo usted es el mismo, *independientemente de cuál haya sido la distribución original de los números.*

¿Por qué sucede esto? Esto sucede porque... ¿no quiere pensarlo usted por un instante? ¿Por qué habría de pasar que independientemente de la distribución que hagamos de los diez números, cuando sumamos 'las sumas' de las diez ternas que quedan formadas, el resultado *siempre* parece dar 165?

Piense conmigo: ¿cuántas veces aparece cada número en cada terna? No importa la distribución que hagamos, cada número aparece como miembro de una terna en *tres* oportunidades. Ni más, pero tampoco menos. Por lo tanto, cuando sumo las ternas primero, y después hago la suma de estos diez números, estoy sumando cada número tres veces.

Es decir, la *suma* de todos estos números se puede obtener *multiplicando por tres* la suma de los números que aparecen, que son del *uno* al *diez*.

O sea, la suma siempre da:

$$3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 3 \times 55 = 165.$$

Hemos dado un gran paso. Ya sabemos que cualquiera sea la distribución que hagamos de los números, si los agrupamos en ternas consecutivas y los vamos sumando, la suma de los diez números es *siempre* 165.

Ahora bien, tengo otra pregunta para usted: si usted tiene diez números cuya suma resulta ser 165, ¿pueden ser *todos* menores que 17?

La respuesta es que *no*. Si *todos* fueran menores que 17, tendrían que ser *todos* menores o iguales que 16. O sea que la *suma* de esos diez números *no podría ser más grande que ¡160!*

Luego, no queda más alternativa que ¡al menos *uno* de los diez números sea mayor o igual que 17! Si no, no se puede llegar a 165. Y esto es exactamente lo que yo quería que comprobáramos juntos: inexorablemente, alguna de las ternas de números consecutivos *tiene que sumar 17 (o incluso más)*. Por lo tanto, ¡no es posible hacer una distribución de las 10 personas de manera tal que *todas* las ternas de números consecutivos sumen *menos o igual* que 16. Alguna de las ternas *tiene que sumar 17 o más*.

Antes de pasar al caso siguiente, ¿no es interesante esta forma de comprobar que *tiene* que haber alguna suma que de al menos 17? Justamente, la matemática no sirve solamente para hacer las sumas, sino que provee una herramienta para pensar el problema de forma diferente. No se pretende entonces que una persona haga *todas* las distribuciones posibles de los diez números (que como vimos más arriba son 362.880), sino que uno busca una forma *alternativa*, elaborando una *estrategia* que *evita* tener que hacer todas las cuentas.

Por supuesto, hay otras formas de comprobar este hecho. Me interesa elaborar a continuación una demostración mucho más *gráfica*.

Mire el dibujo de esta mesa circular que aparece en la figura 2:

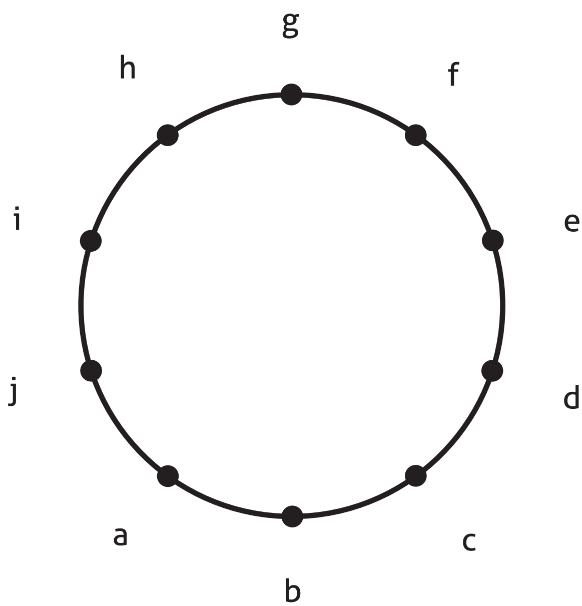


Fig. 2

Por otro lado, voy a presentar una cuadrícula que aparece en la figura 3.

h	i	j	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c
	★	★	10	★	★										
	★	★	10	★	★	9	★	★							
	★	★	10	★	★	9	★	★	8						
	★	★	10	★	★	9	★	★	8	7					

Fig. 3

Dicho esto, quiero que me ayude a elaborar una estrategia tratando de ver si podemos distribuir los diez números del *uno* al *diez* en la cuadrícula, tratando de *evitar* que haya tres números consecutivos que sumen 17, y en todo caso, convencernos de que eso *no va a ser posible*, como ya vimos anteriormente.

Empiezo. En alguna parte tiene que estar el número 10. Como usted advierte, es irrelevante dónde. Lo voy a poner debajo de la letra *a*.

¿Dónde poner el número *nueve?* Como estoy tratando de que no haya tres números consecutivos que sumen 17, entonces voy a *tapar* las dos sillas que figuran tanto a la derecha como las dos que figuran a la izquierda de la *a*, de manera tal que allí no aparezcan ni el *nueve*, ni el *ocho*, ni el *siete*, ni el *seis*.

Luego, voy a poner una 'x' para indicar que esas sillas no se pueden ocupar, debajo de las letras: 'i', 'j', 'b' y 'c'.

Como en alguna parte tengo que poner al número *nueve*, voy a elegir ponerlo debajo de la letra *d*.

Una vez que el número *nueve* figura debajo de la *d*, entonces las letras *e* y *f quedan bloqueadas para el número* **ocho** *y también para el número* **siete**. No hace falta hacer consideraciones sobre las letras *b* y *c* porque ésas ya estaban bloqueadas por la presencia del número *diez*.

Ahora tengo que colocar al *ocho*. Lo voy a poner debajo de la letra *g*. Si usted está siguiendo paso por paso este procedimiento y guiándose por la figura 3, entonces advierte que voy a tener que poner el *siete* debajo de la letra *h*. No lo puedo poner en la letra *f* porque la suma de la terna (d, e, f) ya daría 16, y como algún número tendrá que ir debajo de la letra *e* entonces esa terna ya sumaría 17 o más. Y tampoco puedo poner el *siete* en la letra *i* porque entonces la terna (i, j, a) sería (7, j, 10) y esta terna ya suma 17 así como está.

Luego, el *siete* queda debajo de la *h*. Y acá es donde ya no hay posibilidades de avanzar. ¿Por qué? Es que al haber quedado *el número ocho* debajo de la letra *g*, y el número *siete* debajo de la letra *h*, entonces o bien la terna (g, h, i) = (8, 7, i) o bien la terna (f, g, h) = (f, 8, 7) tienen que sumar 17 o más. Es que si uso al número *uno* para ponerlo en la letra *i*, entonces la suma de los números que figuran en la terna (8, 7, 1) resulta ser 16, pero si ya usé el *número uno* en la letra *i*, no lo puedo usar como letra *f*. Allí tendrá que ir ubicado (como número más pequeño) el número *dos*. O sea, tendríamos la terna (f, 8, 7) = (2, 8, 7) y la suma ya da 17.

i	j	a	b	c	d	e
		10				
★	★	10	★	★		
★	★	10	★	★	9	★
★	★	10	★	★	9	★
★	★	10	★	★	9	★

Moraleja: si bien ya lo sabíamos por la demostración que había hecho antes, no es posible distribuir los diez números en una mesa circular sin que haya *por lo menos* una terna cuyos elementos sumen 17 (o más).

La pregunta que surge naturalmente ahora es... (¿no le dan ganas de pensar a usted cuál podría ser la *tal* pregunta?).

Sigo yo: ya sabemos que en toda distribución de los diez números *tiene* que haber al menos una terna de números consecutivos cuya suma sea POR LO MENOS 17. Pero, ¿se podrá encontrar una distribución donde todas las ternas de números consecutivos sume *como máximo* 17? ¿O deberá haber alguna de esas ternas que tiene que sumar 18 o más?

Propuesta 2

Intente ver si ahora se puede hacer tal distribución. O sea, fíjese si le es posible ubicar los diez primeros números naturales en una mesa circular *sin que ninguna terna de números consecutivos* sume 18 (o más).

Solución

Intentemos juntos lo siguiente: distribuyamos los diez números de cualquier forma. Usted disponga los números de alguna manera y yo voy a hacer lo mismo. En algún lugar tiene que haberle quedado el número *uno*. Como se ve en la figura 4, el número *uno* en mi caso quedó 'encerrado' entre el *ocho* y el *cuatro*.

Exclúyalo de la cuenta que le voy a proponer ahora. Es decir, supongamos que el *uno* no está en la lista. Quedan los restantes *nueve números*. Tómelos en grupos de a tres consecutivos (saltéese el lugar en donde figura el número *uno*). En el caso de la figura 4, los números serían

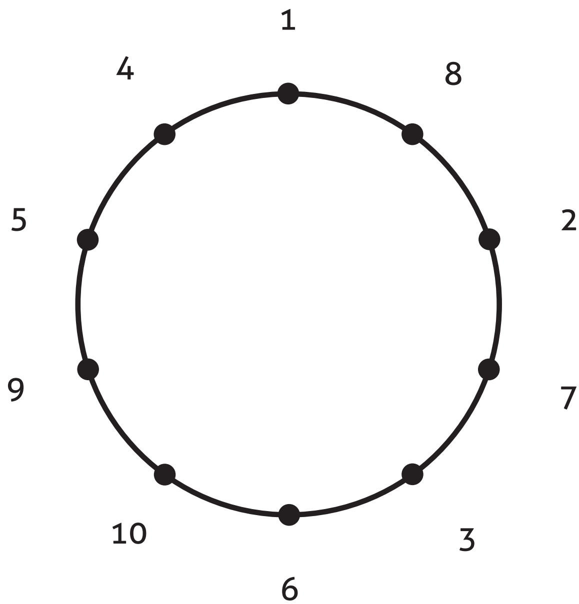


Fig. 4

Al excluir el número *uno*, quedan las siguientes ternas: (4, 5, 9), (10, 6, 3) y (7, 2, 8). Si sumamos los *nueve* números que quedaron (4 + 5 + 9 + 10 + 6 + 3 + 7 + 2 + 8) = 54. Es que la suma de los primeros diez números naturales es igual a 55. Como hemos excluido el *uno*, quedan 54.

Luego, si las *tres* sumas de las *tres* ternas fueran estrictamente menores que 18 (o sea, si lo máximo a lo que pudieran llegar es 17), entonces como 17 × 3 = 51, no tendrían forma de llegar a 54. Entonces, *al menos una de ellas* tiene que ser 18. Y eso es suficiente para probar lo siguiente: es *imposible* distribuir los diez números sin que al menos *una terna de números consecutivos* sume 18 (o más).

Ya sé, ahora falta una *nueva* pregunta. Creo que es una pregunta natural: si hasta acá nos convencimos, usted y yo, de que al distribuir los diez primeros números naturales en un círculo, *forzosamente* tiene que haber alguna terna de números consecutivos que sume *por lo menos 18*, ¿será verdad que también debe haber alguna que sume *por lo menos 19*?

Ahora debería dejar que usted piense en soledad. Pero como yo no sé cuánto tiempo le va a dedicar, o si se lo va a dedicar en este momento, necesito poner la respuesta. Y acá va.

Fíjese en esta distribución en círculo:

1, 10, 6, 2, 5, 9, 4, 3, 8, 7, 1, 10, 6, 2, 5, 9, 4, 3, 8, 7, 1, 10... (*)

Haga las cuentas (si tiene ganas) y confirme que con esta distribución, *ninguna terna de números consecutivos suma 19.*

Resumen: si uno distribuye los primeros diez números naturales alrededor de una mesa circular, entonces:

Pregunta 1: ¿existe alguna distribución posible de manera tal que toda suma de una terna de números consecutivos sea *estrictamente menor* que 17?

Respuesta 1: No, no es posible.

Pregunta 2: ¿existe alguna distribución posible de manera tal que toda suma de una terna de números consecutivos sea *estrictamente menor* que 18?

Respuesta 2: No, no es posible.

Pregunta 3: ¿existe alguna distribución posible de manera tal que toda suma de una terna de números consecutivos sea *estrictamente menor* que 19?

Respuesta 3: Sí, es posible, como lo muestra el ejemplo que figura en (*).

Y eso termina por contestar *todas* las preguntas que me/nos habíamos formulado.

6. MATEMÁGICA

Un niño que nació un día martes[84]

Gary Foshee es uno de los más activos generadores de contenidos de matemática recreativa en el mundo. El 4 de junio del año 2010, en una conferencia que se hace cada dos años en Atlanta, Georgia, Estados Unidos, en recuerdo del mítico Martin Gardner, Foshee subió al escenario y propuso pensar el siguiente problema:

Yo tengo dos hijos. Uno de ellos es un varón. Nació un día martes. ¿Cuál es la probabilidad de que yo tenga dos varones?

Me haría falta *un libro entero* para escribir el *huracán* de discusiones que trajo aparejado el análisis de esta pregunta. Faltó que volaran las sillas del teatro, pero ciertamente dentro del mundo de la matemática las disputas todavía continúan.

Hablando de controversias, antes de analizar qué respuesta tiene el problema, quiero plantear otro, supuestamente más sencillo y después vuelvo con el anterior.

Alicia tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un varón. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia tenga dos varones?

La solución de éste también genera polémicas, pero por su-

84. A los efectos de lo que plantearé en el problema que sigue, voy a suponer que una madre embarazada tiene la misma probabilidad de tener un varón que una mujer. Sin embargo, existe sobre esto una discusión (que obviamente me excede): algunos sostienen que hay evidencias biológicas que muestran que nacen más mujeres que hombres.

puesto, para que usted pueda *involucrarse* en la discusión necesita poner algo propio y que nadie puede hacer por usted: pensar. ¿Qué tiene para perder?

Estoy seguro de que los dos enunciados son comprensibles, por lo que le sugiero que le dedique un rato para elaborar una respuesta. Después sí, discuta conmigo, o con lo que lea, pero al menos búsquese un lugar en la mente para tener una opinión. ¿Qué importancia tendría que no fuera la correcta?

Empecemos con el problema de Alicia. La tentación que uno tiene es decir: "Vea. Si Alicia tiene dos hijos y se sabe que uno de ellos es un varón, y usted me pregunta cuál es la probabilidad de que el otro sea varón, ¿qué espera que le diga? Le contestaría que hay un 50% de posibilidades (más o menos) de que sea un varón, o sea, la probabilidad es ½".

Sin embargo, la respuesta correcta *no es* ½. Ahora verá por qué y me imagino que usted no necesariamente va a estar de acuerdo conmigo. Voy a plantear la pregunta de otra forma.

De todas las familias que tienen un varón y ***otro*** *hijo, ¿qué proporción de esas familias tienen dos varones?*

Ahora le sugiero que pensemos juntos. Una familia con dos hijos, ¿de cuántas maneras posibles pudieron haber tenido los niños? Las combinaciones posibles son (teniendo en cuenta el hijo mayor y el hijo menor): VV, VN, NV y NN[85]. Ésos son los cuatro casos posibles.

Entonces como uno sabe que *uno* de los dos niños es un varón, eso descarta la alternativa NN. Nos quedan entonces tres posibilidades: VV, VN y NV.

De estas tres candidatas, *solamente* ***una*** consiste en dos varones: VV. Es decir, la probabilidad de que sean dos varones es exactamente igual a 1/3.

---

85. V = Varón, N = Nena.

En este punto me quiero detener un instante: créame que me gustaría poder tenerlo como interlocutor para que podamos discutir la solución, pero como eso no es posible me permito intuir que quizás usted esté en desacuerdo con lo que escribí anteriormente. Más aún, creo saber la respuesta a la que arribó usted: ½. Es decir, el razonamiento que *puede* que usted haya hecho fue el siguiente: si una persona tiene dos hijos, y uno de ellos es un varón, el otro niño pudo haber sido un varón o una nena, y en ese caso, la probabilidad de que el otro haya sido otro varón es ½.

Sin embargo, esa línea de razonamiento *no tiene en cuenta el orden en el que nacieron*. Es decir, si yo dijera: "Alicia tiene dos hijos. El mayor es un varón. ¿Cuál es la probabilidad de que el *otro* hijo *también* sea un varón?", entonces *sí*, esa probabilidad **es** ½. Pero en el caso que nos ocupa, eso no lo sabemos. Sabemos que *al menos uno de los dos niños es un varón*. Pero nada más. Lo que *no sabemos* es cuál de los dos hijos es el varón (el mayor o el menor), y de allí es que se planteen las tres posibilidades (VV, VN y NV), y en consecuencia cambia la *probabilidad* de que el otro sea también un varón, y de ½ pasa en realidad a ser 1/3.

Ahora, quiero abordar el otro problema:

Yo tengo dos hijos. Uno de ellos es un varón. Nació un día martes. ¿Cuál es la probabilidad de que yo tenga dos varones?

En principio, uno podría decir: ¿qué puede cambiar el hecho de saber que uno de los dos hijos nació un martes en la probabilidad de que Foshee tenga dos hijos varones? Sin embargo, aunque no lo parezca, *sí cambia*. Y cambia mucho. Vea por qué.

Voy a usar mismo argumento que utilicé antes para deducir que la probabilidad era 1/3 y no ½. Analicemos (juntos) las posibles combinaciones de sexo y de día de la semana en los que pudieron haber nacido los hijos de Foshee.

Si el hijo ***mayor*** es el varón que nació un martes, entonces, hay 14 posibilidades para el hermano. Es que el hermano puede ser otro varón que hubiera nacido en cualquiera de los siete días de la semana o bien pudo haber sido una nena que haya nacido en cualquiera de esos mismos siete días.

Ahora analicemos los otros casos posibles. Supongamos ahora que es el hijo ***menor*** de Foshee el que nació un martes. Entonces, como antes, hay 14 posibles combinaciones para el hermano mayor: siete de que sea un varón nacido cualquier día de la semana, y otros siete de que sea una *nena* nacida cualquiera de los días de la semana.

Sin embargo, como quizás usted advirtió, estoy contando *dos veces* el mismo caso, que es cuando *ambos varones* nacieron un martes: cuando tanto el mayor como el menor sean varones nacidos en martes. O sea, lo conté dos veces, y por lo tanto, en lugar de 14 posibilidades hay 13 casos *posibles* en donde *uno de los dos hijos* es un varón nacido un martes. En total son 27.

Ahora, de estos 27 casos, ¿en cuántos de ellos hay dos varones? Si usted hace la cuenta, encontrará que hay 13: siete en donde el mayor es el nacido el martes y el menor es varón nacido cualquier día de la semana, y otros seis[86], cuando el menor es el que nació el varón que nació el martes y el mayor es un varón que nació cualquier día de la semana.

Moraleja 1: La probabilidad de que los dos sean hijos varones es de 13/27. Y esto es lo sorprendente: esta probabilidad, 13/27 está mucho más cerca de ½ que de 1/3 como en el problema anterior. Aunque parezca antiintuitivo, el hecho de saber que uno de los hijos varones nació un martes, altera *fuertemente* la probabilidad de que el otro sea varón.

---

86. Son seis para no contar dos veces el mismo caso: hijo mayor varón nacido en martes e hijo menor varón también nacido en un día martes.

Moraleja 2: Son muy pocos los problemas conocidos[87] dentro de la matemática recreativa que generen más controversia y discusión que este que propuso Foshee, pero más allá de si los argumentos la/lo convencen o no, lo que seguramente valió la pena fue haber caminado mentalmente por lugares desconocidos. De allí el valor del pensamiento, la posibilidad de recorrer imaginariamente escenarios (o fantasías) alejadas de nuestra vida cotidiana.

Nota 1

Como argumentación para sostener que la probabilidad es 1/3 en el primer caso: 'tomemos 400 parejas de padres que tienen exactamente dos hijos. En promedio (con todo lo que esto significa) habrá 100 que tienen 2 varones, 100 que tienen 2 mujeres y 200 que tienen un varón y una nena; y en este último caso, podemos suponer que 100 tuvieron primero un varón y después una nena y otros 100 tuvieron una nena y después un varón. Si nos quedamos *solamente* con los que tuvieron *al menos* un varón, ahora hay que considerar solamente 300 parejas (las 100 que tienen dos mujeres las eliminamos). Eso sí, de las 300 que quedaron, 200 tienen un varón y una nena, lo que significa que la probabilidad de tener una nena es 2/3 (y por ende, la de tener un varón es de 1/3) como queríamos probar.

Nota 2

Eduardo Jagla, quien trabaja en el Centro Atómico Bariloche, me escribió un mail el 5 de octubre de 2011, haciéndome algu-

87. El problema de Monty Hall es otro, tal como apareció en *Página 12* el 10 de marzo de 2006 (http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-64074-2006-03-10.html).

nas observaciones que creo pertinentes publicar. Espero que a usted le sirvan, como me sirvieron a mí:

Estimado Adrián:

Sin haber leído otras discusiones del "problema del chico del martes", quería hacerte un comentario, aunque tal vez te resulte obvio. Buena parte del problema es saber qué es exactamente lo que la persona afirma.

1er. caso: si de una cierta población (infinita) y con probabilidades unbiased[88], tomo a todas las personas con dos hijos, uno (al menos) de los cuales es un varón que nació un martes, tu análisis es intachable.

2do. caso: si de esa misma población tomo al azar una persona con dos hijos, uno (al menos) de los cuales es un varón, y le pregunto qué día nació ese varón, la respuesta a la pregunta sobre si el otro es varón es 1/3, porque evidentemente la información adicional que me da no me sirve para nada.

3er. caso: alternativa al caso 2: si pregunto a una persona si tiene dos hijos, con uno de ellos varón nacido en martes, y me dice que sí, para esa persona vuelvo al 13/27.

4to. caso: si viene una persona, y de sopetón me dice que tiene dos hijos, y uno es un varón que nació un martes, es casi imposible dar una respuesta porque, como decía, no sabés a qué pregunta está respondiendo ni qué intenciones tiene :-)

Saludos,

Eduardo Jagla
Centro Atómico Bariloche

88. 'Unbiased' quiere decir 'no tendenciosas', 'imparciales', 'objetivas'.

¿Dónde ubicar la palabra 'suprema'?

El problema siguiente es bonito porque exhibe nuestra capacidad para 'ordenar' objetos. ¿A qué me refiero? Por ejemplo, si uno entra en una librería o en una biblioteca, y necesita buscar un libro en particular en algún estante, lo más común es que los libros aparezcan ordenados en forma alfabética. Es obvio que eso facilita la búsqueda. Sería virtualmente imposible de otra manera.

Lo mismo cuando uno busca una palabra en un diccionario. Es decir, hay momentos de nuestra vida cotidiana en donde el 'orden' en el que están dispuestas las cosas facilita una búsqueda. De tan común, nos resulta *transparente*, o intangible, pero 'está ahí'.

Ahora acompáñeme por aquí. Voy a elegir una palabra cualquiera del diccionario y le voy a proponer un 'juego'. Selecciono la palabra 'SUPREMA'. Supongamos que uno quisiera ordenar *todas* las letras de esa palabra por el lugar en el que aparecen en el alfabeto. Esto sería así: A - E - M - P - R - S y U. Es decir, si uno va recorriendo el alfabeto, las letras que integran la palabra *suprema* aparecen en ese orden.

Supongamos ahora que vamos a hacer una *lista* con todas las posibles *palabras* (aunque no tengan significado) que usen esas siete letras y las vamos escribiendo en forma 'creciente', respetando el orden alfabético. Es obvio que la mayoría de las palabras que formemos no van a tener sentido. De hecho, la primera palabra, AEMPRSU, no significa nada. Pero confeccionemos la lista como si *todas* estuvieran en el diccionario, y las vamos anotando por orden aparición. La lista empezaría así:

AEMPRSU
AEMPRUS
AEMPSRU
AEMPSUR
AEMPURS
AEMPUSR... y así siguiendo. ¿Se entiende? ¿Por qué no piensa cuál sería la *próxima* palabra? Dedíquele un instante y fíjese cuál tendría que ser.

La escribo yo acá (en letras minúsculas): aemrpsu.

Como usted advierte, esta lista tiene muchas palabras. La pregunta es: ¿en qué lugar aparece la palabra 'suprema'?

Ahora la/lo dejo a usted con usted mismo.

Respuesta

Naturalmente, uno podría escribir toda la lista, contar las que preceden a la palabra en cuestión ('suprema') y fijarse en qué lugar aparece. Es una posibilidad y no estaría mal implementarla como recurso. Sin embargo, uno tiene la tentación de imaginar alguna *otra* estrategia, alguna otra forma que no requiera de tener que hacer un listado exhaustivo de todas las palabras posibles. Se trata de *contar* y no de escribir todas.

Antes de avanzar, quiero ponerme de acuerdo con usted en algunos puntos. Primero: ¿sabemos cuántas 'palabras' hay en la lista? No es un tema menor saberlo, porque si fueran (por ejemplo) diez palabras, sería muy fácil decidir en qué ubicación figura la palabra 'suprema'.

¿Cómo se cuentan? Fíjese que uno tiene *siete* lugares en donde puede ubicar cada una de las siete letras. Empecemos por el primero. Allí podemos ubicar cualquiera de las siete. Una vez fijada la primera letra, quedan seis posibilidades para la segunda. Es decir, por cada elección de la primera, quedan seis para la segunda, lo que hace un total de $(7 \times 6) = 42$ para los dos primeros lugares. Luego, siguiendo con la misma idea, para cada una de estas 42 posibles combinaciones de dos letras iniciales, quedan cinco letras para la tercera ubicación. En consecuencia hay $(7 \times 6 \times 5) = 210$ posibles ternas para los primeros tres lugares. De la misma forma, hay $(7 \times 6 \times 5 \times 4) = 840$ para las primeras cuatro, $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3) = 2.520$ para las primeras cinco, $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) = 5.040$ para las primeras seis, y para el último lugar no hay nada que elegir porque queda una sola letra sin utilizar.

Moraleja: hay 5.040 palabras en la lista. ¿Cómo hacer ahora para saber el lugar que ocupa la palabra 'SUPREMA'?

Le propongo lo siguiente: en lugar de *contar* cuántas palabras hay *antes* que SUPREMA, tratemos de contar juntos cuántas hay *después*. Si sabemos cuántas hay después, *restamos este número* del total (5.040) y sabremos en qué lugar está ubicada. ¿Cómo contar cuántas vienen *después*?

Fíjese ahora en la palabra SUPREMA con un poco de detenimiento. ¿Puede usted escribir *algunas* de las que vienen después en la lista? De hecho, *todas* las palabras que empiezan con la letra U *tienen que estar después*. ¿Por qué? Bueno, es que las que empiezan con la letra U son las últimas de la lista, y SUPREMA, está antes porque la letra S está antes que la U en el alfabeto.

Como no hay ninguna otra letra que esté más adelante que

S en el alfabeto, sólo nos queda decidir (además de las que empiezan con U), cuáles son las que empiezan con S, pero están *después* que SUPREMA. Para empezar, son palabras que tendrán que empezar con 'SU'. Entre éstas, hay que hacer una distinción:

a) las que empiezan con SUPR
b) las que empiezan con SUR.

¿Por qué hago esta diferencia? Porque *todas* las que empiezan con SUR vienen después de SUPREMA, pero aun hay algunas que empiezan con SUPR que también figuran después, como por ejemplo SUPRMAE y SUPRMEA. Si usted se fija, verá que son las *únicas* dos que empiezan con SUPR y que figuran más abajo que SUPREMA.

Ahora, todo lo que falta es *contar*. Tenemos que *contar* dos grupos de palabras:

a) las que empiezan con U,
b) las que empiezan con SUR, y
c) todavía faltan agregar dos más que son SUPRMAE y SUPRMEA.

Caso a):

Las que empiezan con U son todas las palabras que tienen en los últimos seis lugares cualesquiera de las letras: S, P, R, M, E y A. Y en cualquier orden. Luego, usando el mismo método que nos sirvió para calcular cuántas palabras había en total ($7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5.040$), ahora tenemos *seis* letras para distribuir en seis lugares. La cuenta es: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6! = 720$.

Caso b):

Las que empiezan con SUR son las que tienen cualesquiera de las siguientes cuatro letras en los cuatro últimos lugares: R, M, E y A. Para estos lugares entonces hay $4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$ posibilidades.

Caso c):

Son solamente dos palabras.

Recopilando la información de (a), (b) y (c), sumemos los tres números:

$$720 + 24 + 2 = 746$$

¿Es éste el resultado? No, aún no. ¿Por qué? Porque ahora sabemos que hay 746 palabras que aparecen *debajo de* la palabra SUPREMA en la lista. Para calcular el lugar de SUPREMA, lo que hay que hacer es RESTAR el número 746 al total de palabras en la lista (5.040):

$$5.040 - 746 = 4.294$$

Y ése es justamente el lugar que ocupa la palabra SUPREMA en la lista, el número 4.294 sobre 5.040.

Nota

Una manera distinta de modelar este problema es imaginar que uno se olvida de las letras y se fija en los primeros siete números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. ¿Qué pasaría si uno tuviera que escribir en forma *creciente* todos los números que se pueden fabricar usando los primeros siete dígitos?

En total, hay 7! = 5.040 números en la lista (esto ya lo sabíamos de antes). El primero es 1234567 y el último es 7654321.

¿Qué número tiene *asociado* la palabra SUPREMA?

A = 1
E = 2
M = 3
P = 4
R = 5
S = 6
U = 7

Por lo tanto, la palabra SUPREMA corresponde al número

6745231

El problema original, entonces, se puede reformular así: "Si uno hiciera una lista creciente usando nada más que los primeros *siete* números naturales (1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7), ¿en qué lugar figura el número 6745231?".

El primero es	1234567
El segundo es	1234576
El tercero es	1234657
El cuarto es	1234675
El quinto es	1234756
El sexto es	1234765
El séptimo es	1235467
El octavo es	1235476
El noveno es	1235647
El décimo es	1235674

... y así, uno podría seguir hasta agotar todas las posibilidades.

Como escribí anteriormente, hay más de cinco mil números en la lista, pero en algún lugar tiene que estar el número 6754231. La pregunta es: ¿en qué lugar está? Y para contestar esa pregunta, pretendo no tener que escribir los 5.040 números en una lista y fijarme, sino encontrar alguna estrategia que me permita ubicarlo.

Puesto de esta forma, y mirando la solución que aparece en el párrafo anterior, se trata de contar cuántos números aparecen en la lista ***después*** del 6745231.

a) Los números que empiezan con el número 7
b) Los números que empiezan con 675
c) Dos números más: 6745312 y 6745321

Mirando caso por caso, se deduce:

a) Los que empiezan con el 7 son 6! = 720
b) Los que empiezan con la terna 675 son 4! = 24
c) Aún faltan sumar los dos números 6745312 y 6745321

Luego, en total son 720 + 24 + 2 = 746.

Restando 5.040 - 746 = 4.294.

En consecuencia (y como ya sabíamos) el número 6745231 ocupa el lugar 4.294 en la lista.

Es decir, que si trasladáramos el problema de las letras a un problema numérico, obtendríamos una respuesta equivalente: el número 6745231 ocupa el lugar 4.294 de la misma forma que la palabra SUPREMA ocupa el número 4.294 en la lista de palabras ordenadas en forma creciente de acuerdo con cómo aparecen en el alfabeto.

Solamente se aceptan ceros y unos

El problema que sigue fue uno de los que publicó el diario *El País* de España, con motivo de su adhesión al centenario de la Real Sociedad Matemática Española. Elegí este problema para unirme a la celebración.

Cualquier interesado en ver la colección completa de los problemas puede consultar la versión digital del diario y pasar muy buenos ratos con la matemática.

El problema dice así: tome usted un número natural (un entero positivo) cualquiera. Ese número tiene que tener un múltiplo —no nulo— formado solamente por números ceros y unos. Por ejemplo, fíjese en la siguiente lista:

$1 = 1 \times 1$
$2 \times 5 = 10$
$3 \times 370 = 1.110$
$4 \times 25= 100$
$5 \times 2 = 10$
$6 \times 185 = 1.110$
…

Lo que afirma quien pensó el problema es que no importa el número natural que usted elija, *siempre* tiene que haber un múltiplo de él cuyos dígitos sean solamente *unos* y *ceros*.

Solución

¿Se acuerda del 'Principio del Palomar'? En realidad, es algo muy sencillo y de sentido común: si usted tiene 20 palomas y 19 nidos, y todas las palomas *tienen* que ir a dormir a algún nido, entonces, *forzosamente*, debe haber algún nido que tenga por lo menos dos palomas. Basta con que haya más palomas que nidos y el resultado vale igual.

En este caso, ¿cómo usarlo? Quiero dividir el análisis en dos partes.

Primera parte

Al dividir un número por 2, ¿cuántos restos pueden quedar? Solamente *dos*: 0 y 1 (que son los números pares e impares respectivamente).

Al dividir un número por 3, ¿cuántos posibles restos pueden quedar? Solamente *tres*: 0, 1 y 2.

Al dividir un número por 4, ¿cuántos posibles restos pueden quedar? Solamente *cuatro*: 0, 1, 2, y 3.

De la misma forma: ¿cuántos posibles restos pueden quedar al dividir un número por 137? La respuesta es: 137. ¿Cuáles son?

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13… 135 y 136. En total, son 137. Y el resultado vale en general. Cualquier número al dividirlo por n tiene exactamente n posibles restos:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots (n - 2) \text{ y } (n - 1).$$

Segunda parte

Ahora quiero invitarla/o a pensar algo conmigo. Elijamos juntos estos números formado solamente por números *uno.*

1
11
111
1.111
11.111
111.111
1.111.111
11.111.111
111.111.111... y así siguiendo.

Tomemos los primeros cuatro: 1, 11, 111 y 1.111. Si los dividimos por 3, como sabemos que solamente puede haber *tres restos posibles* (0, 1 y 2), entonces, usando el Principio del Palomar *forzosamente tiene* que haber al menos *dos* de estos números que tengan el mismo resto. En este caso, el 1 y el 1.111 tienen el mismo resto (igual a 1).

Luego, si *restamos* uno de otro, resulta:

$$1.111 - 1 = 1.110$$

Luego, al tener el mismo resto al dividirlos por 3, cuando los resto, *¡obtenemos un número múltiplo de* 3*!* Es que la diferencia tiene resto *cero* y por lo tanto, resulta un múltiplo de 3.

Pero por otro lado, al *haber restado dos números compuestos cada uno solamente por números 1*, el resultado tiene sólo *unos* y *ceros*. Y de esa forma, hemos encontrado uno de los múltiplos de 3 formado solamente *por unos* y *ceros*.

Si uno quisiera hacer lo mismo para encontrar un múltiplo de 14 que tiene sólo unos y ceros, lo que uno puede hacer es:

a) Construir los primeros 15 números que tienen solamente números *uno* en su desarrollo: 1, 11, 111, 1.111, 11.111, 111.111, 1.111.111, 11.111.111, 111.111.111, 1.111.111.111, 11.111.111.111, 111.111.111.111, 1.111.111.111.111, 11.111.111.111.111 y 111.111.111.111.111. Entre estos 15 números *tiene que haber por lo menos dos* que tengan el mismo resto al dividirlo por 14. (¿No le dan ganas de saber cuáles son?) Un par que cumple es 11 y 11.111.111. Luego, como tienen el mismo resto al dividirlos por 14, cuando los resto, ahora resulta ser un múltiplo de 14. Y justamente 11.111.111 - 11 = 11.111.100 = 14 × 793.650.
b) En general, si uno tiene un número natural *n* cualquiera, y quiere encontrar un múltiplo que solamente tenga *unos* y *ceros* en su desarrollo decimal, lo que puede hacer es *escribir en una lista* los primeros (n + 1) números naturales que tengan *sólo números 'unos'* como dígitos. La lista empezaría así: 1, 11, 111, 1.111, 11.111, 111.111, etc., hasta completar (n + 1) números. Justamente, entre estos (n + 1) números, debe haber *al menos dos* que tengan el mismo *resto* al dividirlos por *n* (ya que al dividir cualquier número natural por *n* sólo hay *n* posibles restos). Como se tienen (n + 1) números, *no puede haber (n + 1) restos distintos. Al menos dos* de ellos tendrán que repetir el resto. Una vez que uno detecta dos números con el mismo resto, calcula la diferencia del más

grande menos el más chico. El resultado será ahora un múltiplo de *n* que tendrá solamente *unos* y *ceros* como dígitos en su desarrollo decimal.

Nota

En realidad, el resultado que uno obtiene es un *poco* más fuerte que el que está enunciado, en la medida en que con el método que expliqué anteriormente, uno encuentra no sólo un múltiplo del número *n* que contenga solamente *unos y ceros* sino que, en realidad, aparecen *todos los números unos* primero, y luego *todos los números ceros*.

La balanza y las potencias de 3

Suponga que usted tiene una balanza con dos platillos. Es decir, no está marcado ningún número, sino que usted puede decidir si un objeto pesa más que otro poniendo uno de cada lado y viendo si la balanza se inclina hacia un lado o hacia el otro.

Dicho esto, suponga además que yo le doy *cuatro* pesas. Cada una de ellas tiene, justamente, un peso diferente:

1 kilo
3 kilos
9 kilos y
27 kilos

Ahora, yo le alcanzo 40 cajas iguales (en apariencia), pero todas con diferente peso, de manera tal que haya una caja que pesa 1 kilo, otra 2, una tercera que pesa 3 kilos... y así siguiendo hasta llegar a una que pesa exactamente 40 kilos.

Si no hay ninguna manera de distinguir las cajas entre sí, y usted cuenta con los elementos que yo describí anteriormente (la balanza de dos platillos y las cuatro pesas), ¿cómo hacer para poder decidir el peso de cada caja?

Solución

Le propongo que tratemos de conseguir entre los dos, *todos* los posibles pesos entre 1 kilo y 40 kilos (en números enteros). Es decir, buscar una forma de pesar, entre los dos platillos y las cuatro pesas que tenemos, *todos* los números (en kilos) entre 1 y 40.

Empiezo:

a) Para el número 1, no hay problemas. Basta con poner sobre uno de los platillos la pesa con el número 1.
b) ¿Cómo hacer con el 2? Está claro que no hay pesa que 'pese' exactamente dos kilos. Sin embargo, si yo pongo de un lado la de 3 kilos y del otro lado la de 1 kilo, está claro que la diferencia entre los dos platillos es lo que quiero pesar: 2 kilos.
c) Tres kilos es fácil también, porque tenemos una pieza de exactamente ese peso.
d) ¿Cómo hacer para obtener el 4? (¿Quiere pensar usted antes de seguir leyendo?) Basta con poner del mismo lado las de 1 y 3 kilos. Eso suma 4 kilos.
e) Ahora se pone interesante. ¿Cómo obtener el número 5? Mmmmm... si de un lado pongo la pesa de 9 kilos, y del otro ubico la de 3 y 1 juntas, entonces, la diferencia entre los dos platillos es: 9 - 3 - 1 = 5!
f) El número 6 debería ser más sencillo. Basta con poner 9 de un lado y 3 del otro. La diferencia da 6.
g) ¿Y cómo obtener el 7? (Valdría la pena que lo resolviera usted evitando leer lo que sigue…) De todas formas, lo que hay que hacer es poner el 9 y el 1 del mismo lado (que suman 10) y el 3 del otro lado. La diferencia ahora es de 7.
h) El 8 parece más sencillo. Basta con poner el 9 de un lado y el 1 del otro.
i) El 9 es muy fácil: basta con usar la pesa de 9 kilos directamente.

A partir de ahora, voy a escribir dos columnas en donde voy a 'simular' que cada una es un platillo. Por ejemplo, como verá usted en el caso del 11 (por ejemplo), de un lado van el 9 y el 3 (que suman 12) y del otro lado la de 1 kilo. La diferencia entre 12 y 1 es 11, como uno busca.

1	1	
2	3	1
3	3	
4	3 y 1	
5	9	3 y 1
6	9	3
7	9 y 1	3
8	9	1
9	9	
10	9 y 1	
11	9 y 3	1
12	9 y 3	
13	9, 3 y 1	
14	27	9, 3 y 1
15	27	9 y 3
16	27 y 1	9 y 3
17	27	9 y 1
18	27	9
19	27 y 1	9
20	27 y 3	9 y 1
21	27 y 3	9
22	27, 3 y 1	9
23	27	3 y 1
24	27	3
25	27 y 1	3
26	27	1

27	27	
28	27 y 1	
29	27 y 3	1
30	27 y 3	
31	27, 3 y 1	
32	27 y 9	3 y 1
33	27 y 9	3
34	27, 9 y 1	3
35	27 y 9	1
36	27 y 9	
37	27, 9 y 1	
38	27, 9 y 3	1
39	27, 9 y 3	
40	27, 9, 3 y 1	

Como ve entonces, cualquier número de kilos entre 1 y 40 puede ser *reproducido* al ubicar las pesas en los dos platillos. Por ejemplo, si usted quiere encontrar la caja que pesa 22 kilos, tiene que poner en el platillo de la izquierda las que pesan 27, 3 y 1 kilo, y en el platillo de la derecha, la que pesa 9. Por supuesto, esto va a dejar al platillo de la derecha con mucho menos peso que el de la izquierda... ¿pero cuánto menos peso? Bueno, exactamente 22 kilos. Bastará con ir probando con las cajas que uno tiene, hasta encontrar la que deja los dos platillos nivelados[89].

89. Juan Sabia me hace una interesante observación: se podría agregar una caja más, por ejemplo, que pese 41 kilos. En ese caso, la *única* caja que no se puede nivelar con *ninguna* combinación de las pesas es la de 41 kilos. Interesante, ¿no?

Lógica pura

En un edificio hay tres señores que tienen estos apellidos: Médico, Arquitecto y Dentista. Uno de ellos es médico, otro arquitecto y el tercero es dentista. Sin embargo, ninguno de los tres tiene el apellido que corresponde con su profesión.

Por otro lado, cada uno de los tres tiene contratada como asistente a la hija de uno de sus amigos, y tal como sucede con los padres, ninguna de las tres tiene un apellido que coincida con su profesión.

Si el señor Médico no es el arquitecto, ¿cuál es la profesión de la señorita Dentista?

Solución

El señor Médico no puede ser médico (porque coincidiría su profesión con su apellido), y el problema dice que no es el arquitecto. Luego, el señor Médico es el dentista.

El señor Arquitecto no puede ser arquitecto, y como tampoco puede ser dentista (porque ya lo es el señor Médico), entonces él (el señor Arquitecto) tiene que ser médico.

En consecuencia, como el señor Médico es dentista y el señor Arquitecto es el médico, se deduce que el señor Dentista es el arquitecto.

Por otro lado, ya sabemos que la señorita Dentista no puede ser dentista, pero también sabemos que no puede ayudar a su padre (que es arquitecto). Luego, la señorita Dentista *tiene* que ser la médica. Y eso contesta el problema.

¿Cómo distribuir dinero en una mesa circular?

Hay muchas formas de abordar el siguiente problema, pero la solución a la que uno llega es sorprendente. Es decir: una vez que uno lo ha pensado un rato, la respuesta empieza a resultar más *natural*, pero de antemano creo que uno no imagina que será así.

Basta de preámbulos. Acá va.

Suponga que hay diez personas sentadas alrededor de una mesa circular. La ventaja de este hecho es que no hay nadie que ocupe una posición preferencial (por ejemplo, no hay cabeceras, ni lugares del medio, etcétera).

Yo les entrego *diez mil pesos* para que se repartan entre las diez personas, pero tienen que cumplir con una sola regla: como cada persona tiene dos personas sentadas al lado (una a su izquierda, y otra a su derecha), el dinero que tiene cada uno debe ser el '*promedio*' de los dos que tiene al lado.

Por ejemplo, si dos señores están sentados a la izquierda y derecha de una señorita, y el que está a la izquierda tiene en su poder 100 pesos y el que está sentado a la derecha tiene 300, entonces la señorita tiene que tener 200 en su poder. Es que el *promedio* entre 100 y 300 es justamente 200.

Con esa regla que se tiene que cumplir para *todas* las personas que están sentadas en la mesa, le propongo que haga usted una distribución de los *diez mil pesos* que yo le entregué. ¿Se puede encontrar alguna forma de hacerlo? ¿Tiene solución el problema? Y si tiene, ¿cuántas son?

Solución

No sabe cómo me gustaría estar a su lado para que discutamos juntos qué pensó usted y qué pensé yo. Pero como eso —por ahora— no es posible, le propongo recorrer lo que hice yo y ver qué le parece.

Empecemos por el final. Es decir: supongamos que el problema *sí* tiene solución y que logramos encontrar una forma de distribuir los 10 mil pesos cumpliendo la regla que escribí al principio: cada persona debe tener el *promedio* del dinero que tienen los dos adyacentes.

Las personas las voy a imaginar distribuidas en esta forma circular y les voy a poner una letra como 'nombre'. Es decir, van a estar sentadas así:

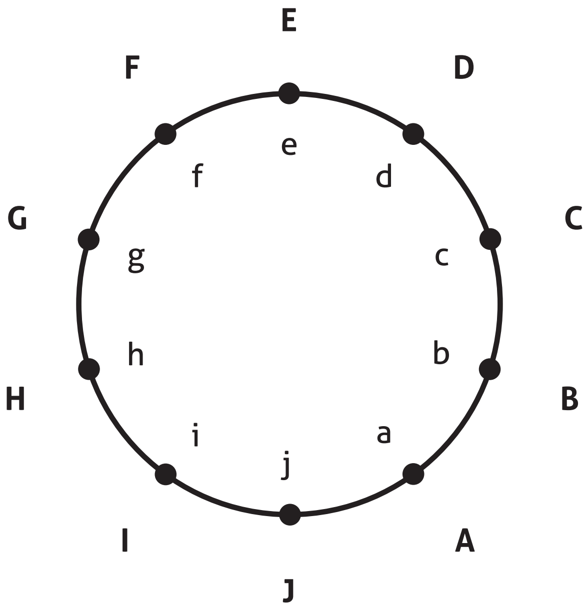


Fig. 1

Por otro lado, supongamos que la cantidad de dinero que tiene cada uno lo represento con la misma *letra* pero en *minúscula*. Es decir, la persona A tiene *a* pesos, la persona *B* tiene *b* pesos, la persona C tiene *c* pesos, y así siguiendo hasta cubrir todas las letras.

Entre las diez personas debe haber alguna que tiene la *mayor* cantidad de dinero. Si son varias, elijo una cualquiera. Supongamos que es la persona que llamé B (si fuera cualquier otra, el razonamiento es equivalente).

Esta persona, B, tiene *b* pesos[90].

90. No se asuste por las letras, son solamente *formas* de ponernos de acuerdo en cómo llamar a las personas y al dinero que tiene cada una. Todo lo

Fíjese si está de acuerdo conmigo en esta afirmación. La persona B tiene una cantidad *b* de dinero, pero esta cantidad no puede ser *cualquiera*. Como tiene que cumplir la regla establecida, entonces '*el dinero que tiene b, tiene que ser el promedio del dinero que tienen* A *y* C, *ya que ellos dos son los que están sentados a los dos costados de B*'.

Es decir, si uno *suma* el dinero que tienen A y C y lo divide por *dos*, eso resultará el dinero que tiene que tener B. (Antes de avanzar, le pido que por favor lea la frase anterior, y se convenza de que entendió por qué esto tiene que ser así.)

Lo voy a resumir con una igualdad:

$$(a + c) / 2 = b \qquad (*)$$

Como ya escribí, la persona B es la que tiene la mayor cantidad de dinero (podría haber otras, pero B es una de ellas).

De la igualdad (*) se deduce que:

$$2b = (a + c)$$

O lo que es lo mismo:

$$(b + b) = (a + c)$$

Y pasando de miembro:

$$(b - a) = (c - b) \qquad (**)$$

---

que hice hasta acá fue elegir *una* de las personas que tiene la mayor cantidad de dinero entre los diez y lo llamé B. Y a *la cantidad de dinero que tiene B* la llamé *b*.

Y ahora quiero hacer una pausa con usted e invitarla/invitarlo a pensar algo: fíjese en la igualdad (**). El término de la izquierda (b - a) tiene que ser *mayor* o *igual* que cero. ¿Por qué? Como el número *b* es el dinero que tenía B que era quien suponíamos que tenía la *mayor* cantidad de dinero, entonces, *a lo sumo* el dinero que tiene A (o sea *a)* podrá ser el mismo que tiene B, pero no lo puede superar. Es decir

$$(b - a) > = 0$$

Pero también por (**), si el número de la izquierda es mayor o igual que cero , el número de la derecha también (¡porque son iguales!). Luego, se deduce que

$$(c - b) > = 0 \qquad (***)$$

Y acá quiero detenerme y sugerirle que *mire fijo* la igualdad del renglón anterior que llamé (***). ¿Qué tiene que pasar entonces? (Tengo la *fuerte* tentación de retirarme para que usted pueda pensar en soledad. Pero no me queda más remedio que seguir, no sin antes pedirle que no siga leyendo si no le dedica un rato a tratar de descubrir ¡qué dice la igualdad (***)!)

La igualdad (***) dice que *c* y *b* tienen que ser iguales. ¿Por qué?

Es que por un lado, hemos deducido que (c - b) >= 0. Pero por otro lado, uno sabe que *b* es la mayor cantidad de dinero que pueden tener todas las personas. Luego *c*, **a lo sumo**, puede ser igual a *b.* No puede ser más grande. Forzosamente entonces (c - b) tiene que ser *igual* a *cero.* Es decir, *(c - b)* = *0*, y por lo tanto,

$$c = b$$

Pero si usted mira la igualdad (**), verá que si $(c - b) = 0$, entonces $(b - a)$ también es igual a *cero*. O sea, ambos son iguales: $a = b$.

Como usted advierte, hemos concluido que $a = b = c$.

Pero de la misma forma, así como ya usamos que $(a + c)/2 = b$, también se tienen que verificar las siguientes igualdades (ya que cada persona debe tener una cantidad de dinero igual al promedio de los dos que tiene a los costados).

$$
\begin{aligned}
(b + d)/2 &= c \\
(c + e)/2 &= d \\
(d + f)/2 &= e \\
(e + g)/2 &= f \\
(f + h)/2 &= g \\
(g + i)/2 &= h \\
(h + a)/2 &= i \\
(i + b)/2 &= a
\end{aligned}
\qquad (\&)
$$

Ahora, utilizando las mismas igualdades (ecuaciones) que figuran en (&) y usando el mismo procedimiento que con {a, b y c}, se deduce que *todos* los valores {a, b, c, d, e, f, g, h, i} son iguales. Y como la suma a distribuir son diez mil pesos, y hay diez personas sentadas alrededor de la mesa, esto indica que cada uno de ellos tiene *mil pesos*. Y eso responde el problema.

La moraleja es que sí se puede hacer una distribución usando la regla propuesta, pero hay una única manera de hacerlo y es entregándole a todos la misma cantidad de dinero: como son diez mil pesos para repartir, cada uno de ellos tiene que tener mil pesos.

Números primos (2013)

Curtis Cooper es profesor de matemática en una universidad muy pequeña, en el centro de los Estados Unidos, la Universidad de Missouri. Cooper se dedica desde hace muchos años a una rama de la matemática que se llama Teoría de Números. El 5 de febrero de 2013, anunció al *mundo* que acababa de encontrar el *número primo* más grande que se conozca hasta hoy. Para tener una idea, este número tiene más de ¡17 millones de dígitos!

Es difícil imaginarse un número tan grande, y por otro lado, ¿para qué? ¿Qué utilidad podría tener para la vida cotidiana *descubrir* un número de semejante longitud? ¿Qué hay detrás de esa búsqueda? ¿Y qué significa haberlo encontrado? ¿Es que acaso mejora la calidad de vida de la ciudadanía? ¿Nos hace *mejores*? En definitiva... ¿para qué sirve?

Quiero ofrecer una sola —potencial— respuesta: los números primos están asociados a su vida cotidiana mucho más allá de lo que usted advierte. El único problema es que son totalmente transparentes para un ciudadano común, y obviamente me incluyo. Pero cada vez que usted retira dinero de un cajero automático, cada vez que hace cualquier transacción por internet, cada vez que abre su correo electrónico y luego de poner su identidad agrega su *contraseña* o *password*, cada vez que usa su tarjeta de crédito (o débito) por internet, está usando algunas propiedades de los números primos. La criptografía moderna *se basa esencialmente* en los números primos.

Es obvio que ninguna persona necesita saber esto, de la misma forma que una persona que conduce un automóvil no necesita saber ni cómo ni por qué funciona. Sólo le alcanza con saber manejar. Todo aquel que es diabético sabe que necesita —eventualmente— usar insulina. El diabético la usa y no se cuestiona cómo se produce ni por qué funciona. Uno vive en un edificio o en una casa, y no necesita ser ni ingeniero ni arquitecto ni albañil. De hecho, usted está leyendo un libro en este momento y no necesita saber cuáles fueron los pasos que mediaron entre que yo estoy escribiendo estas líneas y usted que las está leyendo. La vida fluye de esa forma para *todos* en *todas* las actividades. La única diferencia es que cuando se produce algún acontecimiento en el mundo de la matemática es como si el *mundo* entero cuestionara: ¿y ESO para qué sirve?

Como *recordatorio*: un número *primo* es un número entero positivo[91] que *solamente* se puede dividir exactamente por *uno* y por él mismo, es decir si tiene *exactamente dos divisores: el número uno y él mismo*. Por ejemplo, el número *dos* es primo, el *tres* también, el *cinco*, el *siete*, el *once* son todos números primos. El *seis* **no**, porque no sólo es divisible por sí mismo y por *uno*, sino que también se puede dividir exactamente por *dos* y por *tres*. El 36 tampoco, porque es divisible exactamente por 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

91. A los efectos prácticos, solamente hablo de números positivos, pero en realidad, la definición sobre la *primalidad* de un número se extiende a *todos* los números enteros. Eso sí: los números *uno* y *menos uno* (*+1 y -1*) están excluidos de la lista: **no** son números primos

Dicho esto, algunos datos más, muy importantes:

a) Se sabe que hay *infinitos* números primos. Lo demostró Euclides hace 2.400 años.
b) Todo número entero positivo (salvo el *uno)* o bien es primo, o bien se escribe como *producto* de números primos. Además, esta descomposición es *única*, salvo el orden. Este hecho es tan relevante, que se conoce con el nombre de Teorema Fundamental de la Aritmética.

Y ahora, un dato esencial: es muy fácil *multiplicar* números. No importa cuán grande sean, las computadoras multiplican números con una velocidad alucinante. Sin embargo, lo que *no pueden hacer las computadoras en un tiempo razonable* es *descubrir* cuáles son los números primos en los que se descompone un número.

Por ejemplo, el número 15 se escribe como *15 = 3 × 5 (o 15 = 5 × 3)*, y no hay otra forma de descomponerlo. En este caso, es muy fácil. También es fácil *descomponer* al número 100. Se escribe así: 100 = 2 × 2 × 5 × 5.

Pero si yo le dijera que encuentre los *factores primos* del número 237.598.000.273.154.151.515.515.027, quizás usted me entienda que es un *poco* más complicado. Es decir, cuando los números tienen *muchos* dígitos, encontrar los *números* primos que lo componen es *muy difícil*.

La *criptografía* aprovecha esta dificultad *técnica* para poder generar *claves o contraseñas* que son virtualmente inviolables. En realidad, no lo son, si uno tuviera suficiente tiempo (por ejemplo, *diez mil años*), pero a los efectos prácticos, es como si lo fueran. Y acá me quiero permitir una licencia para exagerar: la *lucha* entre computadoras y el hallazgo de números primos cada vez más grandes se transforma en una suerte de *carrera contra reloj*: por un lado, las computadoras son cada vez más rápidas y por otro, los números primos que se encuentran son cada vez más de mayor longitud.

Una última palabra respecto de esto: si se pudiera encontrar una forma *razonable* (en tiempo) para *encontrar los factores primos que tiene un número*, ¡colapsaría el sistema financiero internacional! Así de sencillo: todas las transacciones conocidas, cuya 'inviolabilidad' pareciera estar asegurada, se resquebrajarían y el sistema caería como un castillo de naipes.

Una vuelta a Cooper

Para encontrar el número primo anunciado el 5 de febrero, Cooper trabajó junto a 98.980 personas y 574 equipos. Sí, casi 100 mil personas unidas detrás de un proyecto común que se llama GIMPS, por sus siglas en inglés: Great Internet Mersenne Prime Search ("La Gran Búsqueda por Internet de Primos de Mersenne). Así como hay gente que se junta en el proyecto SETI buscando señales extraterrestres, hay más de 730 mil procesadores (computadoras) tratando de encontrar números primos (en este caso, se llaman *primos de Mersenne* por la *forma* particular que tienen).

El número encontrado por Cooper es *dos* multiplicado por sí mismo 57.885.161 veces y luego hay que restarle *uno*. Es decir:

$$2^{57.885.161} - 1$$

Este número resulta tener 17.425.170 dígitos. Si uno quisiera escribir todos los dígitos en el sistema decimal con el tamaño de letra que usted está leyendo estas líneas, necesitaría casi 84 kilómetros para poder hacerlo.

Claramente no fue dinero el móvil ni de Cooper ni del resto de los que participaron, ya que solamente conseguirá algo así como el equivalente de *tres mil dólares* por su hallazgo. Sin embargo, la primera persona que consiga un número primo con más de 100 millones de dígitos, obtendrá 150 mil dólares y el que llegue al número primo con más de 1.000 millones de dígitos, recibirá 250 mil dólares.

El primo más grande que se conocía hasta acá fue descubierto en el año 2008 (hace casi cinco años) y tenía 13 millones de dígitos. Cooper ya había encontrado otro, pero que *no llegaba a los diez millones de dígitos*.

Por último: está claro que la vida cotidiana no cambia ni para usted ni para mí con este hallazgo. Sin embargo, hacer *ciencia básica*, empujar la *frontera* del conocimiento, tiene siempre el atractivo extra de no saber en qué momento de la evolución del ser humano *algo* que parecía intrascendente o irrelevante puede cambiar la vida de las personas. Y más allá de eso, lo que motoriza todas estas búsquedas es el deseo del hombre de conquistar lo desconocido, descubrir lo ignorado y contestar las preguntas que nadie pudo hasta este momento.

Los Juegos Olímpicos y la lógica

Londres. Julio del año 2012. Juegos Olímpicos. Cada cuatro años, atletas de todo el mundo saltan, corren, nadan, luchan, juegan y algunos otros verbos más, en forma individual o colectiva. Se trata de llegar primero para poder *pasar* a la historia. El norteamericano Michael Phelps es el deportista más 'decorado' del olimpismo moderno: 22 medallas (18 de oro) conseguidas entre los juegos disputados en Atenas (Grecia), Beijing (China) y Londres (Inglaterra). Usain Bolt, oriundo de Jamaica, es el hombre más rápido de la historia. La Argentina tiene también un lugar de privilegio, especialmente en dos deportes colectivos: medalla de oro en básquet y en fútbol, y ambas conseguidas en Atenas. Despues, el básquet obtendría otra medalla más (bronce) en Beijing y estuvo a punto de quedarse también con el tercer lugar en Londres.

La lista podría continuar, pero no es ése el objetivo de estas líneas. Lo que pretendo acá es proponerle algo para pensar, y que está relacionado con los Juegos Olímpicos.

Si bien no hace falta saber nada específico acerca de la competencia, me interesa resaltar algunos datos que para ciertas personas serán superfluos, pero para otras no. Imaginemos que lo que está en disputa es el torneo olímpico de básquet. Se entregarán entonces tres medallas: oro, plata y bronce (al primero, segundo y tercero respectivamente). En este caso, cada país puede ganar *una sola medalla*.

Supongamos que los cinco países que llegaron a la instancia final del torneo fueron: Argentina, Brasil, China, Dinamarca y España. Éstas son las cinco frases cuya validez debería ser suficiente para que usted pueda determinar el orden de los países luego de la competencia y, por lo tanto, establecer quiénes ganaron las tres medallas.

1) Dinamarca ganó la medalla de plata o España ganó la de bronce.
2) Dinamarca ganó alguna medalla *solamente si* España no ganó ninguna.
3) La Argentina ganó la medalla de oro o Brasil ganó la de plata.
4) Si China ganó alguna medalla, entonces Dinamarca también ganó alguna.
5) La Argentina ganó una medalla *si y solamente si* China ganó alguna también.

Una observación. Tomemos el punto (1). La afirmación dice que *al menos* una de las dos aseveraciones es cierta, pero bien podría pasar que las *dos* fueran válidas. Lo que seguro *no puede pasar* es que ni Dinamarca hubiera ganado la medalla de plata ni España hubiera ganado la de bronce. Y lo mismo con el punto (3). En este caso lo que *no* pudo haber pasado es que ni la Argentina hubiera ganado la de oro ni Brasil hubiera ganado la de plata.

Ahora sí, le toca a usted encontrar un argumento que permita decidir qué países ocuparon los primeros tres lugares, y en qué orden.

Solución

Fijémonos en el punto (5). La suerte de Argentina y China están ligadas. ¿En qué sentido? Es que o bien los dos países ganaron medallas o ninguno de los dos obtuvo nada.

Analicemos entonces los dos casos: uno, cuando ni China ni Argentina ganaron ninguna medalla, y el otro, cuando los dos países ganaron alguna (aunque todavía no sepamos qué tipo de medallas fueron).

Primer caso: ni Argentina ni China ganaron medallas

Como en total son cinco países (Argentina, Brasil, China, Dinamarca y España), si ni Argentina ni China ganaron medallas, entonces los tres países que aparecieron en el podio fueron: Brasil, Dinamarca y España. Faltaría ver en qué orden.

Por el punto (3), o bien la Argentina ganó la medalla de oro o bien Brasil ganó la de plata. Como la Argentina no ganó ninguna medalla, entonces **Brasil tuvo que haber ganado la de plata**.

Ésa es otra conclusión: Brasil debió haber ganado la medalla de plata. Resta saber qué pasó con Dinamarca y España.

Ahora concentrémonos en el punto (2). Allí dice que Dinamarca ganó *alguna medalla* solamente si España no ganó ninguna. ¿Quiere pensar un instante esta afirmación? Es que por un lado *sabemos* que los tres países que ganaron medallas son Brasil, Dinamarca y España, pero por el punto (2) la *única* forma en la que Dinamarca pudo haber ganado una medalla es si España no ganó ninguna. Y eso es una contradicción[92], porque España *tuvo* que haber subido al podio de los ganadores.

92. Contradice lo que habíamos deducido en el punto (5).

Esta contradicción que se plantea indica que el supuesto original (que ni Argentina ni China ganaron medallas) no puede ser cierto.

Pasamos entonces al caso siguiente.

Segundo caso: Argentina y China ganaron medallas

Todavía no sabemos qué tipo de medallas pero ya sabemos que ambos estuvieron entre los tres primeros.

Por el punto (4), si China gana una medalla (y sabemos que *sí* ganó una), entonces Dinamarca *también* tuvo que haber ganado una.

Con este dato ya tenemos los tres ganadores: Argentina, China y Dinamarca. Falta saber el orden.

Por el punto (3), tiene que ser cierta alguna de estas dos afirmaciones: o bien la Argentina ganó la medalla de oro o Brasil tuvo que haber ganado la de plata. Como sabemos que Brasil se quedó fuera del podio, entonces la única alternativa posible es que la **Argentina hubiera ganado la de oro**.

Por el punto (1), o bien Dinamarca ganó la de plata o bien España ganó la de bronce. Como España se quedó afuera, entonces **Dinamarca tuvo que haber ganado la de plata**.

Este dato es el último que necesitábamos para completar la respuesta al problema: como hemos deducido que la Argentina ganó la de oro y Dinamarca ganó la de plata, y también sabemos que China tuvo que haber estado entre los tres primeros, la última medalla que faltaba decidir (la de bronce), la ganaron los chinos.

Reflexión final

Este tipo de problemas en donde hay que *imaginar* posibilidades y *jugar* con la lógica de los datos que nos son ofrecidos, no tienen una utilidad *per se*. Peor aún: si usted quisiera saber cómo terminaron las posiciones en el torneo olímpico de fútbol, ¿quién habría de ofrecer un *trabalengua* como el que está escrito anteriormente? ¡No! Se fijaría en la lista de resultados del día y listo. Pero ésa no es la razón por la que escribí este segmento. Lo hice porque ayuda a recorrer caminos que uno no camina con frecuencia y nos/los prepara para el momento en el que 'potencialmente' podamos usarlos. Hacer conjeturas sobre escenarios posibles y evaluar diferentes alternativas son herramientas comunes en la vida cotidiana. Cuanta más destreza tengamos para usarlas, mejor estaremos preparados para aprovechar sus beneficios.

Matemágica. Hoy... monedas

Un problema para desafiar su imaginación y mostrar el *poder* de la matemágica, *casi* hasta convertirse en magia. Usted verá cuán impresionante es el episodio que la/lo quiero hacer vivir.

Le propongo lo siguiente: tome tres monedas cualquieras, depósitelas en hilera de manera tal que queden formando una fila. Como yo no estoy ahí (donde está usted) para ver lo que está haciendo, las vamos a denominar así: moneda izquierda, moneda del medio y moneda derecha.

Distribúyalas poniendo cara o ceca como prefiera. El desafío consistirá en lo siguiente: yo le voy a ir diciendo (desde acá) qué es lo que tiene que hacer con las monedas y le voy a mostrar que en menos de *tres* movimientos, yo voy a lograr que queden las tres *caras* o las tres *cecas*, independientemente de cómo las haya colocado usted al principio. Todo lo que tiene que hacer usted es seguir mis indicaciones y contestar mi pregunta con honestidad (intelectual).

¿Listo? Acá va.

1) Primera pregunta: ¿están las tres caras o tres cecas antes de empezar? Si su respuesta es sí, listo. No hay más nada que hacer. Ya logré lo que quería sin siquiera tener que hacer

ningún movimiento. Como usted advierte, este paso es imprescindible para no perder el tiempo. Sigo.

2) Ahora, si las tres no son ni caras ni las tres cecas, de vuelta la moneda izquierda. Es decir: si es cara, póngala en ceca. Si es ceca, póngala en cara. Hágalo que yo espero acá.
3) Segunda pregunta: ¿son las tres caras o las tres cecas? Si la respuesta es sí, listo. Si no, pase al punto siguiente.
4) Ahora, de vuelta la moneda del medio. Si está en la posición de cara, póngala en ceca, y si está en ceca, póngala en cara.
5) Tercera pregunta: ¿logré mi objetivo ya? Si es así, con dos movimientos, puedo decir que misión cumplida. Si no… lea el paso siguiente.
6) Último movimiento: ahora vuelva a dar vuelta la moneda izquierda. Sí, la izquierda...

¿No es notable lo que pasó? En tres pasos (o menos) logré que las tres monedas quedaran en la misma posición. Lo notable es que desde donde yo estoy escribiendo esto, no pude ver la posición inicial de las monedas. Ahora bien: ¿por qué habrá pasado lo que pasó? ¿No le da curiosidad averiguarlo?

La respuesta la va a encontrar acá mismo, aunque —como siempre— le sugeriría que le dedique un rato a pensarlo. Si ahora no tiene tiempo, no siga leyendo. No se prive de la oportunidad de deducirlo en soledad.

Ahora sí, acá va. Le hago yo una pregunta para empezar: ¿de cuántas formas pudo haber puesto usted las monedas inicialmente? Veamos. Voy a llamar X a las ‘cecas’ y C a las ‘caras’. La distribución (moneda izquierda, moneda del medio y moneda derecha) pudo haber sido así:

1) CCC
2) CCX
3) CXC
4) CXX
5) XCC
6) XCX
7) XXC
8) XXX

Como usted advierte, hay nada más que ocho posiciones[93] iniciales posibles. Tanto la primera (CCC) como la última (XXX) ya están en el lugar que quiero, por lo que no vale la pena considerar estos dos casos. Miremos los restantes. Si usted recuerda las instrucciones que yo fui poniendo anteriormente, las únicas dos monedas que le pedí que moviera fueron la de la izquierda y la del medio. La última no la tocamos nunca. Por lo tanto, como al final queremos que las tres estén en la misma posición, eso implica que la moneda *derecha* será la que determine el lugar en el que van a terminar las tres. Es decir, si la moneda de la derecha es una 'cara', veremos que al hacer los pasos que yo le indicaba, las dos primeras terminarán en 'cara' también. En cambio, si la de la derecha es 'ceca', entonces, en la posición final, quedarán las tres 'cecas'.

93. Uno puede deducir cuántas posibles posiciones iniciales hay, sin necesidad de hacer una lista exhaustiva. Es que cada moneda puede tomar dos estados (cara o ceca). ¿De cuántas formas puedo ubicar la moneda izquierda? De dos formas. Por cada una de estas dos, ¿de cuántas formas puedo ubicar la moneda del centro? También de dos formas. Luego, para las dos primeras monedas hay 4 posiciones, y como para cada una de estas cuatro, la última, la moneda de la derecha puede también ocupar dos estados (cara o ceca), hay que multiplicar estas cuatro por dos. Resultado final: ocho posiciones posibles.

Miremos las tres posiciones que terminan en X (ceca). Son

a) CCX
b) CXX
c) XCX

La posición (a) es tal que requiere de *dos* movimientos: dar vuelta la primera (que se transforma en XCX), y después la del medio (que ahora queda en XXX). Al hacer eso, cambio la posición de las dos caras y las transformo en cecas, como la última. Allí termina todo. Hacen falta dos pasos.

En la posición (b), ni bien da vuelta la primera moneda se consigue lo que uno quiere: XXX. Acá hace falta entonces *un solo paso*.

Por último, el caso (c) es el *único* de los primeros tres que requiere tres movimientos. ¿Por qué? Fíjese. En el primer paso, al dar vuelta la primera, tenemos CCX. En el segundo, damos vuelta la del medio, y tenemos CXX. Por último, en el paso final, hay que volver a dar vuelta la primera, y por lo tanto se tiene XXX. Y listo.

Quedaría por analizar el caso de las tres posiciones que tienen una *cara* como posición para la tercera moneda. Es decir

d) CXC
e) XCC
f) XXC

¿No le dan ganas de intentarlo a usted? Advertirá que el caso (d) requiere de los tres movimientos, y tendrá que pasar por: XXC, XCC para finalmente llegar a CCC.

El caso (e) requiere de un solo movimiento: ya en el primer paso se llega a CCC.

Por último, el caso (f) necesita de dos pasos. El primero llega a CXC y en el segundo, al dar vuelta la moneda del medio, se obtiene CCC. Y punto.

Lo curioso de este *truco* es que es totalmente impensado. Pareciera como que el mago está haciendo eso, *magia*, pero como usted advierte, no importa cuál haya sido la posición inicial, el resultado que se obtiene es el de emparejar las tres caras y las tres cecas.

Final a toda orquesta

Hasta acá fue todo ingenuo: un truco de magia, un poco de análisis que provee la matemática para explicar por qué funciona y la utilización de monedas como 'golpe de efecto'. Sin embargo, el hecho de que tres movimientos (a lo sumo) fueran suficientes para igualar las caras (o cecas) en la mesa tiene una connotación mucho más profunda.

En 1947, el físico norteamericano Frank Gray (1887-1969) patentó un sistema que llamó 'código binario reflejado', aunque hoy se conoce con el nombre de "Código Gray" o "Código de Gray". Este código es un sistema de numeración binario, que se basa en que dos números binarios consecutivos difieren solamente en uno solo de sus dígitos. Se usa en electrónica y esencialmente sirve para detectar y corregir errores en los sistemas de comunicaciones, en la televisión por cable y la televisión digital terrestre. Esencialmente las tres monedas, con sus ocho posibles estados (como vimos anteriormente) pueden ser pensadas como un cubo en tres dimensiones. Este cubo se puede reducir a un cuadrado por cuestiones de simetría. El Código de Gray indica cómo atravesar todos estos nodos cambiando la posición de una moneda por vez sin repetir ninguna configuración. Como uno cuenta las ‘movidas’ y no las configuraciones que visita, termina ‘restando uno’ a lo sumo tres veces.

Y todo esto se puede generalizar: si uno tuviera n monedas, se tendrían 2^n configuraciones de las cuales $2^{(n-1)}$ serían configuraciones dobles. En el peor de los casos, con $2^{(n-1)} - 1$ movimientos uno podría poner todas las monedas ‘cara’ o ‘ceca’.

Veamos lo que sucede si $n = 4$, o lo que es lo mismo, si uno tuviera *cuatro* monedas. Quiero convencerla/convencerlo de que con *a lo sumo*

$$2^{(4-1)} - 1 = 2^3 - 1 = 7 \text{ movimientos,}$$

se pueden llevar las cuatro monedas a que sean o bien todas ‘caras’ o bien todas ‘cecas’.

En el caso que ya vimos, alcanzaba con denominar a las monedas como ‘izquierda’, ‘centro’ y ‘derecha’. En el caso de cuatro monedas, voy a ponerles un número a los lugares de izquierda a derecha: posición 1 será para la moneda que está en el extremo izquierdo de la fila, luego posición 2, posición 3 y por último posición 4 a la que esté en el extremo derecho.

Por ejemplo, si la configuración inicial de las cuatro monedas es:

X C C X (*)

lo voy a interpretar como que las monedas 1 y 4 están en posición ‘ceca’ y las 2 y 3 están en posición ‘cara’.

Éste es el procedimiento a seguir. Una vez que las monedas están dispuestas en una fila, las *siete* instrucciones que uno tiene que seguir —a lo sumo— son las siguientes: dar vuelta *sucesivamente* las monedas que figuran en las posiciones:

1, 2, 1, 3, 1, 2 y 1

Por supuesto, *antes* de instruir a la persona que está dando vuelta las monedas para que proceda con lo que usted le va a decir, necesita preguntarle si las monedas *ya son todas caras o todas cecas.* Si eso es así, entonces no hace falta continuar con el proceso, porque se trata de *llegar* a esa posición.

Analicemos juntos el caso que figura en (*), la 'tira' de caras y cecas sufriría las siguientes modificaciones:

Posición inicial	XCCX
Luego de dar vuelta 1	CCCX
Luego de dar vuelta 2	CXCX
Luego de dar vuelta 1	XXCX
Luego de dar vuelta 3	XXXX…

Y desde acá, ya no hace falta seguir más.

Otro ejemplo. Supongamos que uno empieza con esta posición inicial CXCX.

En este caso, siguiendo las instrucciones (dar vuelta 1, 2, 1, 3, 1, 2 y 1) se obtienen esta serie de posiciones:

Inicial	CXCX
{1}	XXCX
{2}	XCCX
{1}	CCCX
{3}	CCXX
{1}	XCXX
{2}	XXXX... y acá termina el proceso (son todas cecas) sin necesidad de usar la última instrucción (que hubiera sido dar vuelta la primera moneda).

¿Cómo hacer para verificar que *siempre* funciona? Lo que uno debería hacer es verificar que cualquiera sea la posición inicial, si sigue las instrucciones de dar vuelta sucesivamente las monedas que ocupan las posiciones {1, 2, 1, 3, 1, 2, 1} respectivamente, en algún momento del proceso (o al final) obtiene o bien todas *caras* o todas *cecas*.

¿Cuántas posiciones iniciales hay que considerar? Como se tienen cuatro monedas y cada una de ellas puede ser o bien cara o bien ceca, se tienen en total $2^4 = 16$ posibilidades. Pero si usted se fija en las instrucciones, verá que la posición número 4, la moneda que figura en el extremo derecho, *no participa* de las monedas que hay que dar vuelta. Por lo tanto, esto habilita a pensar que no importa si la última es cara o ceca, las instrucciones no modifican su estado. En consecuencia, de las 16 posiciones iniciales posibles, hay que considerar sólo lo que sucede con las tres primeras, o sea con $2^3 = 8$.

Por otro lado, supongamos que la última moneda (la cuarta) está en la posición de 'cara'. Como ella no participa de los movimientos que van a figurar en las instrucciones, esto indica que las tres primeras terminarán siendo 'caras' también. Por supuesto, si la última fuera 'ceca', entonces las tres primeras monedas —en algún momento del proceso— tendrán que ser todas 'cecas'.

Voy a escribir las 16 posibles posiciones iniciales:

CCCX, CCXX, CXCX, CXXX, XCCX, XCXX, XXCX y XXXX son las que terminan en X.

CCCC, CCXC, CXCC, CXXC, XCCC, XCXC, XXCC y XXXC son las que terminan en C.

Fíjese lo que sucede en cada caso al seguir las instrucciones

{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1}. Van *resaltadas* las posiciones iniciales y el proceso termina en el momento que aparecen cuatro cecas o cuatro caras.

CCCX, XCCX, XXCX, CXCX, CXXX, XXXX
CCXX, XCXX, XXXX
CXCX, XXCX, XCCX, CCCX, CCXX, XCXX, XXXX
CXXX, XXXX
XCCX, CCCX, CXCX, XXCX, XXXX
XCXX, CCXX, CXXX, XXXX
XXCX, CXCX, CCCX, XCCX, XCXX, CCXX, CXXX, XXXX
XXXX

CCCC,
CCXC, XCXX, XXXC, CXXC, CXCC, XXCC, XCCC, CCCC
CXCC, XXCC, XCCC, CCCC
CXXC, XXXC, XCXC, CCXC, CCCC
XCCC, CCCC
XCXC, CCXC, CXXC, XXXC, XXCC, CXCC, CCCC
XXCC, CXCC, CCCC
XXXC, CXXC, CCXC, XCXC, XCCC, CCCC

Moraleja

Hemos comprobado que con *a lo sumo* siete movimientos se ubican todas las monedas o bien en posición ‘cara’ o todas ‘ceca’, independientemente de cuál hubiera sido la posición inicial.

Reflexiones finales

Acompáñeme en este razonamiento:

a) cuando hay tres monedas, las instrucciones son dar vuelta sucesivamente:

$$\{1, 2, 1\}$$

b) cuando hay cuatro monedas, las intrucciones son dar vuelta sucesivamente:

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1\}$$

¿Se podrá *inferir* qué habrá que hacer en el caso de cinco (o más) monedas?

No sabe cómo me gustaría estar leyendo este texto con usted para poder discutir juntos el problema. Fíjese que en el caso de tres monedas, las instrucciones no involucran a la tercera, por lo tanto, lo que uno hace es ir modificando la posición de las dos primeras hasta *llevarlas* a que coincidan con la posición de la tercera.

Lo mismo sucede cuando hay cuatro monedas. Como la cuarta (la que está en el extremo derecho) no participa, las instrucciones modifican la posición de las tres primeras, e inexorablemente estas instrucciones tienen que *recorrer* todas las posibilidades que haya hasta llevarlas a la posición de la última.

¿Qué habrá que hacer entonces si hay *cinco* monedas?

¿No tiene ganas de pensarlo usted en soledad? (ahora hago yo una pausa en lo que estoy escribiendo para darle ese tiempo)...

Bien, sigo: ¿qué le parece si hacemos lo siguiente? Si de las cinco monedas, la segunda, tercera, cuarta y quinta son 'cara' por ejemplo (XCCCC), entonces, hay dos posibilidades:

X<u>CCCC</u> o C<u>CCCC</u>

En este último caso, no hace falta hacer nada, y en el primer caso, *basta* con dar vuelta la primera, o sea, usar la instrucción {1} (dar vuelta la primera).

Si las últimas tres monedas fueran 'caras', habría estas posibilidades:

CC<u>CCC</u>, CX<u>CCC</u>, XC<u>CCC</u>, XX<u>CCC</u>

¿Qué es lo que hace falta para obtener *cinco iguales*? Basta con —eventualmente— modificar las primeras dos monedas. Para eso, ya sabemos cómo hacer (por el caso de tres monedas). Las instrucciones tienen que ser {1, 2, 1}.

En ese caso, las últimas tres monedas quedan como están (tres caras), y las dos primeras van variando sus posiciones hasta llegar a que haya dos caras también. De esta forma, lo que sabemos hacer cuando hay tres monedas en total, lo aplicamos acá y resolvemos el problema.

Si las últimas dos monedas fueran caras, las posibilidades que se tienen son:

CCC<u>CC</u>, CCX<u>CC</u>, CXC<u>CC</u>, CXX<u>CC</u>, XCC<u>CC</u>, XCX<u>CC</u>, XXC<u>CC</u>, XXX<u>CC</u>

Luego, lo que hay que lograr es que las *tres* primeras se paseen por todas las posibilidades hasta llegar a tener tres caras en los primeros tres lugares. Y eso lo sabemos hacer cuando uno tiene *cuatro* monedas, y necesita que las tres primeras sean —por ejemplo— caras. Las instrucciones en ese caso son:

{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1}

Si en cambio, la cuarta y quinta moneda no son iguales (digamos que las dos últimas monedas son XC), entonces necesitamos hacer algo para cambiar la cuarta y hacerla igual a la quinta (pasarla de X a C). Pero como el que está dando las instrucciones no sabe que la cuarta y la quinta son distintas... intenta primero modificando las tres primeras. Como la persona que está dando vuelta las monedas no lo detiene nunca, eso quiere decir que nunca quedaron las cinco iguales. Después de haber recorrido el camino de cambiar las posiciones de las tres primeras ({1, 2, 1, 3, 1, 2, 1}), llega el momento de cambiar la cuarta:

{1, 2, 1, 3, 1, 2,1, **4**…}

Una vez que uno llegó a esa posición (haber cambiado la cuarta moneda), ya sabe que ahora la cuarta y la quinta son iguales. Todo lo que hay que hacer es repetir el proceso original como si hubiera cuatro monedas, sabiendo que la cuarta y la quinta son iguales ahora. Luego, hay que repetir el proceso siguiendo estas instrucciones: {1, 2, 1, 3, 1, 2, 1}

Juntando todo esto, el resultado final es:

{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, **4**, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1}

y de esa forma, alcanzan a lo sumo 15 movimientos para lograr que las cinco monedas sean iguales.

Para seis monedas las instrucciones son (creo que usted ya está en condiciones de deducirlo en soledad, pero igual lo incluyo):

{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, **5** , 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1} (*)

Como se ve, todos los movimientos *antes* de dar vuelta la moneda '5' (si es que hiciera falta) es para modificar las posiciones de las cuatro primeras... Si la quinta y la sexta moneda son diferentes, entonces hace falta llegar hasta allí (hasta modificar la quinta) para igualarla a la sexta. Lo que sigue es modificar las cuatro primeras y por eso vuelve a repetirse el patrón que se ve después de mover el cinco en (*).

Creo que con estas ideas, se ve cómo funciona el caso general con cualquier número de monedas. Con todo, para aquellos que estén interesados en avanzar y entender un poco más cómo se puede generalizar al permitir incluso 'rotaciones' entre ellas, les sugiero que consulten el artículo original que dio lugar a este segmento que yo elegí[94].

---

94. 'Coin-Flipping Magic' (cuya traducción libre sería 'La Magia al dar vuelta monedas') fue publicado en el año 2008 en memoria de Martin Gardner luego de la reunión que se hizo en Atlanta, Georgia, Estados Unidos. Sus autores son Nadia Benbernou, Erik Demaine, Martin L. Demaine y Benjamin Rossman. La versión digital puede verse en http://erikdemaine.org/papers/CoinFlipping_G4G8/paper.pdf

Embaldosados

Quiero proponerle algo que creo que le va a interesar. Suponga que nos dieron la posibilidad, a usted y a mí, de embaldosar un patio en un colegio o una escuela, y nos dan la alternativa de ser tan 'creativos' como nos plazca. En realidad, también nos permiten (si queremos) pintar las paredes, acondicionar todo el espacio de acuerdo con nuestro particular gusto.

Nos sentamos con un plano del lugar (usted y yo), y pensamos qué querríamos hacer. Claro está, no son tareas que hagamos habitualmente (al menos yo seguro que no lo hice nunca en mi vida), y por lo tanto, es como una suerte de película virgen o un cuadro en blanco: todo lo que se nos ocurra va bien.

De entrada, le propongo que nos dediquemos al motivo principal de la invitación: *embaldosar el patio*. Es una superficie muy grande, rectangular. ¿Qué hacer? Lo convencional, lo 'conservador', sería buscar lindas baldosas cuadradas, hacer el cálculo de cuántas entran en el área que tenemos que cubrir, y listo. Pero, ésa sería la solución más obvia y si me permite, la más *aburrida*. ¿Qué tendría de *creativo*?

En ese momento, surge una pregunta natural: ¿sólo con 'cuadrados' se puede embaldosar? Claro, la respuesta parece obvia: no. Uno podría también tener baldosas rectangulares, y por supuesto, también podría cubrir toda la superficie de esa forma.

Sin embargo, todavía no hemos contestado exhaustivamente la pregunta original: ¿sólo con cuadrados se puede? Ya sabemos que no, pero no hemos avanzado mucho. Agrego acá algunas variantes que se me ocurren:

a) ¿se podrá solamente con baldosas que tengan cuatro lados?
b) ¿se podrá con triángulos?
c) ¿y con pentágonos?, ¿y con hexágonos?
d) ¿tienen que ser todos polígonos regulares? (en donde todos los lados y los ángulos sean iguales)

Como usted advierte, aparece un campo inexplorado por nosotros. Al menos yo no estoy acostumbrado a pensar en este tipo de situaciones pero el desafío parece entretenido y lo que podríamos hacer es *pensar juntos* algunas respuestas.

No se me escapa que no le estoy dando tiempo ni para respirar. Estoy haciendo yo todas las preguntas y virtualmente aportando todas las respuestas. ¿No tiene ganas de pensar un rato en soledad? Prometo no entrometerme... al menos por unos minutos...

Ideas para evaluar

Quiero analizar con usted algo que vimos anteriormente: “Con baldosas cuadradas se puede embaldosar cualquier superficie”.

Por supuesto que no aspiro a encontrar nada *raro* en esa frase, pero me gustaría pensar qué propiedades tienen las baldosas cuadradas que permiten hacer esa aseveración.

Las baldosas se pueden acomodar en el patio *sin dejar huecos* entre sí.

Se pueden distribuir y ocupar toda la superficie sin *sobreponerse* unas sobre otras

Se pueden expandir o extender tanto como uno quiera. Es decir, independientemente de las dimensiones del patio, la distribución que hagamos se puede replicar indefinidamente[95].

Tal como vimos, no solamente los cuadrados son los que permiten cubrir el patio. Fíjese en estas dos figuras, en donde rectángulos en forma de *baldosas* o en forma de *ladrillos* permiten cubrir pisos y también *paredes*.

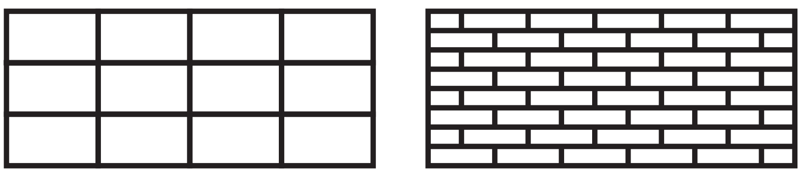


Fig. 1

Ahora quiero que abordemos juntos el caso de otras figuras.

Miremos primero el caso de los círculos.

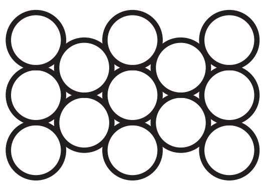


Fig. 2

---

95. Por supuesto que si es un patio rectangular en donde los lados no tienen *todos* la misma dimensión, entonces al querer cubrirlo con baldosas cuadradas va a sobrar (o faltar) una ‘franja’ de baldosas que habrá que o bien *cortar* una vez que están puestas, o bien *cortar* para que *parte de ellas* sirvan para cubrir esa franja.

Como se advierte, los círculos no van a servir. No hay forma de acomodarlos sin que queden huecos entre círculos adyacentes o vecinos.

¿Y si probamos con triángulos? Con *algunos* triángulos pareciera como que la respuesta es afirmativa. Pruebe usted por su cuenta y después revise la siguiente figura hecha con triángulos equiláteros. En el caso que aparece en la figura, el diseño es bastante claro.

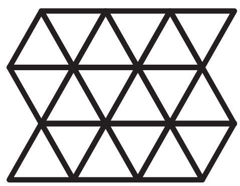


Fig. 3

En todo caso, quedará pendiente que usted intente con otro tipo de triángulos, que no sean tan *simétricos* como en el ejemplo que yo elegí.

¿Y qué pasará con polígonos de cuatro lados pero que no tengan los lados iguales? (o sea, que no sean regulares). Fíjese qué sucede en el caso de este trapecio.

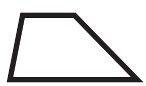


Fig. 4

Este ejemplo es *menos evidente*, pero si usted *juega* un poco con dos de ellos advierte que poniéndolos como figura a continuación se puede obtener un rectángulo y entonces todo es más fácil. Es decir, *pegando* dos trapecios idénticos (uno rotado 180 grados) se puede formar este paralelogramo:

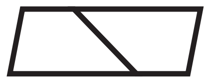


Fig. 5

Estos paralelogramos son más fáciles de acomodar para cubrir una superficie.

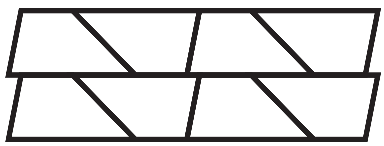


Fig. 6

Si usted tiene ganas de seguir pensando, le sugiero que vea si puede encontrar cómo acomodar cuadriláteros como los de la figura 7, porque en realidad, *cualquier cuadrilátero* sirve para embaldosar, aun los más extraños.

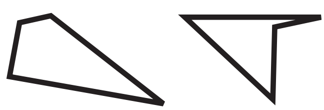


Fig. 7

El caso de los hexágonos regulares no parece plantear tantos problemas. De hecho, es un diseño que uno ve en muchos lugares, en particular en los panales de abejas, ¿no? Fíjese:

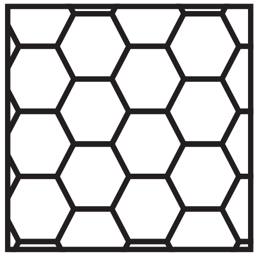


Fig. 8

Avancemos un poquito más. ¿Y con pentágonos regulares? ¿Se podrá? Uno tiene la tentación de decir que sí, porque en definitiva los pentágonos y los hexágonos se parecen.

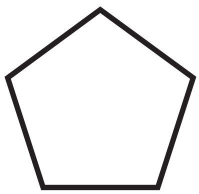


Fig. 9

Le propongo que intente hacerlo y se tropezará *casi* inmediatamente con algunas dificultades. Si bien los pentágonos *se parecen* a los hexágonos, ni bien uno trata de acomodarlos, se advierte que en las esquinas quedan algunos huecos imposibles de evitar.

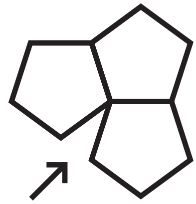


Fig. 10

A esta altura, creo que usted ya lo debe haber detectado. Sospecho que si me acompañó hasta acá en todo este trayecto, había *algo* en los pentágonos que le permitía intuir que no iba a funcionar. De acuerdo, pero ¿qué es lo que pasa? ¿Por qué no se puede? Uno se da cuenta de que no se va a poder, pero ¿cómo aislar el problema? En algún sentido, creo que la pregunta que uno debería hacer es: *¿por qué uno* ***sabía*** *que los pentágonos no iban a funcionar?*

Revisemos juntos el caso de los triángulos equiláteros. En este tipo de triángulos, no sólo los tres lados son iguales sino también los *ángulos* son iguales. Más aún: los tres ángulos internos de un triángulo equiláteros miden 60 grados.

Como 60 entra exactamente *seis veces* en 360, esto permite decir que cuando se trata de *grados*, si una vuelta completa (360 grados) se puede cubrir con *seis* ángulos de 60 grados, entonces las esquinas de los seis triángulos pueden cubrir exactamente los 360 grados.

De hecho, con los *cuadrados* pasó algo equivalente. Como los cuatro ángulos de un cuadrado miden 90 grados, y 90 entra exactamente cuatro veces en 360, esto indica que los cuadrados van a servir para embaldosar.

Y por último, los hexágonos *también* sirven por la misma razón. Tres de sus ángulos de 120 grados cubren una vuelta de 360 grados.

Y justamente, con los pentágonos *no se puede*. Los ángulos de un pentágono regular miden 108 grados, pero 360 no es divisible por 108. De hecho 360 dividido por 108, no es un número exacto ($108 \times 3 = 324$), o sea, *no es exactamente 360 como uno necesitaría*.

La conclusión es la siguiente:

El triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono son *los únicos polígonos regulares que permiten embaldosar el plano*.

Moraleja

Si vamos a ser creativos, está todo bien, pero sepamos de antemano que ésas son nuestras únicas alternativas (con polígonos regulares). No son pocas, pero no hay más. Y como siempre, la matemática interviene fuertemente para poder encontrar algunas respuestas.

Desafío para obtener un número *grande*

Quiero hacerle una propuesta sencilla. Fíjese en este número:

12341234123412341234123412341234 (*)

Tiene 32 cifras. El desafío consiste en que usted *tache* diez cualesquiera de los dígitos que allí figuran de manera tal que se consiga el número *más grande* posible. ¿Se anima?

Como se advierte, es un problema muy sencillo. Usted dirá.

Solución

La primera tentación es *tachar* todos los números *uno*. Uno supone que si elimina los *ocho números uno* se queda con números todos más grande. Pero eso no es cierto. ¿Por qué?

Mire el número (*). El mayor dígito que aparece es el número *cuatro*.

Cuando yo tache diez dígitos, cualesquiera sean, va a quedar un número de 22 cifras. Lo que más conviene es que este número empiece con un número *cuatro*. Más aún: conviene que sigan tantos cuatros como sea posible, ya que de esa forma, el número resultante va a ser el mayor que se pueda obtener.

Moraleja: los números que conviene tachar son las tres primeras *ternas* (1, 2, 3) y por último, el primer número *uno*. En definitiva, resulta:

~~123~~ 4 ~~123~~ 4 ~~123~~ 4 ~~1~~ 2341234123412341234

Por lo tanto, el número que se obtiene es:

4442341234123412341234

No me crea a mí. Verifíquelo usted hasta convencerse de que está bien lo que está escrito o usted pudo encontrar un número más grande y mi razonamiento fue equivocado (espero que no...).

Encuentros en una pista de atletismo

El que sigue es un problema precioso porque la tentación inicial es pensar que 'faltan datos', que 'así no se va a poder'. Después de pensarlo, cuando uno verdaderamente *entendió* el problema, no puede comprender por qué no entendía antes. No quiero abusar con los prolegómenos. Acá va.

Suponga que hay una pista de atletismo con varios andariveles, un circuito cerrado, en el sentido de que uno puede dar una vuelta completa como si se estuviera disputando alguna de las pruebas de atletismo en los Juegos Olímpicos.

En la línea de largada hay solamente dos competidores que voy a llamar A y B.

Lea con cuidado lo que va a suceder, porque de entrada ya hay un hecho curioso: ambos *miran* en direcciones distintas.

Es decir, A va recorrer el circuito en una dirección, y B lo va a hacer corriendo hacia el otro lado.

Cada uno corre a una determinada velocidad, no necesariamente la misma, pero lo que sí sucede es que tanto A como B corren *todo* el tiempo a la *misma velocidad*.

Se sabe también que A alcanza a dar exactamente *tres vueltas* a la pista en una hora.

Por otro lado, B, en esa misma hora, da exactamente *nueve* *veces* vuelta al mismo circuito, lo que implica que va muchísimo más rápido (o más precisamente, tres veces más rápido que A).

Pregunta: ¿cuánto tiempo pasa hasta que se encuentran por primera vez?

Antes de retirarme y dejarla/lo en soledad, quiero reiterar lo que escribí anteriormente: aunque lo parezca, al problema no le hacen falta más datos. Los que figuran son suficientes.

Ahora sí, nos encontramos después.

Solución

Una de las cosas curiosas que ofrece este problema es que la primera reacción (o la segunda, y la tercera... no sé) es decir: "¡Así no se puede resolver! ¿A qué velocidad va cada uno? ¿Cómo voy a determinar cuándo se encuentran si no sé la longitud de la pista?".

Dicho esto, le propongo que recorramos juntos estas ideas.

Tanto A como B parten al mismo tiempo en direcciones contrarias. Como B va mucho más rápido que A (al triple de velocidad que B), y en una hora da nueve vueltas a la pista mientras que A la da vuelta tres veces, está claro entonces que tienen que encontrarse *varias veces en el trayecto*.

Una pregunta alternativa que uno podría hacer es: de acuerdo, se encuentran varias veces, sí, pero ¿cuántas veces?

Fíjese en esta figura:

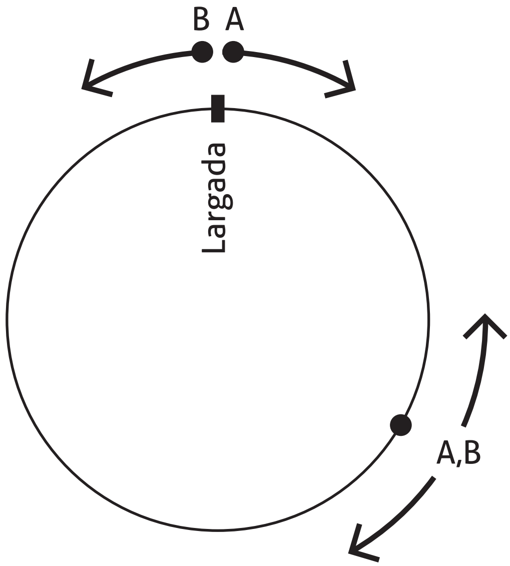


Fig. 1

Ahora viene una de las claves del problema: en el momento en que se produce un encuentro (no importa si es el primero o no), es porque ***entre los dos*** dieron juntos una vuelta a la pista. Desde el punto de largada hasta ese punto de encuentro, ambos dieron una vez vuelta a la pista. Este hecho es muy importante de entender y no avance si no lo pudo seguir. Como A va para un lado y B va para el otro, cada vez que se encuentran, es porque desde la largada, el trecho recorrido por A más el trecho recorrido por B suman *exactamente* una vuelta.

Ahora bien: ¿cuántas veces dieron vuelta a la pista entre los dos?

En una hora, A dio vuelta a la pista *tres* veces.

En esa misma hora, B dio vuelta a la pista *nueve* veces.

En total, dieron *doce vueltas* al circuito.

Pero por otro lado, recién vimos que cada vez que se encontraron es porque *entre los dos* habían recorrido una vuelta a la pista.

En consecuencia, tuvieron que haberse encontrado *doce veces.*

Moraleja: si se encontraron doce veces en una hora y cada uno viajó a una velocidad constante, es porque se encontraron en forma regular (o sea, en el mismo espacio de tiempo entre cada encuentro).

Luego, lo que uno podría hacer es ver cuánto tiempo tiene que pasar entre un encuentro y otro si se cruzaron doce veces en una hora.

O sea, en 60 minutos se vieron doce veces, quiere decir que se encontraron cada 60/12 = 5 minutos.

La respuesta a la pregunta original entonces es que la *primera* vez que se encontraron fue a los *cinco* minutos de la largada.

¿No es preciosa esta forma de modelar el problema? Virtualmente no hubo que hacer ninguna cuenta, solamente *pensarlo* de forma distinta.

Líneas de fractura

Hace algunos años estábamos por grabar uno de los programas de *Alterados por PI* (en el canal Encuentro). Reunidos todos en la productora que dirige Claudio Martínez, Pablo Milrud nos trajo un problema para hacer con los alumnos de una escuela que visitaríamos al día siguiente.

Pablo, que tiene una capacidad muy especial para visualizar cuestiones relacionadas con la geometría, nos planteó la siguiente situación que deberíamos replicar en el colegio. Entre los presentes estaban Gabriel Díaz y María Marta García Scarano. Gabriel es quien nos provee a todos del material que necesitamos para *dramatizar* cada uno de los juegos y María Marta es quien termina poniendo los pulgares para arriba o para abajo usando su incomparable olfato para determinar si a los estudiantes el problema les gustará o no.

Pablo le pidió a Gabriel que le prestara 18 piezas de dominó, las comunes de (1×2). Arriba de la mesa había un tablero parecido a los que se usan para jugar al ajedrez, pero en lugar de ser de (8×8), éste era de (6×6). Una vez que tuvo todos los elementos a su disposición, nos desafió:

"Traten de ubicar las 18 piezas en el tablero sin que haya una línea *completa* de fractura".

Así planteado, empezamos por no entender nada. ¿Línea de fractura? ¿Qué es una línea de fractura? ¿Qué es lo que habría que evitar?

Pablo tomó las 18 piezas y las distribuyó de la forma que aparece en la figura 1.

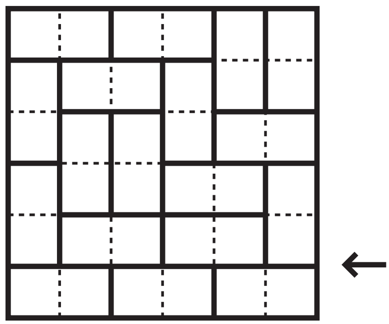


Fig. 1

"Como ustedes ven en este ejemplo", siguió Pablo, "no me fue posible evitar que en el tablero quedara *dibujada* una línea de *fractura*. Es decir, si ustedes miran acá (y marcó donde está la 'flecha' en la figura 1), hay una línea completa que divide el tablero en dos partes. Eso es lo que llamo una línea de *fractura*. Lo que ustedes tienen que hacer es distribuir las 18 piezas de dominó ocupando *todo* el tablero, de manera tal que no quede ninguna línea de fractura dibujada."

Nos tomó a todos por sorpresa, y nos entretuvimos un largo rato tratando de ver si se podía (o no). Finalmente, María Marta encontró una forma de pensar el problema que nos dio la respuesta. Antes que yo la escriba, ¿no quiere dedicarle un rato usted?

Solución

María Marta tomó el tablero, lo vació y nos dijo a todos muy convencida:

“No es posible. Fíjense por qué no se va a poder. Cuando intenten cubrir el tablero con las 18 fichas, inexorablemente va a aparecer por lo menos una línea de *fractura*”.

Tomó una ficha y *cortó* la primera línea del tablero. Es decir, la puso en forma vertical ‘cortando’ la horizontal. Si usted cuenta, advertirá que hay cinco líneas horizontales. Por lo tanto, María Marta usó cinco fichas para cortar cada una.

Por supuesto, usted estará pensando que quedan aún las cinco líneas verticales. Y tiene razón. Entonces tomó otras cinco fichas, y cruzó las cinco verticales. Hasta acá, entre horizontales y verticales necesitó usar diez fichas.

Parecía que íbamos bien, porque en total disponemos de dieciocho piezas, pero allí fue donde María Marta nos hizo ver un problema que no habíamos advertido: ¡no alcanza con una sola pieza para interrumpir cada línea!: si hay una ficha interrumpiendo una línea, entonces *tiene que haber (por lo menos) otra ficha* interrumpiendo la misma línea en otra parte del tablero.

Esto nos sorprendió a todos. ¿Por qué? ¿Por qué tiene que pasar que cada vez que uno utiliza una ficha para cortar una línea entonces necesitará usar otra para cortar la misma línea en otra parte? No parece intuitivo por lo menos. Allí fue donde María Marta nos explicó lo siguiente:

“Fíjense que cada línea que tiene el tablero (sea horizontal o vertical) lo divide en dos partes. Cada sección en la que queda dividido el tablero tiene una cantidad *par* de casillas (porque es múltiplo de seis). Fíjense en la figura (y nos mostró la figura 2) en donde la flecha marca —a modo de ejemplo— cómo el tablero queda dividido en dos zonas: gris y blanca, y ambas tienen una cantidad par de casillas."

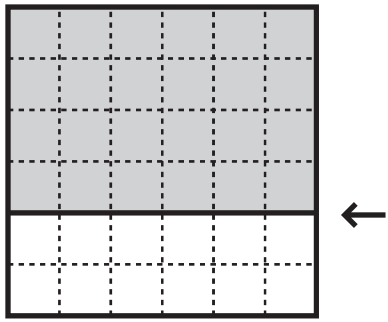


Fig. 2

"Ahora", siguió María Marta, "agrego la pieza que debería servir para interrumpir la línea de *fractura*." (Ver figura 3.) "Mi objetivo es interrumpir todas las líneas, verticales u horizontales, en particular ésta."

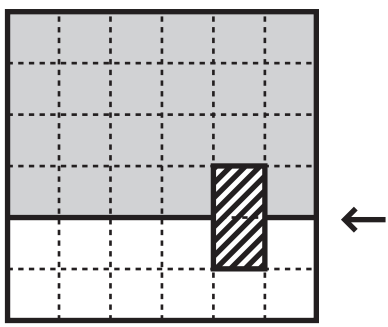


Fig. 3

Pero ahora, las partes gris y blanca del tablero se quedaron con una cantidad *impar* de casillas, ya que esta pieza que interrumpe la línea de fractura le quita una casilla a cada una.

Como ahora las partes gris y blanca tienen una cantidad impar de casillas, eso quiere decir que ni una ni otra pueden ser cubiertas aisladamente con fichas de dominó de (2 × 1) (ya que cada ficha cubre exactamente dos casillas, que es un número par). Haga lo que haga con las restantes 17 piezas resultantes, *tiene que aparecer alguna segunda pieza —por lo menos— que interrumpa la misma línea de fractura sobre la que estamos operando.*

A partir de allí, ya nos convencimos todos. Evitar *cada* línea de fractura *exige* (por lo menos) dos fichas y como en total hay 10 líneas, harían falta 20 fichas, y solamente tenemos 18.

Creo que fue Claudio el que dijo: "¿Y no podría ser que una ficha sirviera para evitar dos líneas al mismo tiempo?".

Nos quedamos mirándolo porque era una pregunta muy pertinente: si se pudiera usar una ficha para *romper dos líneas* al mismo tiempo, entonces podría ser que con 18 fichas alcanzara. Pero fue el propio Claudio quien advirtió que eso no sería posible, ya que como las fichas son de (1 × 2) o de (2 × 1), *siempre* cortan o bien *una* línea horizontal o bien *una* línea horizontal.

De esta forma, con la cooperación de todo el equipo de *Alterados por PI*, terminamos de preparar un problema que habríamos de plantear al día siguiente en una de las escuelas públicas de la Argentina.

Los números felices

Es curioso denominar así a algunos números y la definición parece *caprichosa*. Sin embargo, creo que va a servir como una suerte de entretenimiento (y no otra cosa).

Me explico. Sígame con estos cálculos.

Tomo el número 4.599.

Calculo los cuadrados de cada uno de sus dígitos:

$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$9^2 = 81$

Y sumo los resultados,

$$16 + 25 + 81 + 81 = 203$$

Ahora repito el procedimiento. Calculo los cuadrados de los dígitos del número 203:

$2^2 = 4$
$3^2 = 9$,

y una vez más, sumo los resultados,

$$4 + 9 = 13.$$

De nuevo, calculo los cuadrados de los dígitos que aparecen en el número 13.

$$1^2 = 1$$
$$3^2 = 9$$

Los sumo,

$$1 + 9 = 10$$

Y ahora sí, llegué al final. Fíjese por qué.

Repito el procedimiento: calculo los cuadrados de 1 y 0, que en este caso resultan ser 1 y 0. Cuando los sumo, llego al número *uno*.

Y ése es el final, porque si volviera a calcular el cuadrado del dígito *uno*, el resultado sería siempre *uno*.

Este ejemplo lo incluí porque me permite ahora *sugerir* la definición de un número *feliz*.

Cuando uno toma un número natural cualquiera, calcula los cuadrados de los dígitos, los suma, y repite el proceso con el resultado, una y otra vez; si en algún momento del proceso se llega hasta el número *uno*, entonces el número se llama "*número feliz*".

Un ejemplo, entonces, es el número 4.599.

Aquí quiero hacer una observación. Se me ocurrió incluir este segmento en el libro porque creo que debería ser una fuente de preguntas. Ninguna de ellas es *importante*. Ninguna de ellas (me estoy refiriendo a las que puedan aparecer sobre los números *felices*) parece tener una implicancia posterior que amerite dedicarle mucho esfuerzo o mucho tiempo.

Sin embargo, creo que *jugando* con este tipo de problemas es que uno se entrena aunque más no sea en el *deporte de plantearse preguntas*, que no es poca cosa. Saber hacer las preguntas pertinentes es una gran ventaja cuando uno necesita avanzar en la vida. Por supuesto, después habrá que contestar las tales preguntas, pero si uno sabe bien qué necesita preguntar, si está educado y entrenado en ese sentido, creo que está mejor preparado para elaborar estrategias que le sirvan en su vida cotidiana y para resolver cualquier problema que tenga por delante.

Ahora sí, acá va esta suerte de *juego abierto*. La/lo invito a que usted mismo se haga preguntas y se predisponga a *jugar* con los resultados; sobre todo, que trate de encontrar patrones, de buscar conclusiones, aunque sean modestas, no tiene importancia.

Una cosa más: a los números que *no son felices*, los voy a llamar *tristes*.

Algunos ejemplos:

a) 100 es un número feliz, ya que si uno calcula los cuadrados de los dígitos y lo suma, se obtiene el 1.
b) 68 es feliz también, ya que $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ y luego, como ya sabemos que 100 es feliz, listo.
c) Veamos qué sucede con 32: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$. Luego, $1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$ y desde acá, está claro que en el próximo paso llego al número *uno*. Luego, el número 32 es feliz.
d) ¿Qué pasa con el 94? Veamos: $9^2 + 4^2 = 81 + 16 = 97$. Luego $9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 130$. De acá, $1^2 + 3^2 + 0^2 = 1 + 9 = 10$, y ya sabemos que desde el 10 en adelante, en el próximo

paso se llega a *uno*, y termina el proceso. Conclusión: el número 94 *es un número feliz*.

Una primera conclusión: usted advierte que en el camino de descubrir que el número 94 es un número feliz, hemos descubierto que 97 *también* es feliz. O sea, a partir de uno que sea feliz, *todos los que están encadenados o ligados con él*, también lo son. En este caso, empezando con el 94, pasamos por el 97, luego el 130 y de allí al 10. Por lo tanto, estos cuatro números (94, 97, 130 y 10) son todos felices.

En realidad, yo debería detenerme ahora e invitarla/lo para que avance en soledad con las preguntas que se le ocurran y sin esperar que las respuestas aparezcan escritas acá.

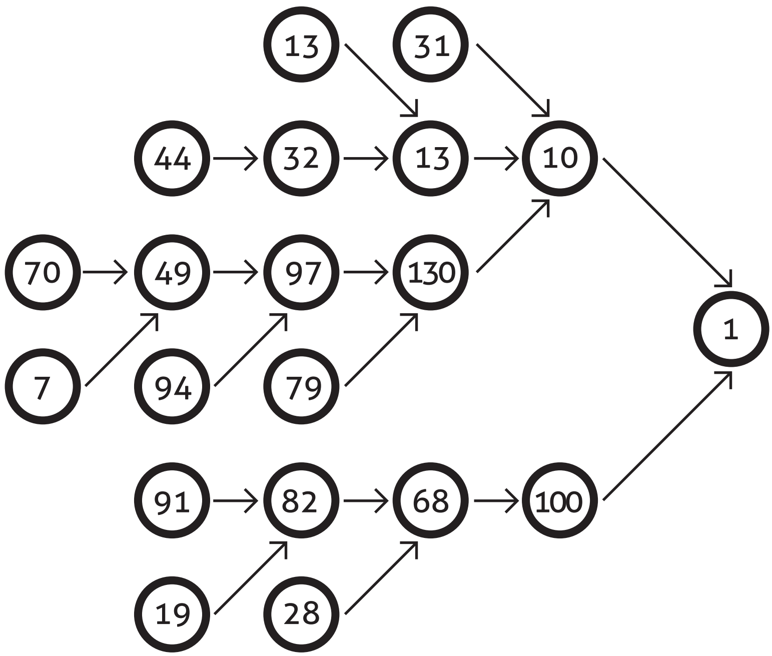
De todas formas, algo más para pensar (que quizás, y espero que así sea, se le haya ocurrido ya a usted). Fíjese que si el número 94 es feliz, entonces el número 49 también tiene que ser feliz (¿por qué?). Es que los dígitos del número 94 y 49 son los mismos. Luego, cuando calcule los cuadrados y los sume, el resultado será el mismo. Por lo tanto, si uno de los dos es *feliz*, el otro también.

Algo más: ya sabemos que 94 es feliz. ¿Qué pasará con el número 904? ¿Y con el 940? ¿O incluso con el 90400?

Como usted advierte, agregar un cero (o varios ceros) no va a modificar el resultado cuando calcule los cuadrados de los dígitos y los sume porque, en definitiva, estoy sumando *cero*.

Luego, uno podría concluir que si un número es feliz, cualquier número que uno obtenga agregando cualquier cantidad finita de ceros, será feliz también.

Aquí le propongo que usted haga algunas cuentas para descubrir cuántos números felices hay entre 1 y 100. Yo dibujaré un diagrama con todos los que hay, y la forma en la que están ligados, pero usted haga *su propio diagrama*, no mire lo que sigue. ¿Qué gracia tendría? En todo caso, use los resultados que figuran para corroborar que los que descubrió son *todos* los que hay.



Algunas observaciones que juzgará si le son o no útiles. Son observaciones mías y, por lo tanto, pueden estar totalmente alejadas de los resultados y/o patrones que obtuvo usted.

1) Para encontrar números felices, uno puede usar el sistema de 'prueba y error', intentando manualmente, y observar los resultados.
2) Otra forma es yendo 'hacia atrás' y empezando en un número *feliz* y buscando un conjunto de dígitos tal que la suma de sus cuadrados permita llegar al número de partida. Por ejemplo, el número 176 es un número *feliz*. Y en

este caso: $9^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 176$. Luego, *cualquier número* que tenga exactamente estos seis dígitos (y por supuesto uno puede agregar tantos ceros como quiera) será un número feliz. Vaya como ejemplo el número 19081520.

3) Cualquier permutación de los dígitos de un número feliz genera *otro* número feliz.

Por último, los números *tristes* no tienen un punto final (el equivalente del número *uno* en el caso de los felices), pero en general, suelen *viajar indefinidamente* paseándose por el mismo ciclo de ocho números: (4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20) y vuelta hasta el 4.

Como ejemplo, empiece en el 1.276.

La lista que continúa está formada por: (1.276, 90, 81, 65, 61, 37...) y una vez que uno llegó al 37, entra en un ciclo que incluye a estos ocho números: (37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16). Es decir, una vez que uno *ingresa* en el mundo de cualquiera de estos ocho números, queda *entrampado allí*.

Índice