RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Introducción

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

Antes de abordar la resolución de problemas matemáticos es necesario delimitar qué es lo que entendemos por problema.

Un problema es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y hay que poner a punto relaciones nuevas.

Pautas a seguir en la resolución de problemas

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Pero de ahí no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: la única manera de resolver un problema sea por "ideas luminosas", que se tienen o no se tienen.

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los, procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Es ya clásica, y bien conocida, la formulación que hizo Polya (1945) de las cuatro fases esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. <u>COMPRENDER EL PROBLEMA</u>. Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Entender el problema que se tiene que abordar es la tarea más difícil, resulta por ello de gran importancia orientar a los alumnos en el proceso.

    - Se debe leer el enunciado despacio.
    - ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
    - ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)
    - Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
    - Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

2. TRAZAR UN PLAN PARA RESOLVERLO. Hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

   - ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
   - ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
   - Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
   - Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
   - ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN. También hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

   - Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
   - ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
   - Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?
   - Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.
   - Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. COMPROBAR LOS RESULTADOS. Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

   - Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
   - Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
   - ¿Se puede comprobar la solución?
   - ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
   - ¿Se puede hallar alguna otra solución?
   - Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
   - Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.

Hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas: se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por lo tanto hay que enseñar también a los alumnos a utilizar los instrumentos que conozca, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo, que es donde parece que se sitúa la diferencia entre quienes resuelven bien problemas y los demás.

Para terminar sólo queremos hacer dos consideraciones. La primera hace referencia a que el contexto en el que se sitúen los problemas, que por parte de los profesores se tienden a considerar como irrelevante o, al menos como poco significativo, tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los alumnos. La segunda, que parece una perogrullada, es que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no sólo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío. Luego, hay que hacer cuantos esfuerzos sean precisos para que la resolución de problemas sea el núcleo central de la enseñanza matemática.

DESARROLLO DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Si consideramos un problema como una situación que se presenta en la que se sabe más o menos, o con toda claridad, a dónde se quiere ir, pero no se sabe cómo; entonces resolver un problema es precisamente aclarar dicha situación y encontrar algún camino adecuado que lleve a la meta.

A veces no sabremos si la herramienta adecuada para la situación está entre la colección de técnicas que dominamos o ni siquiera si se ha creado una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver el problema. Esta es precisamente la circunstancia del investigador, en matemáticas y en cualquier otro campo, y, por otra parte, ésta es la situación en la que nos encontramos a veces en nuestra vida normal.

La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, enfrentándose con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, observando los modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y procurando ajustar adecuadamente los procesos de pensamiento a los de ellos. Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música, etc.

Texto extraído de: *Resolución de problemas.* http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/prob_int.htm

Las estrategias que vamos a desarrollar a continuación son:

- **A.** Empezar por lo fácil
- **B.** Hacer experimentos, observar, busca pautas, regularidades ... Hacer conjeturas
- **C.** Dibujar una figura, un esquema, un diagrama
- **D.** Ensayo- error
- **E.** Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada..
- **F.** Buscar un problema semejante
- **G.** Supongamos el problema resuelto
- **H.** Inducción

Para cada una de ellas elegimos un problema representativo en cuya resolución utilicemos la estrategia que queremos ilustrar, si bien se observará que en la mayoría de los problemas no se emplea sólo una sino una combinación de varias.

A. EMPEZAR POR LO FÁCIL

A veces un problema nos puede resultar inabordable por presenta demasiados elementos que lo hacen complicado y difícil. Podemos empezar resolviendo el problema con menos elementos, partes del mismo o un problema parecido más sencillo. Luego ya abordaremos el problema en toda su complejidad.

Estas simplificaciones o aproximaciones más simples del problema facilitan la manipulación de los elementos que intervienen, hacen que aparezcan más nítidas ideas o vías de solución que en el problema visto en toda su complejidad y sobre todo el éxito en las resoluciones parciales del mismo nos anima a seguir en el intento.

Veámoslo en un caso concreto.

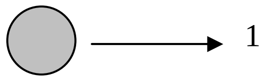
BALAS DE CAÑÓN

En la época en que los cañones lanzaban balas, éstas eran almacenadas en parques de artillería en forma de pirámides de base cuadrada; cada lado del cuadrado de la base contaba con 15 balas.
¿Cuál era el número de balas por pirámide?

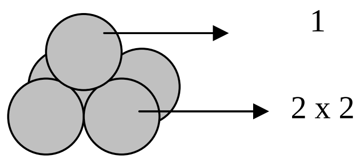
BALBUENA, L. y COBA; D. DE LA. *Matemática recreativa vista por los alumnos.* Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L. 1992

Resolución:
La dificultad inicial parece grande y el tamaño de la pirámide excesivo. Si fuera más pequeña parece que sería más fácil. Podemos tratar de simplificar buscando primero cuántas balas hay en pirámides más pequeñas. Manos a la obra.

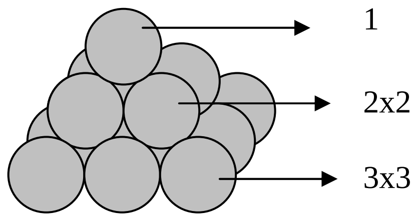
En una pirámide de base 1 tenemos sólo una bala



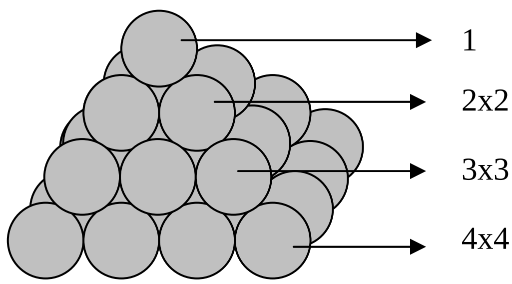
En una pirámide de base 2 tenemos las cuatro de la base y la del nivel superior: $2^2 + 1 = 5$ balas. Demasiado fácil.



En una pirámide de base 3 tenemos 3x3 en la base, 2x2 en el siguiente nivel y 1 en el tercero.
$3^2 + 2^2 + 1 = 14$ balas



En una pirámide de base 4 tenemos 4x4 en la base 3x3 en el primer nivel 2x2 en el segundo y 1 en el último:
$4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 30$ balas.



Ya vemos cual será la ley de formación y podemos deducir que en el caso de una pirámide de base 15 tendremos:

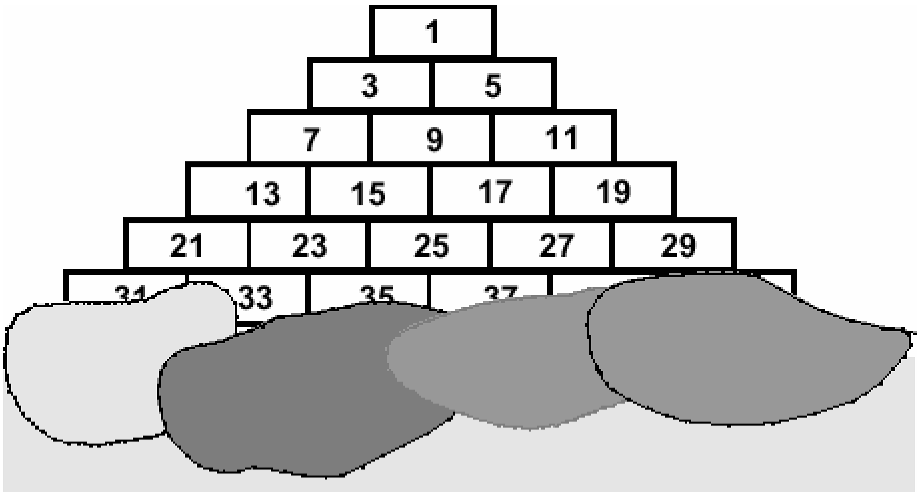
$15^2 + 14^2 + 13^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1 = 1.240$ balas

B. <u>HACER EXPERIMENTOS, OBSERVAR, BUSCA PAUTAS, REGULARIDADES ... HACER CONJETURAS.</u>

La experimentación-observación es una de las estrategias más útiles para el descubrimiento de propiedades comunes, leyes generales y reglas de formación. Es también una de las estrategias más utilizada en la resolución de problemas.

Ante un problema lo más natural es experimentar y observar. De la observación surge una regularidad, una pauta, que permite predecir la situación. Se continúa experimentando para ver hasta que punto se cumple la predicción y ponerla a prueba. Si este contraste resulta favorable el siguiente paso es demostrar que dicha predicción se cumple siempre.

LA PIRÁMIDE DE NÚMEROS



Esta pirámide de números continua bajo las nubes. La suma total de los números del primer nivel es 29.791

¿Cuántos niveles de números tiene esta pirámide?

Razona tu respuesta.

EMS Project on Reference Levels in Mathematics in Europe at age 16- Reference questions- April 19, 2001 – A. Bodin & L. Grugnetti

<u>Resolución</u>
Experimentamos con los diferentes niveles:

1					1
3	5				3 + 5 = 8
7	9	11			7 + 9 + 11 = 27
13	15	17	19		13 +15 +17 +19 = 64
21	23	25	27	29	21 +23 +25 +27 +29 = 125

Las sumas que estamos obteniendo 1, 8, 27, 64, 125, son muy reveladoras. Nos recuerdan los cubos de los primeros números naturales.:

$1 = 1^3$
$8 = 2^3$
$27 = 3^3$
$64 = 4^3$
$125 = 5^3$

Por tanto vemos que nos conviene considerar la pirámide en sentido inverso y considerar el nivel superior como el primero y el inferior como el último de esta serie.
Así tenemos:

Nivel	Suma	
1	1	1^3
2	8	2^3
3	27	3^3
4	64	4^3
5	125	5^3
.	.	.
.	.	.
.	.	.
¿?	29.791	N^3

Se trata pues de averiguar cuál es el número que da como resultado 29.791 al elevarlo al cubo. Vamos a tratar de resolverlo sin necesidad de extraer raíces.
Para ello podemos seguir experimentando, y observar como son los cubos de primeros números naturales para ver si nos dan alguna pista sobre el número buscado:

Número	Cubo	Termina en:
1	1	1
2	8	8
3	27	7
4	64	4
5	125	5
6	216	6
7	343	3
8	512	2
9	729	9
10	1000	0

Observamos que el número que buscamos tendrá que tener dos cifras y que debe acabar en 1. Luego podemos probar con 11, 21, 31, …, aunque ya podemos aventurar que será el 31. En efecto: $31^3 = 29.791$

Así pues la pirámide tiene 31 niveles.

C. DIBUJAR UNA FIGURA, UN ESQUEMA, UN DIAGRAMA.

En la resolución de problemas es de gran utilidad hacer un dibujo, esquema o diagrama que integre todos los elementos que intervienen la situación problemática ya que resulta mucho más fácil pensar con la ayuda de las imágenes que con números, símbolos o palabras exclusivamente.

Un buen gráfico que recoja e integre la información, puede hacer que afloren visualmente relaciones entre los elementos del problema que habían pasado desapercibidas y que pueden ayudar a clarificar la situación. De ahí que sea muy recomendable apoyarse en un esquema, un dibujo, un gráfico o una representación visual del problema que recoja lo esencial del mismo sin datos superfluos que dificulten la comprensión.

Veámoslo con el siguiente problema.

LOS ÁRBOLES DEL PARQUE

> La tercera parte de los árboles de un parque son robles. Dos quintos de los mismos son alcornoques y el resto son 12 árboles de distintas especies. ¿Cuántos árboles hay en el parque?

Resolución

Representamos todos los árboles del parque con un rectángulo.

Dividimos el parque (rectángulo) en tres partes (en horizontal) y en cinco partes (en vertical)

Sombreamos 1/3 que representa parte ocupada por los robles

Sombreamos 2/5 que representa la parte ocupada por alcornoques

Podemos observar que 1/3 son 5 de estas casillas las cuales están ocupadas por robles y que 2/5 son 6 casillas y en ellas hay alcornoques. Rellenando las ocupadas por unos y otros queda:

Robles	Robles	Robles	Robles	Robles
Alcornoques	Alcornoques	Alcornoques	12	
Alcornoques	Alcornoques	Alcornoques		

La superficie restante está ocupada por 12 árboles de diferentes especies. Por lo tanto en cada casilla habrá 3 árboles

Robles	Robles	Robles	Robles	Robles
Alcornoques	Alcornoques	Alcornoques	3	3
Alcornoques	Alcornoques	Alcornoques	3	3

Y en total en el parque habrá 3 x 15 = 45 árboles.

D. <u>ENSAYO- ERROR</u>

La técnica de ensayo y error, muy útil en la resolución de problemas, consiste en llevar a cabo los siguientes pasos:

- Elegir un valor posible
- Imponer a ese valor las condiciones dadas en el problema
- Probar si se ha alcanzado el objetivo esperado.

Si el resultado no es le esperado se repite todo el proceso con otro valor, y así sucesivamente, hasta alcanzar el objetivo deseado.

Cuando se trabaja con esta estrategia conviene contrastar cada ensayo para ver si el resultado nos acerca o nos aleja más del objetivo buscado.

LAS EDADES DE PADRE E HIJO

Un padre y su hijo tienen en conjunto 55 años. Su edad respectiva está compuesta por las 2 mismas cifras pero colocadas al revés. ¿Cuáles son esas cifras?

BALBUENA, L. y COBA; D. DE LA. *Matemática recreativa vista por los alumnos.* Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L. 1992

<u>Resolución</u>

El problema se puede resolver probando con parejas de números que verifiquen las condiciones del problema.

Para proceder de manera sistemática y exhaustiva en la búsqueda de soluciones conviene organizar los posibles ensayos o tanteos en forma de tablas como la que sigue y es fundamental analizar las soluciones y descartar las que no sean lógicas.

Edad del padre	Edad del hijo	Suma	¿es posible?
11	11	22	…
21	12	33	…
31	13	44	…
41	14	55	SI
…	…	…	…
22	22	44	…
32	23	55	NO
…	…	…	…
50	05	55	SI

Evidentemente el problema puede resolverse también por métodos algebraicos.

Sea P la edad del padre y H la edad del hijo. Si "x" e "y" son las dos cifras de las que se componen ambas edades, se tiene que $P= 10x + y$ mientras que $H= 10y + x$

$$P + H = 55$$
$$10x+ y + 10y + x = 55$$
$$11(x + y) = 55$$
$$x + y = 5$$

Luego las posibles respuestas son:

P	H
50	05
41	14
32	23

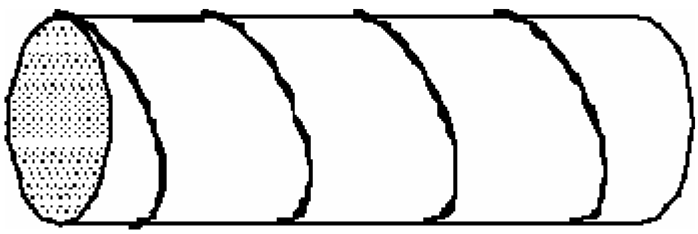
Sin embargo la tercera respuesta no sería una solución posible.

E. ESCOGER UN LENGUAJE ADECUADO, UNA NOTACIÓN APROPIADA

Muchas veces un problema resulta terriblemente difícil si lo enfocamos de manera equivocada. A menudo que seamos o no capaces de resolver un problema depende fundamentalmente de que el lenguaje elegido sea o no el apropiado, resultando que un determinado lenguaje puede ser muy útil en ciertas circunstancias y totalmente impotente en otras.
Un mismo problema se puede abordar con diferentes estilos de pensamiento, algunos más efectivos que otros. Por ello antes de empezar a trabajar en el problema debemos preguntarnos si se adapta mejor a un lenguaje algebraico, geométrico, analítico, etc.
En un lenguaje geométrico debemos buscar la simplicidad, la sencillez, la simetría,…En un lenguaje algebraico debemos elegir cuidadosamente la notación que emplearemos de manera que refleje de la manera más intuitiva, cómoda y manejable posible los datos del problema y sus relaciones. Si utilizamos un diagrama, un gráfico o un esquema procuraremos que recoja lo esencial del problema sin elementos superfluos que dificulten la comprensión del mismo.

LA CUERDA

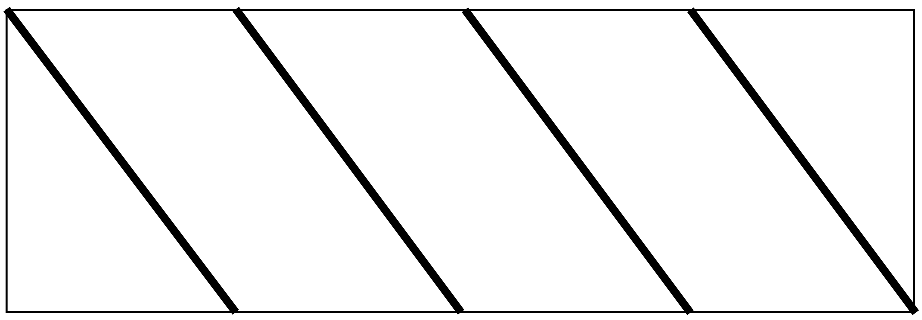
Se enrolla simétricamente una cuerda alrededor de una barra circular. La cuerda da exactamente 4 vueltas alrededor de la barra. La circunferencia de la barra mide 4 cm y su longitud es de 12cm. Calcula la longitud de la cuerda.



EMS Project on Reference Levels in Mathematics in Europe at age 16- Reference questions- April 19, 2001 – A. Bodin & L. Grugnetti

Resolución

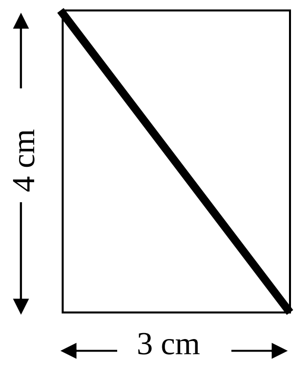
El problema es muy sencillo si cortamos longitudinalmente la barra y reparamos en la simetría de la figura



Así la longitud de una vuelta es la diagonal de ese rectángulo, por tanto :

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Luego la longitud de la cuerda será de 20 cm



LOS DISCOS

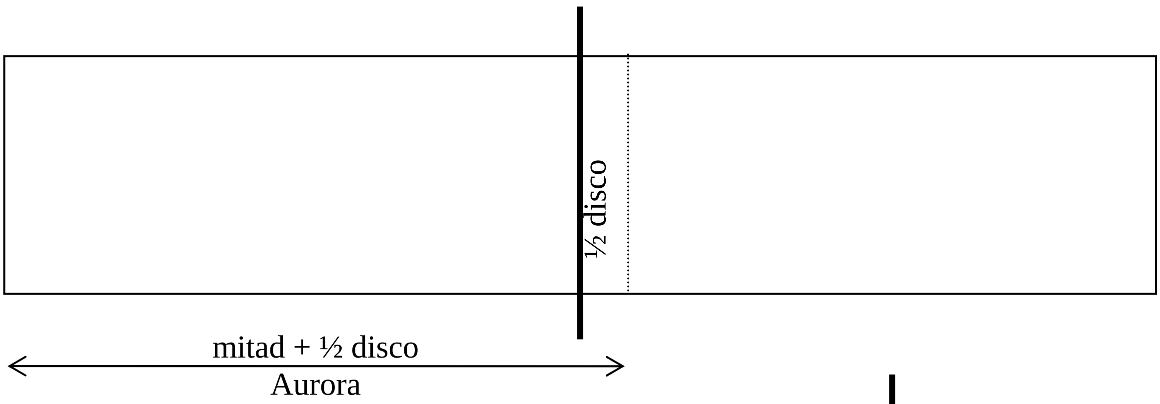
Un buen día Mar y Roberto pasan delante de una tienda de discos.
Roberto: Oye, Mar, guardas todavía los discos de “rock”?
Mar: Pues no. Le regalé la mitad más la mitad de un disco, a mi amiga Aurora.
Mar: Y después, le presté la mitad de los restantes, más la mitad de un disco a Miguel.
Mar: Así que ahora solamente me queda un disco. Y estoy dispuesta a regalártelo si eres capaz de averiguar cuántos discos tenía yo al principio.
Roberto estaba desconcertado. No atinaba a ver para que puede servir medio disco.
Pronto se le ocurrió una idea. Y se dio cuente de que Mar no tuvo necesidad de partir ningún disco. Consiguió resolver el problema y Mar le regaló el disco prometido.

Gadner, M.: *¡aja! Inspiración ¡aja!,* Barcelona, Labor, 1985

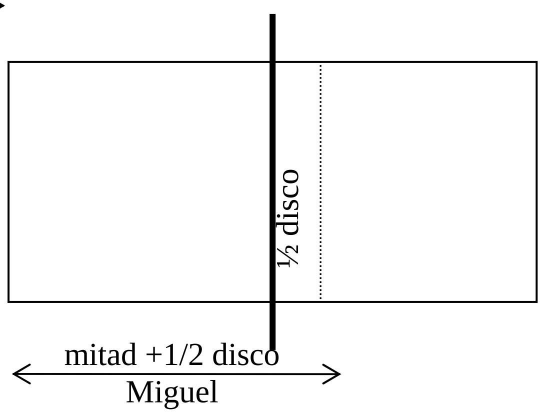
<u>Resolución:</u>
La idea clave está en darse cuenta de que la mitad de un número impar de discos, más medio disco, es un número entero.
El problema puede resolverse por el método de seguir el proceso a la inversa o “marcha atrás”. Una representación gráfica del mismo facilita la resolución.

Supongamos que el rectángulo representa el total de discos.

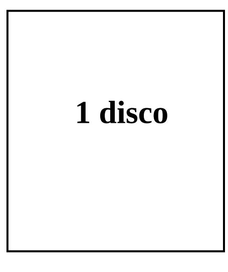
Aurora recibe la mitad, más medio disco; que lo representamos así:



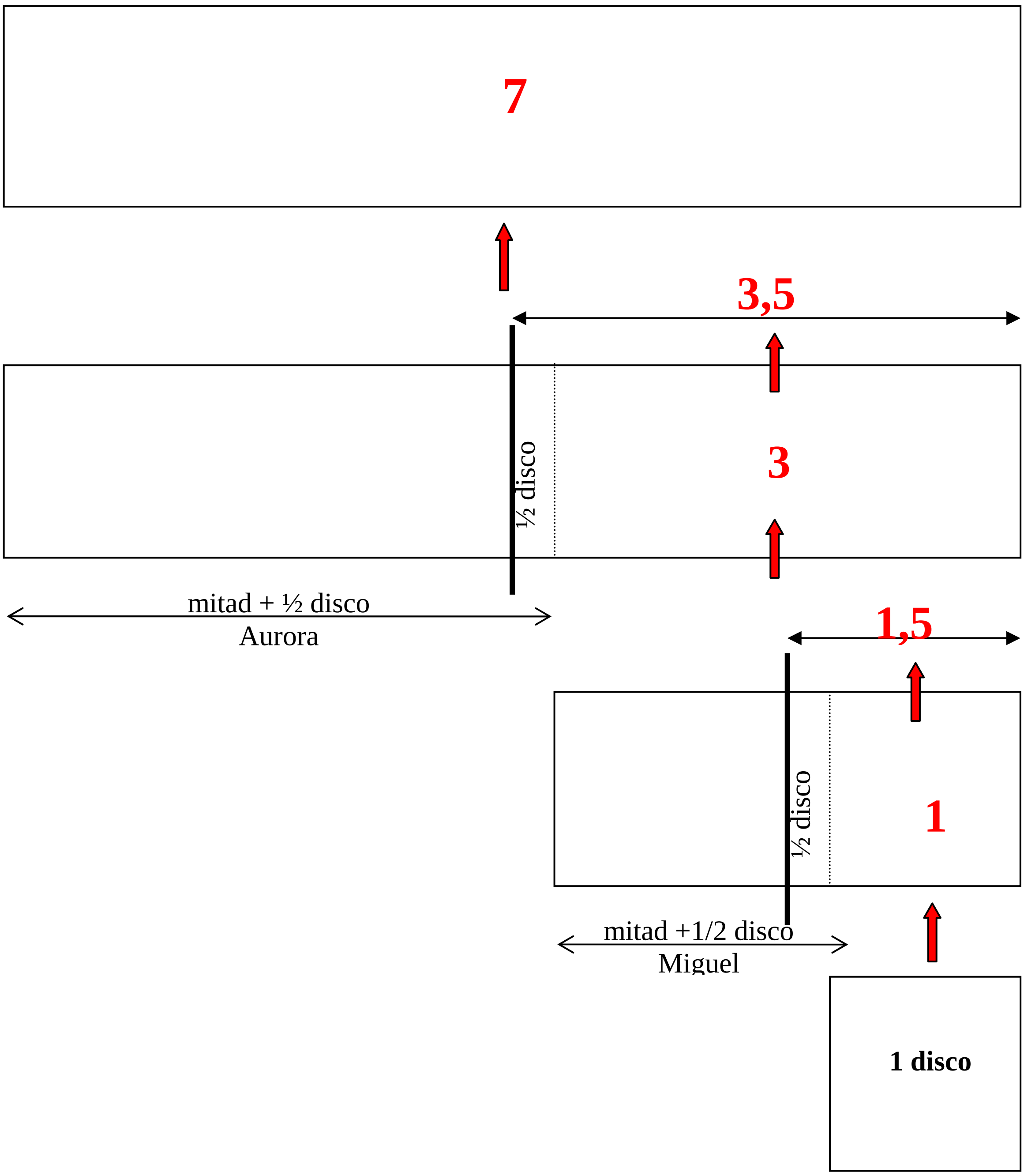
Miguel recibe la mitad de lo que queda, más otro medio disco.



Así que el trozo que queda representa el disco restante



Ahora sólo queda ir para atrás para resolverlo y seguir las flechas rojas



Como es evidente el problema puede resolverse también por métodos algebraicos. Formular y resolver la ecuación correspondiente es un buen ejercicio de álgebra . Llama la atención que un problema de solución tan sencilla pueda originar una ecuación tan complicada como ésta.

$$x - (x/2 + 1/2) - \left[\frac{x - (x/2 + 1/2)}{2} + 1/2\right] = 1$$

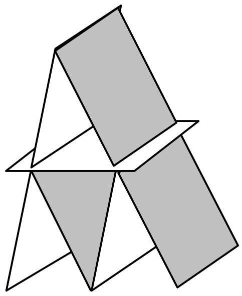
F. BUSCA UN PROBLEMA SEMEJANTE.

A medida que se va adquiriendo una cierta experiencia en la resolución de problemas es probable que se pueda encontrar una situación parecida a la del problema que se propone.

El recordar problemas parecidos es útil porque proporciona la sensación de estar en terreno conocido y nos ayuda a afrontar el problema con mayor confianza.

EL CASTILLO DE NAIPES

En la figura tienes un castillo de naipes de dos pisos. Han sido necesarias 7 cartas para formarlo.



¿Cuántas cartas serán necesarias para hacer un castillo similar de 15 pisos de altura?

GONZÁLEZ. G.. LLORENTE. J. Y RUIZ. Mº J.: *Matemáticas 1*. Madrid. Editex S.A. 1995

Resolución

La sola lectura del problema nos recuerda al de las balas de cañón y nos invita a proceder de idéntica forma analizando las cartas necesarias para construir castillos de 1, 2, 3, 4, 5, …pisos.

Nº de pisos	Cartas necesarias
1	2
2	7
3	15
4	26
5	40
…	
15	¿?

Tratemos de encontrar alguna relación entre los resultados que vamos obteniendo. Observamos que cada cuando añadimos un nuevo piso al castillo necesitamos además de las cartas necesarias para construir el nuevo piso, todas las de los anteriores. Esto sugiere que relacionemos cada uno de los resultados que hemos obtenido con el anterior.

Nº de pisos	Cartas necesarias
1	2= 0 +2
2	7= 2 +5
3	15= 7 +8
4	26= 15 +11
5	40 = 26 +14
…	
15	$C_{15} = C_{14} + \square$

Observamos que a la cantidad anterior le vamos añadiendo 2, 5, 8,.11,.14,…pero además la disposición de los mismos nos sugiere que sumemos a ambos lados de la igualdad de esta forma:

Cartas necesarias

$\cancel{2} = 0 + 2$
$\cancel{7} = \cancel{2} + 5$
$\cancel{15} = \cancel{7} + 8$
$\cancel{26} = \cancel{15} + 11$
$\cancel{40} = \cancel{26} + 14$
…
…
$\cancel{C}_{14} = \cancel{C}_{13} + ..$

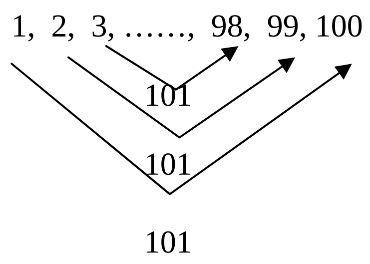
$C_{15} = \cancel{C}_{14} + \square$

Luego $C_{15} = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + \square$
Esta es la suma de 15 términos de una progresión aritmética de diferencia 3. Sólo falta calcular el último término y la suma resultante.
No obstante si no se quiere recurrir a las progresiones se ve que $\square = 15.2 + 14 = 44$ (sin más que observar las cartas necesarias para añadir el piso 15) y para calcular la suma de todos ellos procedemos sumando dos veces la serie en su orden natural y en orden inverso, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} 2 + \ 5 + \ 8 + \ldots + 38 + 41 + 44 \\ 44 + 41 + 38 + \ldots + \ 8 + \ 5 + \ 2 \\ \hline 46 + 46 + 46 + \ldots + 46 + 46 + 46 \end{array}$$

Luego 46.15= 690 es dos veces la suma . El resultado pedido será ½ de 690 es decir 345

De nuevo aquí ha sido muy útil recordar lo que hizo Gauss cuando le propusieron que sumara todos los números del 1 al 100 y tras observar que 1+100= 2+99=+3+98=…multiplicó 101 por 50 para obtener el resultado.



G. <u>SUPONGAMOS EL PROBLEMA RESUELTO</u>

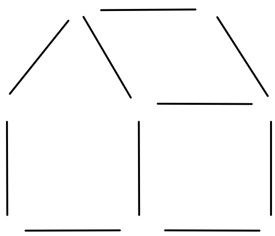
Imaginar el problema resuelto facilita la resolución del problema, ya que la visión de lo que buscamos arroja una luz sobre el camino que debemos recorrer para pasar del punto de partida al punto de llegada.

Este método es muy útil en algunos de los clásicos problemas de cerillas.

También es muy utilizado en álgebra. Se pide calcular un número y se dan una serie de condiciones que debe satisfacer dicho número. Se lo supone conocido y se le llama x . Se le imponen las condiciones que ha de cumplir, resultando una ecuación en x, que resuelve y se obtiene el número pedido.

LA CASA

Se ha construido una casa utilizando cerillas como se indica

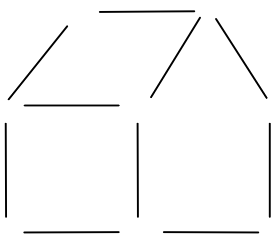


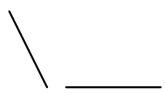
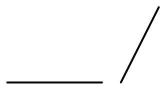
Cambia en ella la posición de dos cerillas para que aparezca la casa del otro costado

GUZMÁN, M. DE: *Para pensar mejor*, Barcelona, Labor, 1991

<u>Resolución</u>

Queremos llegar a:



Al observar ambas casas juntas se ve que el perímetro es el mismo y sólo con  cambiar por 

UN LÍMITE CURIOSO

¿Cuánto vale $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$?

GUZMÁN, M. DE: *Para pensar mejor*, Barcelona, Labor, 1991

Resolución

Sea x ese número. Entonces $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ = x pero también se tendrá $\sqrt{1+x}$ = x

Se trata de resolver la ecuación de segundo grado 1 + x = x^2 con lo que se obtiene que

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

H. INDUCCIÓN

La inducción matemática es uno de las métodos de demostración más frecuentemente utilizado en matemáticas. Se aplica a menudo cuando se trata de demostrar una determinada propiedad, fórmula o regla.

Para ilustrar lo que es la inducción podemos imaginar un montón de fichas de dominó de pie, dispuestas en fila. Para que con un golpe se caigan todas tenemos que asegurarnos sólo de dos cosas: de que se caiga la primera y de que si cae una caiga también la siguiente.

Al igual que con las fichas de dominó, para demostrar una propiedad la cumplen una serie de elementos, bastará con asegurar dos cosas:

1. Que el primero de ellos la cumple.
2. Que si *h* cumple la propiedad entonces también *h+1* la cumple

Veámoslo con el siguiente ejemplo.

SUMA DE NÚMEROS IMPARES

Demostrar que la suma de *n* primeros números impares es n^2, es decir que:

$$1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2n-1) = n^2$$

Resolución

Para demostrar esta propiedad de los *n* primeros números impares, aplicando el método de inducción tenemos que probar que:

1. el primero de ellos la cumple, es decir que cuando *n* =1 se cumple la propiedad
2. que si la cumplen los *h* primeros también la cumplen los *h+1* impares primeros, es decir que si es cierta cuando *n = h* también la es para *n= h+1*

1. Veamos el caso *n* =1

Para *n* =1 la expresión anterior queda: 1= 1^2 que evidentemente es cierta. Por tanto la propiedad que queremos demostrar es cierta cuando *n* =1.

2. Veamos ahora que si es cierta cuando *n=h* también la es para *n= h+1*

Si la propiedad es cierta para *n = h* se tiene que

$$1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2h-1) = h^2$$

Queremos probar que la propiedad es también cierta para *n = h + 1*, es decir queremos demostrar que si añadimos a la suma anterior el siguiente número impar entonces la suma dará como resultado $(h+1)^2$. Dicho de otra forma que:

$$1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2h-1)+ (2h+1) = (h+1)^2$$

Pero como sabemos que $1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2h-1) = h^2$ se tiene:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2h-1)}_{h^2} + (2h+1) \overset{?}{=} (h+1)^2$$

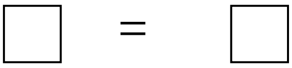
Luego queda:

$$h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2$$

Igualdad que evidentemente se cumple. Luego queda demostrada la propiedad

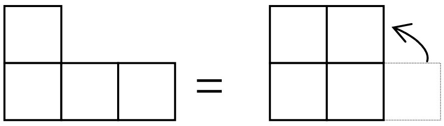
Veámoslo también de forma gráfica. Representamos cada número con los correspondientes cuadraditos.

Para n= 1 vemos que es cierta la propiedad



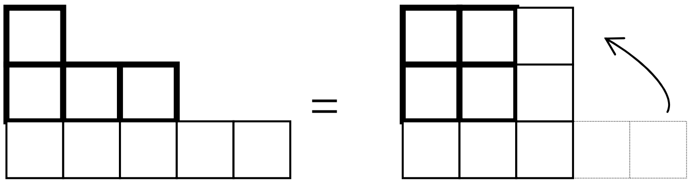
$1 = 1^2$

Para n=2 vemos que también se cumple



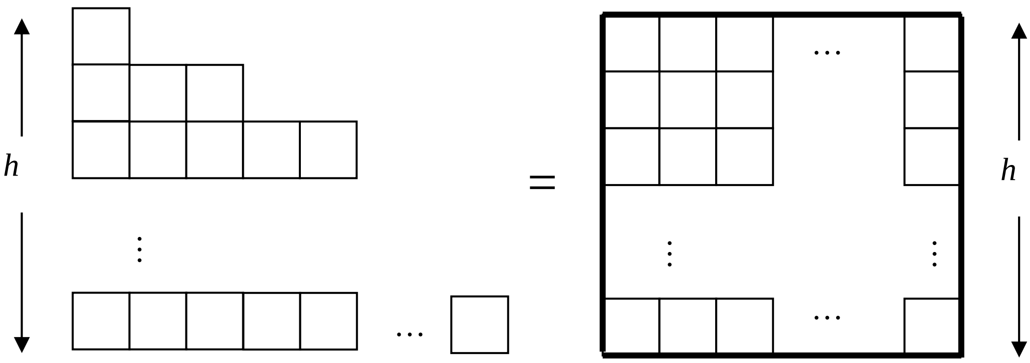
$1 + 3 = 2^2$

Para n=3 también es cierta la igualdad



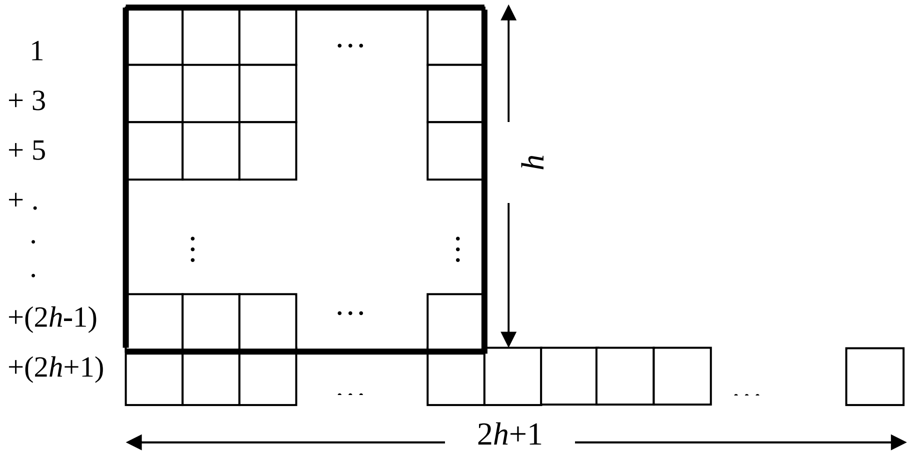
$1 + 3 + 5 = 3^2$

Supongamos que $1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2h-1) = h^2$ cuya gráficamente representa que se pueden disponer los *h* primeros números primos formando un cuadrado de lado h.:

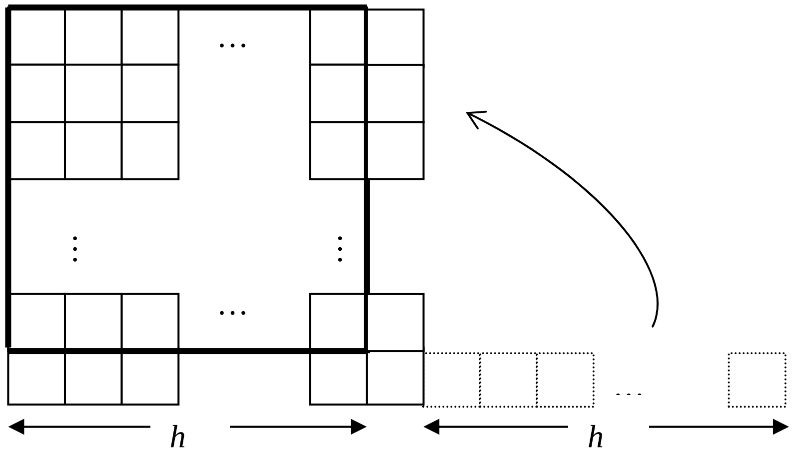


$1 + 3 + 5 + 7+ \dots + (2h-1) = h^2$

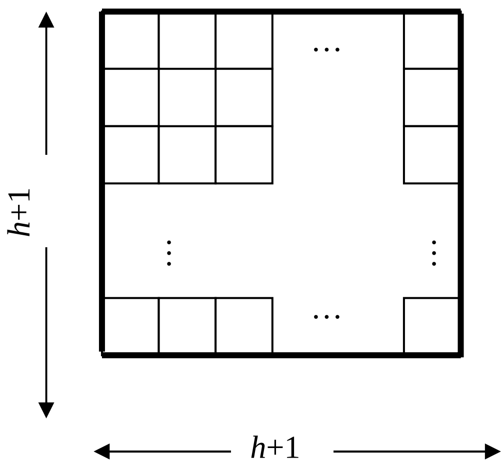
Si a esta disposición añadimos el siguiente número impar queda:



Se observa que sin más que redisponer los cuadraditos de manera que queden h en la base del cuadrado, otros h en vertical y 1 en el vértice, se completa un cuadrado de lado h +1.



Quedando probada la igualdad



$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2h+1) = (h + 1)^2$$

Aunque al aplicar inducción no son necesarios los casos n=2 y n=3 se reproducen también para ilustrar mejor el proceso de resolución gráfica.

BIBLIOGRAFÍA

GADNER, M.: *¡aja! Inspiración ¡aja!*, Barcelona, Labor, 1985

GUZMÁN, M. DE: *Para pensar mejor,* Barcelona, Labor, 1991

GONZÁLEZ, G., LLORENTE, J. Y RUIZ, Mº J.: *Matemáticas 1,* Madrid, Editex S.A. 1995

BALBUENA, L. y COBA; D. DE LA. *Matemática recreativa vista por los alumnos.* Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L. 1992