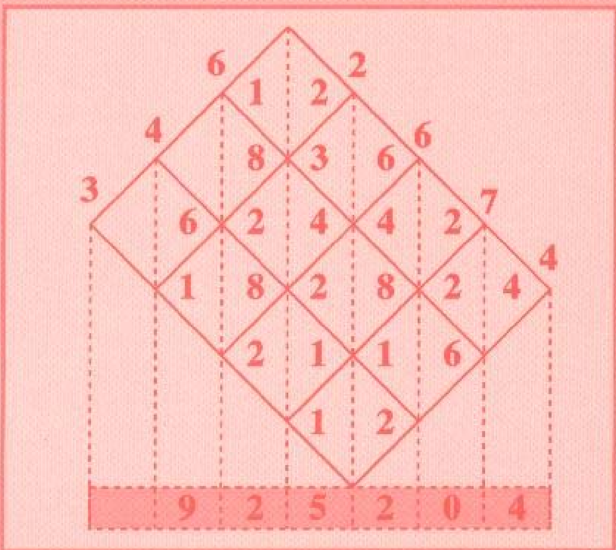
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS



MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
CENTRO DE PROFESORES Y RECURSOS
SALAMANCA

Coordinador: Jesús Escudero Martín

JESÚS ESCUDERO MARTÍN
(Profesor coordinador)

CARLOS GONZÁLEZ RODRIGO, ÁNGEL OREJA MARTÍN,
GUILLERMO CASTÁN BREZNES, JUAN JESÚS IGLESIAS RUÍZ
(Alumnos de 4º de ESO)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

CENTRO DE PROFESORES Y RECURSOS
Salamanca 1999

La serie **Documentos curriculares** del Centro de Profesores y Recursos e Salamanca pretende difundir las experiencias de los profesores con na finalidad práctica y divulgará temas de innovación educativa, investigación, desarrollo curricular y materiales didácticos.

Diseño de cubierta: Jesús Luengo

I.S.B.N.: 84-89005-25-7
Depósito Legal: S. 59-1999

Imprime: EUROPA ARTES GRÁFICAS, S.A.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

"Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa". (Proverbio chino)

"La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces". (Puig Adam, 1958)

Matemáticas es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma *"poderoso, conciso y sin ambigüedades"* (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese idioma se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo "hablen". En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios).

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo. En el caso del idioma matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de ***Resolución de Problemas***.

IDEAS, TENDENCIAS, CREENCIAS, ETC. SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

- El párrafo 243 del **Informe Cockroft** señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la *"resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria".*

- El **N.C.T.M.** de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que *"el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas".*

- En el libro de Hofsdadter, **Gödel, Escher y Bach**, se dice que *"las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones".*

- **M. de Guzmán** (1984) comenta que *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas".*

- **Santaló** (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que *"enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar* *a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas".*

- En una conferencia pronunciada en 1968 **George Polya** decía: *"Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática".*

- En España, el **currículo** del Área de Matemáticas en Primaria y Secundaria concede extraordinaria importancia al tema dedicándole mucha atención, especialmente desde los contenidos de procedimientos y actitudes.

Aunque no es sencillo, y quizás parezca superfluo, para entendernos es interesante delimitar, siquiera sea en grandes rasgos, qué es lo que entendemos por problema. Pero, como la palabra "problema" se usa en contextos diferentes y con matices diversos, haremos un esfuerzo por clarificar a qué nos referimos.

No aportan mucha claridad las definiciones de los diccionarios generales. Nos acerca más al sentido de qué es un problema la expresión de **"problema de letra"** que los alumnos emplean con frecuencia: son aquellos que hacen referencia a contextos ajenos a las matemáticas propiamente dichas, los que llevan dentro una cierta "historia", que se pueden contar. Los que abren las ventanas del aula y hacen un puente (aunque sea frágil) entre las matemáticas y la vida.

Pero no es el único aspecto a destacar. También hay que caracterizar los "problemas" por oposición a los ejercicios (algo bien conocido por los alumnos porque constituye el núcleo fundamental de su quehacer matemático).

En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar. Pero, una vez localizado, se aplica y basta. Justamente, la proliferación de ejercicios en clase de matemáticas ha desarrollado y arraigado en los alumnos un síndrome generalizado; en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una somera reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado. Ahí acaban, en general, sus elucubraciones.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; hay que relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas.

Por tanto, un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelta nos proporciona una sensación considerable de placer. E incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, también en el proceso de búsqueda, en los avances que vamos realizando, encontraremos una componente placentera.

Aunque los rasgos fundamentales de lo que entendemos por problema están descritos en el párrafo anterior, todavía creemos conveniente añadir algunos comentarios adicionales sobre los mismos:

- Los algoritmos que se suelen explicar en clase, o que aparecen en los libros de texto, resuelven grupos enteros de problemas. Lo que pasa es que si no situamos previamente los problemas a los que responden, estamos dando la respuesta antes de que exista la pregunta. Y en ese contexto no es difícil de adivinar el poco interés con que se recibe la misma.

- Las situaciones existen en la realidad. Los problemas los alumbramos nosotros. Pasan a ese estatus cuando los asumimos como un reto personal y decidimos en consecuencia dedicarle tiempo y esfuerzos a procurar resolverlos.

- La resolución de un problema añade algo a lo que ya conocíamos; nos proporciona relaciones nuevas entre lo que ya sabíamos o nos aporta otros puntos de vista de situaciones ya conocidas. Suponen el aporte de la chispa de la creatividad, aquella que aparece de cuando en cuando, y que logra, por utilizar la expresión de Koestler (1983), que dos y dos son cinco.

Resaltemos una vez más la fuerte componente de compromiso personal en los problemas, y la importancia que tiene la manera en que se nos presenten para que lo asumamos como tales. Todo ello es de particular interés en la enseñanza, porque de cómo se plantea la cuestión, el contexto en que se sitúe y de la "tecnología" expositiva utilizada depende, en un porcentaje muy importante, el que un problema pase a ser considerado como tal por nuestros alumnos.

RASGOS QUE CARACTERIZAN A LOS BUENOS PROBLEMAS.

Una vez que tenemos un problema, los hay mejores y peores, vamos a referirnos a los rasgos que caracterizan a los buenos problemas. Reseñamos y comentamos los más importantes (Grupo Cero, 1984):

1. ***No son cuestiones con trampas ni acertijos***. Es importante hacer esta distinción en la enseñanza porque los alumnos, cuando se les plantean problemas, tienden a pensar que si no hay (o al menos ellos no lo recuerdan directamente) un algoritmo para abordarlos ni se les ocurre ningún procedimiento, seguro que lo que sucede es que tiene que haber algún tipo de truco o de "magia". La práctica sistemática resolviendo problemas hace que esa percepción habitual vaya cambiando.

2. ***Pueden o no tener aplicaciones, pero el interés es por ellos mismos.*** Así como hay otras cuestiones cuya importancia proviene de que tienen un campo de aplicaciones (y sin descartar que los problemas las tengan), el interés de los problemas es por el propio proceso. Pero a pesar de ello, los buenos problemas suelen llevar a desarrollar procesos que, más tarde, se pueden aplicar a muchos otros campos.

3. ***Representan un desafío a las cualidades deseables en un matemático.*** Parece obvio para todo el mundo que existen unas cualidades que distinguen a las personas que resuelven problemas con facilidad, aunque si se tienen que señalar cuáles son, es bien dificultoso hacerlo. Y se tiende a pensar que coinciden en líneas generales con las cualidades propias de los matemáticos.

4. ***Una vez resueltos apetece proponerlos a otras personas para que a su vez intenten resolverlos.*** Pasa como con los chistes que nos gustan, que los contamos enseguida a otros, y así se van formando cadenas que explican su rápida difusión. Lo mismo sucede con los buenos problemas.

5. ***Parecen a primera vista algo abordable, no dejan bloqueado, sin capacidad de reacción.*** Y puede pasar que alguna solución parcial sea sencilla o incluso inmediata. Desde un punto de vista psicológico, sólo nos planteamos aquello que somos capaces (o al menos eso creemos) de resolver. Por eso, si un problema sólo lo es para nosotros cuando lo aceptamos como tal, difícil es que nos "embarquemos" en una aventura que nos parezca superior a nuestras fuerzas.

6. ***Proporcionan al resolverlos un tipo de placer difícil de explicar pero agradable de experimentar.*** La componente de placer es fundamental en todo desafío intelectual, si se quiere que sea asumido con gusto y de manera duradera. Incluso, en la enseñanza, la incorporación de esos factores a la práctica diaria pueden prefigurar la inclinación de los estudios futuros. Y no hay que olvidar que las matemáticas son de las materias que no dejan indiferente, se las quiere o se las odia (como aparece en múltiples estudios). Por ello más vale que introduzcamos refuerzos positivos para hacer que aumenten los que las aprecian.

PAUTAS A SEGUIR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Una vez señaladas las características de los buenos problemas, hay que referirse a la importancia que tiene resolver problemas en clase. Pensemos, que, como dice Polya (1945) *"sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento"*; pero que, si se resuelve un problema y llega a excitar nuestra curiosidad, *"este género de experiencia, a una determinada edad, puede determinar el gusto del trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, una huella que durará toda una vida"*.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Pero de ahí no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: la única manera de resolver un problema sea por "ideas luminosas", que se tienen o no se tienen.

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los, procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Es ya clásica, y bien conocida, la formulación que hizo Polya (1945) de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. Comprender el problema. Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Es más, es la tarea más difícil, por ejemplo, cuando se ha de hacer un tratamiento informático: entender cuál es el problema que tenemos que abordar, dados los diferentes lenguajes que hablan el demandante y el informático.

- Se debe leer el enunciado despacio.
- ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
- ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)
- Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

2. **Trazar un plan para resolverlo**. Hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma? [Plantear el problema de otra forma supone una mayor comprensión del enunciado y puede facilitar su resolución porque después se puede ver más sencillo.]
- Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
- Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3. **Poner en práctica el plan**. También hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

- Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto? [No se trata de hacer cálculos por hacer algo, hay que hacer cálculos que lleven a la solución]
- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace. [El expresar el proceso de resolución: a) Aumenta la comprensión del problema. b) Permite repasar o recorrer el camino desde el principio al fin. c) Ayuda a controlar la resolución del problema porque todo esta delante de quien lo resuelve. d) Facilita la valoración del profesor puesto que es posible analizar los procesos y no sólo los resultados.]
- Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. **Comprobar los resultados**. Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Se puede comprobar la solución?

- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede hallar alguna otra solución?
- Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
- Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.

Hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas: se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por lo tanto hay que enseñar también a los alumnos a utilizar los instrumentos que conozca, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo, que es donde parece que se sitúa la diferencia entre quienes resuelven bien problemas y los demás.

Dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Polya, Schoenfeld da una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que agrupa en tres fases, y que extractamos:

Análisis.

1. Trazar un diagrama.
2. Examinar casos particulares.
3. Probar a simplificar el problema.

Exploración.

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes.
2. Examinar problemas ligeramente modificados.
3. Examinar problemas ampliamente modificados.

Comprobación de la solución obtenida.

1. ¿Verifica la solución los criterios específicos siguientes?:
   - ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
   - ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
   - ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
2. ¿Verifica la solución los criterios generales siguientes?:
   - ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
   - ¿Puede quedar concretada en caso particulares?

- ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Finalmente, hacemos una recopilación de las estrategias más frecuentes que se suelen utilizar en la resolución de problemas. Según S. Fernández (1992) serían:

- Ensayo-error.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- Manipular y experimentar manualmente.
- Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- Experimentar y extraer pautas (inducir).
- Resolver problemas análogos (analogía).
- Seguir un método (organización).
- Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
- Hacer recuente (conteo).
- Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
- Cambio de estados.
- Sacar partido de la simetría.
- Deducir y sacar conclusiones.
- Conjeturar.
- Principio del palomar.
- Analizar los casos límite.
- Reformular el problema.
- Suponer que no (reducción al absurdo).
- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

Para terminar sólo queremos hacer dos consideraciones. La primera hace referencia a que el contexto en el que se sitúen los problemas, que por parte de los profesores se tienden a considerar como irrelevante o, al menos como poco significativo, tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los alumnos. La segunda, que parece una perogrullada, es que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no sólo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío. Luego, hay que hacer cuantos esfuerzos sean precisos para que la resolución de problemas sea el núcleo central de la enseñanza matemática.

DESARROLLO DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Si consideramos un problema como una situación que se presenta en la que se sabe más o menos, o con toda claridad, a dónde se quiere ir, pero no se sabe cómo; entonces resolver un problema es precisamente aclarar dicha situación y encontrar algún camino adecuado que lleve a la meta. ["Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados". (G. Polya)]

A veces no sabremos si la herramienta adecuada para la situación está entre la colección de técnicas que dominamos o ni siquiera si se ha creado una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver el problema. Esta es precisamente la circunstancia del investigador, en matemáticas y en cualquier otro campo, y, por otra parte, ésta es la situación en la que nos encontramos a veces en nuestra vida normal.

La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, enfrentándose con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, observando los modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y procurando ajustar adecuadamente los procesos de pensamiento a los de ellos. Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música, etc.

Las estrategias que tendremos ocasión de aprender y ejercitar son:

A. Comenzar resolviendo un problema semejante más fácil.
B. Hacer experimentos, observar, busca pautas, regularidades... Hacer conjeturas. Tratar de demostrarlas.
C. Dibujar una figura, un esquema, un diagrama.
D. Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
E. Inducción.
F. Supongamos que no es así.
G. Supongamos el problema resuelto.
H. Si tenemos una receta y estamos seguros de que se ajusta al problema, aplíquémosla.

A. COMENZAR RESOLVIENDO UN PROBLEMA SEMEJANTE MÁS FÁCIL.

Esta estrategia se practica en multitud de circunstancias. El niño que aprende a andar en bicicleta no intenta lanzarse cuesta abajo por su cuenta a gran velocidad. Empieza con un triciclo para atender primero el problema de los pedales y del volante. Luego vendrá el problema del equilibrio y se ensayará con dos ruedas. Si se aprende a conducir un coche, lo mejor es circular primero despacio, sin necesidad de cambiar marchas, y en descampado, para poder jugar con el volante. Ya vendrán luego los problemas conduciendo en la calle.

En matemáticas sucede lo mismo. Si estudiamos derivadas, primero, las haremos sencillas, la de un monomio como x^2, ... , luego pasamos a un polinomio y cuando sentimos cierta familiaridad con el proceso, nos lanzamos más lejos.

Un problema puede resultar difícil por su tamaño, por tener demasiados elementos que lo hacen enrevesado y oscuro. Para empezar, debemos resolver un problema semejante lo más sencillo posible. Luego lo complicaremos hasta llegar al propuesto inicialmente.

Procediendo así, obtenemos varios provechos:

a. **De orden psicológico**. Empezamos animándonos con el probable éxito.
b. **De orden racional**. En el problema sencillo suelen aparecer, más transparentes, principios de solución que estaban confusos y opacos en medio de la complejidad del problema inicial.
c. **Manipulación más fácil**. La manipulación efectiva en un problema de pocas piezas es más fácil que en uno de muchas.

La simplificación de un problema se puede lograr no sólo reduciendo su tamaño, sino también imponiendo alguna condición adicional que no está en el problema propuesto. Incluso, aunque parezca al principio que tu simplificación es demasiado drástica, se comprueba con frecuencia cómo la ayuda del problema simplificado es muy efectiva.

UNA MOSCA ANTOJADIZA. Colocamos sobre la mesa 25 monedas iguales en la siguiente posición:

O O O O O
O O O O O
O O O O O
O O O O O
O O O O O

Una mosca viene volando y se posa sobre una de ellas (la indicada). Se le ocurre hacer un paseo andando por las 25 monedas, pero, pasando de una moneda a otra horizontalmente y verticalmente y sin repetir moneda. ¿Lo podrá hacer? ¿Qué itinerario sería el adecuado para cada moneda en la que se pueda posar?

Solución. Son muchas 25 monedas. Vamos a probar con menos, por ejemplo, con 2x2=4 monedas. Así:

O O
O O

Es obvio que se pose donde se pose, la mosca tiene el camino bien fácil.

Probemos con 3x3=9 monedas. Así:

O O O
O O O
O O O

Si la mosca se posa en una esquina también lo tiene fácil. Si se posa en el centro, también. Pero si se posa en cualquier otra moneda, como fácilmente se observa, lo tiene imposible.

Así, en el caso de 3x3=9 monedas, a veces se puede hacer el paseo, y otras no. Podemos sospechar que en el de 5x5=25 monedas suceda algo parecido.

¿Por qué no se puede hacer el paseo en algunos casos cuando hay 9 monedas?

Señalemos los centros de las monedas con coordenadas:

(-1,1) (0,1) (1,1)
(-1,0) (0,0) (1,0)
(-1,-1) (0,-1) (1,-1)

Es curioso: ¡los puntos desde los que el paseo no se puede hacer son (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)! En ellos, la suma de las coordenadas es impar. En los restantes, la suma de las coordenadas es par. Llamaremos pares a estos vértices y, a los otros, impares.

Hay cuatro vértices impares y cinco pares. El paseo de la mosca, empezando por un vértice impar, sería:

Impar $\Rightarrow$ Par $\Rightarrow$ Impar $\Rightarrow$ Par $\Rightarrow$ ...

Si terminase en impar, habría más vértices impares que pares. Si terminase en par, habría igual número de las dos clases. Ambas cosas son falsas. ¡La mosca no puede hacer el paseo saliendo de un vértice impar!

Esto da luz más que suficiente para tratar el caso de 5x5 monedas. El camino en los casos en los que se puede hacer se encuentra fácilmente.

B. HACER EXPERIMENTOS, OBSERVAR, BUSCAR PAUTAS, REGULRIDADES, ..., HACER CONJETURAS. TRATAR DE DEMOSTRARLAS.

En matemáticas las buenas ideas surgen muy a menudo a través de experimentos, al igual que en el resto de las ciencias. Pero los experimentos matemáticos son mucho más fáciles de realizar y menos costosos. Los hay de muy diversos tipos:

- Ensayos en casos particulares la aparición de una cierta propiedad.

- Mirar ciertas figuras, imágenes, dibujos, cambiándolas, introduciendo elementos auxiliares, a fin de enlazar diversas situaciones y de establecer conexiones que sospechamos que existen entre los objetos que manipulamos.

Con el experimento y la observación surge la conjetura. Se sigue experimentando con nuevos casos, tratando de contrastar, de poner a prueba la conjetura. Si también en ellos sucede lo que se barrunta, la conjetura va adquiriendo más fuerza. Si en algún caso no sucede lo que se espera, hay que modificar la conjetura inicial hasta dar con una que cubra todos los casos observados. Luego vendrá la tarea de dar con la razón por la cual la conjetura se verifica siempre, con la demostración de la conjetura. Entonces se sabrá que la conjetura tiene que verificarse en todos los casos posibles.

Los siguientes ejemplos dan una idea de la variedad de experimentos que se pueden llevar a cabo.

NOGALEROS Y NUECES ROTAS. Los 18 socios de la Cofradía de Nogaleros Unidos reciben en su local de Villafría de la Sierra a los 11 miembros de la Hermandad de la Buena Nuez, del pueblo vecino, para hablar de sus problemas comunes. Cuando van a saludarse a Isidro se le ocurrió una feliz idea: Aprovechemos cada apretón de manos para partir una nuez. Así lo hicieron. ¿Cuántas nueces pudieron partir con sus saludos?

Solución. Imagina que la cofradía tiene 4 socios y sus visitantes son 3. Haz el diagrama de saludos. Ve aumentando el número de socios ... Saludos = 18x11 = 198.

UN NÚMERO MÁGICO. Se elige un número cualquiera de 3 cifras, no todas iguales, por ejemplo 373. Se construye otro ordenando sus cifras de mayor a menor: 733. Ahora se las ordena de menor a mayor: 337. Al restar estos dos números se obtiene: 733 - 337 = 396.

Se repite la operación unas cuantas veces con el resultado 396 y los sucesivos. ¿Qué se observa? ¿Cuál es la razón? ¿Qué pasa con un número de dos o de cuatro cifras al hacer un proceso semejante?

DÍGITOS FINALES DE LAS POTENCIAS. ¿Cuáles son los dígitos finales de las potencias de exponente 23 de los números 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 y 39?

Solución. En su resolución, la experimentación juega un papel decisivo. Podría uno pensar en calcular tales potencias, pero no hay ordenador que nos proporcione números tan enormes.

Enseguida surge la idea de que 37^{23}, por ejemplo, termina en lo mismo que 7^{23} y así nuestro problema se reduce a ver en qué dígito terminan:

$$1^{23}, 2^{23}, 3^{23}, ..., 9^{23}$$

Experimentando un poco, vemos que 1^{23} termina en 1; 5^{23} termina en 5; 6^{23} termina en 6. La cosa es muy sencilla en estos casos.

Experimentamos un poco más haciéndonos una tabla de la cifra final de las potencias sucesivas para los primeros números.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3 termina en	1	8	7	4	5	6	3	2	9
n^4 termina en	1	6	1	6	5	6	1	6	1
n^5 termina en	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^6 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Y así sucesivamente.

Sin necesidad de seguir con la tabla, ahora está claro que, al aumentar exponente en 4 unidades, resultan los mismos dígitos finales. Así:

$$n^9, n^{13}, n^{17}, n^{21}$$

terminan en n y n^{23} termina en lo mismo que n^3. Es decir:

$$1^{23}, 2^{23}, 3^{23}, 4^{23}, 5^{23}, 6^{23}, 7^{23}, 8^{23}, 9^{23}$$

terminan, respectivamente, en:

1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9

Además, de esta experimentación que hemos hecho resulta que, si:

$$k = 4i + s \text{ , } s=1,2,3,4$$

entonces n^k termina en lo mismo que n^s. Así, por ejemplo, 7^{86} termina en lo mismo que 7^2, pues 86=21x4+2. Es decir, 7^{86} termina en 9.

CONTANDO DIAGONALES. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de 85 lados?

C. DIBUJAR UNA FIGURA, UN ESQUEMA, UN DIAGRAMA.

Las matemáticas se comprenden a través de los sentidos, pues *"no hay nada en el intelecto que no haya estado primero en los sentidos".* (Aristóteles)

Hay muchos problemas que se hacen muy transparentes cuando se logra encontrar una representación visual adecuada de los elementos que en él intervienen. Pensamos mucho mejor con el apoyo de las imágenes que con el de palabras, números, símbolos solamente.

Por eso es muy aconsejable, a fin de dar con ideas buenas que sirvan para resolver el problema, esquematizar y dibujar, incluso pintar de colores, para mayor claridad, los elementos que aparecen en la situación estudiada. La imagen o diagrama que fabriquemos de un problema, debe, de alguna forma sencilla, incorporar los datos relevantes y suprimir los superfluos que pueden conducir a confusión. De esta forma pueden quedar resaltadas visualmente las relaciones entre los aspectos importantes del problema y de ahí muy a menudo, se desprenden luces que clarifican sustancialmente la situación.

JUGANDO A LAS CARTAS. Las señoras X, Y, Z, una argentina, una española y una brasileña, aunque no por este orden, están jugando a las cartas, sentadas alrededor de una mesa camilla. Cada una ha pasado una carta a la que se sienta a su derecha. La señora Y ha pasado a la argentina. La señora X ha pasado una carta a la señora que ha pasado una carta a la brasileña. ¿Cuál es la nacionalidad de X, Y y Z?

Solución. Dibujamos las dos posibilidades de la situación.

Posibilidad A Posibilidad B
X X
Y Z Z Y

Introduzcamos el dato: "La señora Y ha pasado a la argentina".

Posibilidad A Posibilidad B
X X=Arg
Y Z=Arg Z Y

Introduzcamos el dato: "La señora X ha pasado una carta a la señora que ha pasado una carta a la brasileña".

Posibilidad A Posibilidad B
X X=Arg
Y Z=Arg=Bra Z Y=Bra
Descartada **Aceptada**

Luego: X=Argentina; Y=Brasileña; Z=Española.

D. ESCOGER UN LENGUAJE ADECUADO, UNA NOTACIÓN APROPIADA.

Usar una buena notación es muy útil en álgebra.

Sucede muchas veces que el ser o no capaz de resolver un problema depende fundamentalmente de que el estilo de pensamiento aplicado sea o no el adecuado al problema. Por eso hay que pensar bien antes de empezar a trabajar. ¿Será bueno utilizar un lenguaje geométrico, o bien un simple diagrama, o tal vez vendrá bien aquí un lenguaje algebraico, o analítico? ¿Tal vez lo que venga bien sea una modelización con papel, cartón, ...?

La adopción de un modo apropiado de encarar un problema tiene su importancia. Lo que es un lenguaje adecuado o un lenguaje inadecuado, se puede entender en los siguientes ejemplos.

EL MONJE EN LA MONTAÑA. Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de la ermita a las 9 de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero, y a mayor velocidad. Al ir bajando, se pregunta: ¿Habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

Solución. Una mente inclinada matemáticamente comienza, tal vez, por hacerse una gráfica de la caminata del monje en cada uno de los días. Tiene pocos datos para ello. Se los inventa. Con un poco de trabajo verá, seguramente, la luz...

Una mente menos inclinada matemáticamente puede tener la idea de hacer descender a un monje ficticio, en el mismo día que el monje real sube, replicando exactamente el camino de bajada que el monje real hace al día siguiente. Como salen a la misma hora, es claro que a alguna hora se encuentran en el camino. Las matemáticas están de sobra.

EL PROBLEMA DE JOSEPHUS. En su libro De Bello Judaico, Hegesipo cuenta que cuando los romanos capturaron la ciudad de Jotapat, Josephus y otros cuarenta judíos se refugiaron en una cueva. Allí decidieron los 41 judíos suicidarse antes que entregarse. A Josephus y otro amigo la idea no les gustaba. Propusieron hacerlo, pero con orden. Se colocarían en círculo y se irían suicidando contando tres a partir de un entusiasta que a toda costa quería ser el primero. ¿En qué lugares se colocaron Josephus y su amigo para ser los dos últimos y, una vez en mayoría absoluta, decidir que no estaban de acuerdo con la automasacre?

Solución. El problema tiene sabor matemático y se pueden ensayar herramientas matemáticas. Pero resulta más sencillo colocar en círculo 41 papelillos con un número 1,2,3,...,40,41 cada uno y luego ir simulando los suicidios para ver qué dos papelillos quedan los últimos. Se colocaron en los lugares 16 y 31.

Naturalmente, que si se quiere obtener un resultado general con m judíos que se suicidan contando de n en n, hay que acudir a consideraciones más matemáticas.

Una vez decidido el modo de pensamiento, hay que dedicar un rato a pensar en la forma concreta de aplicarlo. Normalmente hay que buscar la simplicidad, la simetría, los elementos que, de una forma más sencilla, ponen bien en claro lo más relevante del problema. Si se utiliza un diagrama o un esquema, hay que procurar que éste incorpore lo esencial del problema, sin detalles superfluos que pueden perturbar la comprensión y oscurecer lo verdaderamente importante.

Si el enfoque es algebraico, hay que prestar atención a la notación empleada. En lo posible, ésta debe representar, de la forma más cómoda y manejable, los datos del problema y su posible vinculación con lo que se busca.

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto la importancia de una elección adecuada del lenguaje y de la notación.

PRODUCTO DE CUATRO ENTEROS CONSECUTIVOS. Observemos las igualdades:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 5^2 - 1$$
$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 11^2 - 1$$
$$3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360 = 19^2 - 1$$

¿Será verdad que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre un cuadrado perfecto menos 1?

Solución. El producto de cuatro números enteros consecutivos se puede expresar así: $a(a+1)(a+2)(a+3)$ con a entero. Probar que esto es p^2-1, con p entero, parece engorroso.

Si M es el centro de los cuatro enteros, su producto es:
$(M-3/2)(M-1/2)(M+1/2)(M+3/2) = (M^2-9/4)(M^2-1/4) = (M^2-5/4)^2-1$ y es fácil ver que $M^2-5/4$ es un entero.

Por ejemplo así: $M^2-5/4 = (x+1/2)^2-5/4 = x^2+1/4+x-5/4 = x^2+x-1$.

E. INDUCCIÓN.

La inducción matemática es uno de los métodos de demostración utilizados con mayor frecuencia en algunos campos de la matemática.

La idea se entiende con facilidad: Imaginemos delante de nosotros las 28 fichas del dominó colocadas de pie, en fila india, y de forma que si cae una, cae seguro la siguiente. Un gracioso tira la primera hacia la segunda. ¿Qué pasará? ¡Se caerán todas! Esto viene a ser la inducción.

Podemos considerar los números 1, 2, 3, 4, ... como las fichas del dominó. Suponemos seguro, demostrar, que si uno cualquiera de estos números tiene una cierta propiedad P, entonces también el siguiente la tiene. A continuación nos aseguramos de que el primero, el 1, tiene la propiedad P. ¿Conclusión? Claramente todos los números naturales tienen la propiedad P. A veces se puede probar que el número 25 tiene la propiedad P, pero no el 1. Entonces, claro está, se concluye que todos, a partir del 25, tienen la propiedad.

Resumiendo, hay dos cosas importantes de las que cerciorarse:

a. Si h tiene la propiedad P, entonces también h+1 tiene la propiedad P.
b. El número 1 (o tal vez el 25), tiene la propiedad P.

El siguiente ejemplo indica la forma de proceder y es útil para practicar.

SUMA DE IMPARES. Demostrar que la suma de los n primeros números naturales impares es igual a n^2. Es decir: $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$.

Solución. El número 1 tiene la propiedad, pues $1 = 1^2$.
Supongamos que k tiene la propiedad, o sea:
$1+3+5+...+(2k-1) = k^2$ (hipótesis inductiva).
La suma de los primeros k+1 impares es: $1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1]$.
Si usamos la hipótesis inductiva, $1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1] =$
$k^2+[2(k+1)-1] = k^2+2k+1 = (k+1)^2$ y por lo tanto k+1 tiene esa propiedad.

Repasemos el esquema de la demostración precedente:

Primero comprobamos que la propiedad P era válida para k=1. Luego demostramos que si la propiedad P era cierta para k (hipótesis inductiva) entonces era también cierta para k+1. De estas dos cosas concluimos que la propiedad P es verdadera para todos los números naturales.

F. SUPONGAMOS QUE NO ES ASÍ.

Probablemente las matemáticas nos han habituado ya a la siguiente forma de razonar para demostrar que una cierta situación A es verdadera. Suponemos que no lo es, es decir, que se verifica NO A. Vamos deduciendo correctamente consecuencias de NO A y nos encontramos, por fin, con una que dice algo absurdo; por ejemplo, que 2=3. Entonces está claro que nuestro punto de partida NO A es falso. Es decir, que A es verdadero. Este es un proceso de pensamiento muy usual en la resolución de problemas. Tal vez a través de una serie de experimentos hemos llegado a la conjetura de que se verifica una cierta situación P.

¿Cómo demostrar que la conjetura P es cierta? Se parte de NO P y se analiza qué se deduce de ahí, tratando de llegar a una contradicción con algún hecho, principio, teorema o hipótesis que se da por cierto. Si se consigue, se ha terminado.

$\sqrt{2}$ NO ES UN NÚMERO RACIONAL. (*)

Solución. En efecto: Supongamos que (*) es falsa. Tenemos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Es decir: $\sqrt{2}$ = a/b con a y b enteros. Podemos suponer, además, que (a,b) = 1 (es decir que la fracción a/b fue simplificada todo lo posible). Se tiene, elevando al cuadrado que $2b^2=a^2$.

Entonces a^2 es un número par. Entonces a es un número par. Entonces a = 2k. Entonces $a^2 = 4k^2$, entonces $b^2 = 2k^2$. Entonces b^2 es par, luego b es par. Pero si a y b son pares, (a,b) es distinto de 1. Contradicción. Luego, (*) es verdadera.

NÚMEROS PRIMOS. Demostrar que hay infinitos números primos.

Solución. Supuesta formada una tabla de números primos, sea P el mayor primo obtenido. Demostremos que hay un número primo mayor que P.

El número $(2\cong 3\cong 5\cong 7\cong 11\cong \ldots\cong P)+1$ es mayor que P. Si este número es primo ya está demostrado. Si es compuesto, admitirá un divisor primo, y este divisor primo será mayor que P, pues el número en cuestión no es divisible por ninguno de los números primos inferiores a P, ya que en todas las divisiones se obtiene resto igual a 1. Por tanto, no puede haber un número finito de números primos.

G. SUPONGAMOS EL PROBLEMA RESUELTO.

Se aplica muchísimo en construcciones geométricas.

Un buen modo de descubrir el mejor camino para escalar una montaña, aunque un poco caro, consiste en colocarse arriba con un helicóptero y desde allí estudiar los caminos posibles. En la resolución de problemas, este procedimiento es barato y de uso corriente.

SUMAR SU CUADRADO. Buscar un número tal que si le sumamos su cuadrado resulte 30.

Solución. No sabemos cuál es, pero procedemos como si lo supiéramos. Lo llamamos x y sabemos que tiene que pasar que $x + x^2 = 30$ y ahora nos las ingeniamos para hallar x.

MÍNIMO RELATIVO. Buscar un valor donde la función $f(x)=x^3-3x+1$ tenga un mínimo relativo.

Solución. No sabemos cuál es, ni siquiera sabemos si lo habrá, pero procedemos como si lo supiéramos. Lo llamamos a y sabemos que si en él hay un mínimo, entonces la derivada f' en ese punto es 0. $f(a)=3a^2-3=0$. Así sólo tenemos que mirar si en a=1 ó en a=-1 hay un mínimo relativo.

H. SI TENEMOS UNA RECETA Y ESTAMOS SEGUROS DE QUE SE AJUSTA AL PROBLEMA, APLÍQUÉMOSLA.

¿Para qué gastar materia gris sin necesidad? Está claro que la matemática está muy lejos de ser una colección de recetas. La matemática es un ejercicio de la imaginación y del pensamiento.

Pero si estamos seguros de que un problema cae dentro de un tipo de cuestiones que ya has visto antes y para las que tenemos el camino abierto, no hay que dudar, aplicamos el método, la rutina, la rutina que se ha aprendido. Gracias a las rutinas, el pensamiento queda libre para ir más adelante.

Esta estrategia sólo tiene sentido, dentro de la actividad matemática, si va acompañada de las demás. Después de mucho indagar, se llega a una ley, una fórmula, una receta. Usémosla.

PROBLEMAS

MENTALES

Problemas para resolver mentalmente, sin lápiz ni papel y en un tiempo prefijado, generalmente unos cuantos segundos.

1. PERROS, GATOS Y LOROS. ¿Cuántos animales tengo en casa, sabiendo que todos son perros menos dos, todos son gatos menos dos, y que todos son loros menos dos?

2. MENUDA RAZA DE GIGANTES. En el Libro del Delirium Tremens se habla de una raza de gigantes muy especial. Da la casualidad que la altura media de estos gigantes es diez metros más que la mitad de su altura. Sin pensarlo dos veces, ¿cuánto miden?

3. EL PESO DE UN LADRILLO. Si un ladrillo se equilibra con tres cuartos de ladrillo más una pesa de tres cuartos de kilo, ¿cuánto pesa un ladrillo?

4. LA CUADRILLA. Una cuadrilla de segadores está compuesta por sus tres cuartas partes más tres cuartos de hombre. ¿Cuántos hombres componen la cuadrilla?

5. ACABÓ LA GUERRA. De 138 soldados vueltos del frente, casi el 43% perdió un ojo y el 50% de los restantes perdió ambos ojos. ¿Cuántos ojos quedaron?

6. PROPINAS AL ACOMODADOR. En un cine hay 1.300 espectadores. El 13% de ellos le ha dado 5 ptas. de propina al acomodador. Del 87% restante, la mitad le ha dado 10 ptas. y la otra mitad, nada. ¿Cuánto dinero recibe el acomodador?

7. ¿CUÁNTOS NUEVES? En una calle hay 100 edificios. Se llama a un fabricante de números para que ponga números a todas las casas del uno al cien; éste tendrá que encargar los números para hacer el trabajo. ¿Cuántos nueves necesitará?

8. ¿CUÁNTO BENEFICIO? Un comerciante compró un artículo por 7 ptas., lo vendió por 8, lo volvió a comprar por 9 y lo vendió finalmente por 10. ¿Cuánto beneficio sacó?

9. EL PRECIO DE LAS AGUJAS. ¿Cuánto valen 10 agujas de coser a 1000 ptas. el millar?

10. PILOTO DE FÓRMULA 1. Un piloto de Fórmula 1 completó una vuelta del circuito del Jarama en un minuto veintitrés segundos. A este ritmo, ¿cuánto habrá de tardar en completar 60 vueltas?

11. LOS TANTOS POR CIENTO. ¿Qué es más, el 25% de 75 o el 75% de 25?

12. EL PRECIO DE LA BOTELLA. Una botella de vino cuesta 10 dólares. El vino cuesta nueve dólares más que la botella. ¿Cuánto cuesta la botella?

13. LA BOTELLA Y EL TAPÓN. Una botella cuesta 30 ptas. más que su tapón. Los dos juntos cuestan 50 ptas. ¿Cuánto cuesta cada uno?

14. OTRA BOTELLA Y OTRO TAPÓN. Una botella y su tapón pesan 1 Kg. y 10 gramos. La botella pesa 1 Kg. más que el tapón. ¿Cuánto pesa la botella? ¿Y el tapón?

15. EL MISMO DINERO. Arturo y Benito tienen la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene que dar Arturo a Benito para que Benito tenga 10 ptas. más que Arturo?

16. ENTRE PASTORES. Un pastor le dijo a otro: "Si te regalo una de mis ovejas, tú tendrás el doble de las que yo tengo. Pero si tú me das una de las tuyas, tendríamos las mismas". ¿Cuántas ovejas tenía cada uno?

17. ANTONIO, PEDRO Y LOS LIMONES. Antonio y Pedro se encuentran teniendo cada uno de ellos una carga de limones. Antonio: Si me das tres limones, tendremos cada uno la misma carga. Pedro: Si tú me das seis limones, tendré el doble de los que te quedan. ¿Cuántos limones llevaba cada uno?

18. EL DESGASTE DE LAS RUEDAS. Un viajante recorrió en coche 5000 Km., permutando regularmente las ruedas (incluida la de repuesto) para que todas sufrieran igual desgaste. Al terminar el viaje, ¿durante cuántos kilómetros ha sido utilizada cada rueda?

19. ESCRIBIENDO A MÁQUINA. Carmen pulsa 50 caracteres cada 10 segundos mientras Rosa no pulsa más que 40 en el mismo tiempo. ¿Cuánto tiempo emplearán entre las dos para pulsar 360 caracteres en total?

20. ¿CUÁNTA TIERRA? Cierto pequeño granjero no tenía dinero para pagar sus impuestos. Como consecuencia, el recaudador real de impuestos le quitó un décimo de sus tierras. Al granjero le quedaron 10 Ha. ¿Cuánta tierra tenía al principio?

21. DOMINÓ. Del juego del dominó se separan las fichas que tienen un 6. Quieres colocar sobre la mesa las 21 fichas que quedan siguiendo las reglas del juego, es decir el 2-3 puede ir empalmado con el 3-5, éste con el 5-4, etc,... ¿podrás hacerlo?

22. LA AMEBA. Una ameba se divide en dos (y así se reproduce) exactamente cada minuto. Dos amebas en un tubo de ensayo pueden llenarlo por completo en dos horas. ¿Cuánto tiempo le llevará a una sola ameba llenar otro tubo de ensayo de la misma capacidad?

23. MANOS Y DEDOS. En una mano hay 5 dedos, en 2 manos hay 10 dedos, ¿Cuántos dedos hay en 10 manos?

24. ¿QUÉ HORA SERÁ? ¿Qué hora será, si quedan del día la tercera parte de las horas que han pasado?

25. DOCENAS DE HUEVOS. Hallar la diferencia entre media docena de docenas de huevos y seis docenas de huevos.

26. EL PRECIO DEL OBJETO. Por un objeto se pagan 9 duros más la mitad de lo que vale. ¿Cuánto vale el objeto?

27. LA EPIDEMIA DE LAS OVEJAS. Si un pastor tiene 15 ovejas y se le mueren todas menos nueve, ¿cuántas le quedan?

En muchos problemas es muy importante comprender exactamente lo que se pide hallar, antes de intentar calcularlo. Si una primera interpretación de un problema conduce a contradicciones, o bien la pregunta carece de solución, o bien el problema no se ha comprendido correctamente.

28. OTRO LADRILLO. Si un ladrillo pesa 2 kg. y medio ladrillo. ¿Cuánto pesa un ladrillo y medio?

29. LA ALTURA DEL ÁRBOL. ¿Qué altura tiene un árbol, que es 2 metros más corto que un poste de altura triple que la del árbol?

30. ENTRE PASTORES. Un pastor le dijo a otro: si te regalo una de mis ovejas, tú tendrás el doble de las que yo tengo. Pero si tú me das una de las tuyas, tendríamos las mismas. ¿Cuántas ovejas tenía cada uno?

31. DÍAS Y SEGUNDOS. ¿Cuántos días hay en 43.200 segundos?

32. ESCALA DE ESTATURAS. Pedro tiene la estatura que tendrá Juan cuando crezca lo que le falta a Antonio para tener la estatura de Pedro. ¿Qué relación hay entre las estaturas de Pedro, Juan y Antonio?

33. PINTANDO UN CUBO. ¿Cuál es el mínimo número de colores para pintar un cubo de forma que dos caras adyacentes no tengan el mismo color?

34. DINERO DE JUAN Y PEDRO. Juan: Si me das 3 ptas. tendré tantas como a ti te quedan. Pedro: Si tú me das 6 tendré el doble de las que a ti te quedan. ¿Cuánto dinero tienen Juan y Pedro?

35. EL CUBO PINTADO. Un cubo de madera de 30 cm. de lado se pinta completamente de rojo; luego se sierra en 27 cubitos de 10 cm. de lado cada uno. ¿Cuántos serán los cubitos serrados que presentarían sólo dos caras pintadas?

36. EL CEREZO. A un cerezo subí, que cerezas tenía, ni cerezas toqué, ni cerezas dejé. ¿Cuántas cerezas había?

37. OTRO CEREZO. A un cerezo trepé, que con cerezas hallé, yo cerezas no comí, mas cerezas no dejé. ¿Cuántas cerezas había?

38. JUGANDO AL AJEDREZ. Tres amigos jugaron al ajedrez. En total jugaron tres partidas. ¿Cuántas partidas jugó cada uno?

39. LO DE LA SARDINA. A real y medio la sardina y media, ¿cuánto costarán siete sardinas y media?

40. LO DE LA SARDINA PERO CON HUEVOS. Docena y media de huevos cuestan dieciséis duros y medio. ¿Cuánto costarán 18 huevos?

41. LO DE LOS ARENQUES. Si un arenque y medio cuesta tres medios peniques, ¿cuánto costarán doce arenques?

42. PAN, PAN Y PAN. Pan, pan y pan, pan y pan y medio, cuatro medios panes, y tres panes y medio, ¿cuántos panes son?

43. MEDIAS MEDIAS. Cuatro medios pares de medias medias, ¿cuántos pares de medias son?

44. LAS CERVEZAS. Si un hombre y medio beben una cerveza y media en un día y medio, ¿cuántas cervezas beberán seis hombres en seis días?

45. LOS TATUADORES. Dos tatuadores y medio pueden tatuar dos sirenas y media, en los brazos de dos marineros y medio en dos horas y media. ¿Cuántos tatuadores se necesitarán para tatuar 24 sirenas, en los brazos de 24 marineros en 24 horas?

46. NIÑOS Y MOSCAS. Si tres niños cazan tres moscas en tres minutos. ¿Cuánto tardarán treinta niños en cazar treinta moscas?

47. A MODO DE CHIMENEAS. Dos fumadores consumen 3 cajetillas diarias. ¿Cuántos fumadores de las mismas características serán necesarios para consumir 90 cajetillas en 30 días?

48. LA TORRE EIFFEL. La torre Eiffel tiene 320 metros de altura y pesa 7.000 toneladas. Si construyéramos un modelo perfectamente a escala, con el mismo material y que tuviera la mitad de su altura, ¿cuánto pesaría?

49. MILÍMETROS CUADRADOS. Supongamos un cuadrado de un metro de lado, dividido en cuadraditos de un milímetro. Calcule mentalmente qué longitud se obtendría si colocásemos todos los cuadraditos en línea, adosados unos a otros.

50. LAS 16 CERVEZAS. Cuatro amigos se reúnen en un bar y consumen entre todos 16 cervezas. Cuando piden la cuenta pretenden pagar cada uno lo suyo.

¿Cuántas cervezas debe pagar cada amigo sabiendo que cada uno de ellos tomó dos cervezas más y/o dos cervezas menos que otro?

51. TRIÁNGULO ISÓSCELES DE MAYOR ÁREA. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 4 cm. ¿Qué longitud deberá tener el tercer lado para conseguir que el triángulo tenga la máxima área posible?

52. LOS GATOS DE MARGARITA. Cuando se le pregunta a la vieja Margarita con cuántos gatos vive, responde melancólicamente: "Con los cuatro quintos de mis gatos más cuatro quintos de gato." ¿Con cuántos gatos vive Margarita?

53. LAS FOCAS DEL ZOO. Estuve el otro día en el zoológico. Vi focas pero no había muchas. Sólo siete octavos de las focas más siete octavos de foca. ¿Cuántas focas había?

54. CONEJOS Y PALOMAS. En una jaula con conejos y palomas, hay 35 cabezas y 94 patas. Con estos datos, ¿cuántas aves hay exactamente?

55. ¿CUÁNTO TIENE PEDRO? Entre Pedro, Luis y Antonio tienen 500 ptas. Sabiendo que Antonio tiene doble que Luis y éste tres veces más que Pedro, ¿cuánto tiene Pedro?

56. MULAS Y BURROS. Se han vendido 9 burros y 7 mulas y se ha cobrado por ellos 75.000 duros. Sabiendo que los burros los pagan al doble que las mulas, ¿a qué precio se vendieron cada uno de ellas?

57. EL TIRO AL BLANCO. Cada vez que un tirador da en el blanco gana 500 puntos, y cada vez que falla pierde 300. Sabiendo que después de 15 disparos obtuvo 2.700 puntos, ¿cuántas veces hizo diana exactamente?

58. OJO QUE ES UN CIRCUITO. Un caracol tarda una hora y veinte minutos en recorrer un circuito en sentido horario, pero cuando hace ese mismo camino en sentido contrario sólo tarda 80 minutos. ¿A qué se debe esa diferencia?

59. CURIOSA PELÍCULA. Mi amigo Bonifacio, rabioso aficionado al cine descubrió que una película de Buñuel duraba una hora y veinte minutos, los días pares, y sólo ochenta minutos, los impares. ¿A qué será debido?

60. EL GRAN CHOQUE. Dos naves espaciales siguen trayectorias de colisión frontal. Una de ellas viaja a 8 km. por minuto y la otra a 12 km/minuto. Suponiendo que en este momento están exactamente a 5.000 km. de distancia, ¿cuánto distarán una de otra un minuto antes de estrellarse?

61. TRABALENGUAS. Con cada bote de detergente la casa fabricante incluye un cupón de regalo. Una vez reunidos 10 cupones, el cliente puede canjearlos por un nuevo bote de detergente. ¿Cuántos cupones vale un bote de detergente?

62. LA GALLINA PONEDORA. Una gallina pone dos huevos en tres días. ¿Cuántos días se necesitan para que cuatro gallinas pongan dos docenas de huevos?

63. ¿CUÁNTA AGUA SE DERRAMÓ? La tripulación de un barco hundido tenía agua sólo para trece días, un litro al día por persona. El quinto día se derramó algo de agua sin querer y murió uno de los hombres. El agua duró exactamente lo que se esperaba. ¿Cuánta agua se derramó?

64. LAS DIMENSIONES DEL RECTÁNGULO. En un rectángulo, el largo es el doble del ancho y el perímetro es de 360 m. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

65. LOS CHICOS DE LA FERIA. A la feria benéfica de la escuela cada chico debía concurrir con un adulto. Los adultos pagan 2 dólares y los chicos 1 dólar de entrada. Se recaudaron 180 dólares. ¿Cuántos chicos fueron a la feria?

66. MONEDAS DE 5 Y 1 PTA. Tengo igual cantidad de monedas de 5 ptas. que de 1 pta. y entre las dos tengo 90 ptas. ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?

67. MITOLOGÍA. ¿Cuántas extremidades tienen 3 centauros?

68. EN DOS DADOS. ¿Cuántos puntos hay en total en un par de dados?

ÁLGEBRA

***Álgebra**. Parte de las Matemáticas que se dedica en sus aspectos más elementales. a resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones.*

Los algoritmos de resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones han ocupado a muchos matemáticos a lo largo de la historia. Así, se conoce la existencia de problemas resueltos por procedimientos algebraicos, que datan del año 1900 a. C.. El lenguaje simbólico utilizado en estos procesos se atribuye a los árabes.

El arte de plantear ecuaciones

El idioma del álgebra es la ecuación.

*Isaac Newton en su manual de álgebra titulado **Aritmética Universal** escribió: "Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico"*

También mostró con ejemplos como debía efectuarse dicha traducción. He aquí alguno de ellos:

En lengua vernácula	Usando álgebra
Un comerciante tenía una cierta suma de dinero	x
El primer año se gastó 100 libras	x-100
Aumentó el resto con un tercio de éste	(x-100) + (x-100)/3 = (4x-400)/3
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	(4x-400)/3 - 100 = (4x-700)/3
y aumentó la suma restante en un tercio de ella	(4x-700)/3 + (4x-700)/9 = (16x-2800)/9
El tercer año gastó de nuevo 100 libras	(16x-2800)/9 - 100 = (16x-3700)/9
Después de que hubo agregado su tercera parte	(16x-3700)/9 + (16x-3700)/27 = (64x-14800)/27
El capital llegó al doble del inicial	(64x-14800)/27 = 2x

Para determinar cuál es el capital inicial del comerciante no queda más que resolver la última ecuación: 64x-14800=54x $\Rightarrow$ 10x=14800 $\Rightarrow$ **x=1480**.

La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación a base de los datos de un problema suele ser más difícil.

Hemos visto que el arte de plantear ecuaciones consiste, efectivamente, en traducir "la lengua vernácula a la algebraica". Pero el idioma del álgebra es lacónico en extremo, por eso no todos los giros del idioma materno son de fácil traducción. Las traducciones pueden ser muy distintas por el grado de su dificultad, como se verá.

*Problemas más o menos **originales**, por su enunciado, por el procedimiento de resolución, por la solución, etc.*

69. LA VIDA DE DIOFANTO. La historia ha conservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático. Reproducimos esta inscripción:

En lengua vernácula	Usando álgebra
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh milagro!, cuán larga fue su vida,	x
cuya sexta parte constituyó su infancia.	$x/6$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubriose su barbilla.	$x/12$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$x/7$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	5
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, que duró tan sólo la mitad de la de su padre a la tierra.	$x/2$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	. . .

70. EL CABALLO Y EL MULO. Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si yo te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba el caballo, y cuántos el mulo?

En lengua vernácula	Usando álgebra
Si yo te tomara un saco	x-1
mi carga	y+1
sería el doble que la tuya.	**y+1=2(x-1)**
Y si te doy un saco,	y-1
tu carga	x+1
se igualaría a la mía	**y-1=x+1**

71. LOS CUATRO HERMANOS. Cuatro hermanos tienen 45 duros. Si el dinero del primero se aumenta en 2 duros, el del segundo se reduce en 2 duros, el del tercero se duplica y el del cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tendrán la misma cantidad de duros. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

En lengua vernácula	Usando álgebra
Los cuatro hermanos tienen 45 euros.	x+y+z+t=45
Si al dinero del primero se le agregan 2 euros	x+2
al del segundo se restan 2 euros	y-2
el del tercero se duplica	2z
y el del cuarto se divide por, dos,	t/2
a todos les quedará la misma cantidad de euros.	x+2 = y-2 = 2z = t/2

72. COMERCIANTES DE VINOS. Dos comerciantes de vinos entraron en París llevando 64 y 20 barriles de vino respectivamente. Como no tenían dinero suficiente para pagar los derechos de aduana, el primero de ellos dio 5 barriles y 40 francos, mientras que el segundo dio 2 barriles, recibiendo 40 francos como cambio. ¿Cuál era el precio de cada barril y su impuesto aduanero?

73. EL REBAÑO MÁS PEQUEÑO. Un granjero que tiene un rebaño de ovejas muy numeroso descubre una gran singularidad con respecto a su número. Si las cuenta de dos en dos, le sobra 1. Lo mismo ocurre cuando las cuenta de 3 en 3, de 4 en 4, etc.... hasta de 10 en 10. ¿Cuál es el rebaño más pequeño que se ajusta a estas condiciones?

74. EL PRECIO DE LOS HUEVOS. La señora Rogelia compró un cierto número de huevos, por los que pagó 60 ptas. Al volver a casa se le cayó la cesta rompiéndosele 2 huevos, con lo que el precio le resultó 12 ptas. más caro por docena, con respecto al que pagó inicialmente en el supermercado. ¿Cuántos huevos compró la señora Rogelia?

75. LOS DIEZ ANIMALES. Cincuenta y seis galletas han de servir de comida a diez animales; cada animal es un perro o un gato. Cada perro ha de obtener seis galletas y cada gato, cinco. ¿Cuántos perros y cuántos gatos hay?

76. LOROS Y PERIQUITOS. Cierta tienda de animales vende loros y periquitos; cada loro se vende a dos veces el precio de un periquito. Entró una señora y compró cinco loros y tres pequeños. Si en vez de eso hubiese comprado tres loros y cinco periquitos habría gastado 20 dólares menos. ¿Cuál es el precio de cada pájaro?

77. COCHES Y MOTOS. En un taller fueron reparados 40 vehículos, entre coches y motos. El número total de ruedas de los vehículos reparados fue de 100. ¿Cuántos coches y cuántas motos se repararon?

78. MONDANDO PATATAS. Dos personas mondaron 400 patatas; una de ellas mondaba tres patatas por minuto, la otra dos. La segunda trabajó 25 minutos más que la primera. ¿Cuánto tiempo trabajó cada una?

79. TINTEROS Y CUADERNOS. Antonio ha comprado 5 tinteros y 4 cuadernos por 70 ptas. Luis ha pagado 46 ptas. por 3 tinteros y 4 cuadernos. ¿Cuánto vale un tintero y un cuaderno?

80. LA BALANZA Y LAS FRUTAS. Sabiendo que 3 manzanas y una pera pesan lo mismo que 10 melocotones, y 6 melocotones y una manzana pesan lo mismo que una pera. ¿Cuántos melocotones serán necesarios para equilibrar una pera?

81. LAS TIERRAS DEL GRANJERO. Un granjero tenía algunas tierras. Un tercio lo destinaba al cultivo del trigo, un cuarto al cultivo de guisantes, un quinto al cultivo de judías, y en las veintiséis hectáreas restantes cultivaba maíz. ¿Cuántas hectáreas tenía en total?

82. LA MÁQUINA DE PETACOS. Unos amigos, antes de echar una moneda en una máquina de petacos, han calculado que, para hacer partida, tienen que conseguir 392.750 puntos cada uno. Uno de ellos ha tenido que marcharse antes de comenzar a jugar con lo que, para obtener la deseada partida, los restantes amigos deben de conseguir 471.300 puntos cada uno. ¿Cuántos eran, inicialmente, los amigos? ¿Cuántos puntos necesitan para hacer partida?

83. LAS MANZANAS DEL HORTELANO. Un hortelano lleva un canasto con manzanas. Encuentra a tres amigos y las da, al primero, la mitad de las manzanas más dos; al segundo, la mitad de las que le quedan más dos y, al tercero, la mitad de las sobrantes más dos. Aún sobró una manzana. ¿Cuántas llevaba al principio?

84. EL PRECIO DE LOS LIMONES. Tres docenas de limones cuestan tantos duros como limones dan por 16 duros. ¿Cuánto vale la docena de limones?

85. SOLDADOS DEL REGIMIENTO. En un regimiento hay 4.000 soldados. Se licencian un cierto número de ellos. De los que quedan sabemos que el 63,636363...% tiene carnet de conducir y que el 92,2297297297...% no usa gafas. ¿Cuántos soldados se licenciaron?

86. VENTA DE HUEVOS. Una campesina llegó al mercado a vender huevos. La primera clienta le compró la mitad de todos los huevos más medio huevo. La segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo. La tercera clienta sólo compró un huevo. Con esto terminó la venta, porque la campesina no tenía más huevos. ¿Cuántos huevos llevó al mercado la campesina?

87. PASTELES PARA LOS INVITADOS. Cierto día Ana estaba atendiendo a 30 invitados. Tenía 100 pasteles para repartir entre ellos. En lugar de cortar ningún .pastel a trozos, decidió dar 4 pasteles a cada uno de los invitados preferidos, y tres a cada uno de los demás invitados. ¿Cuántos eran sus invitados preferidos?

88. LOS PASTELES. Ana y Carlos están merendando pasteles. Ana tiene el triple que Carlos. Carlos no estaba muy conforme. A regañadientes, Ana, dio uno de sus pasteles a Carlos. Ahora todavía tenía el doble que Carlos. ¿Cuántos pasteles más tiene que darle Ana a Carlos para que cada uno tenga los mismos? ¿Cuántos pasteles había en total?

89. MÁS PASTELES. Ana tiene triple de pasteles que Carlos. Diego tiene la mitad que Carlos. Ana tiene 16 pasteles más que Carlos. ¿Cuántos pasteles tiene cada uno?

90. VENGA PASTELES. Carlos se comió 5/16 de los pasteles que había en la mesa. A continuación Diego se comió 7/11 de los pasteles restantes. Quedaron 8 pasteles para Ana. ¿Cuántos pasteles comió cada uno de los otros dos?

91. PASTELES GRANDES Y PEQUEÑOS. Un pastel grande cuesta lo mismo que tres pequeños. Siete grandes y cuatro pequeños cuestas 12 ptas. más que cuatro grandes y siete pequeños. ¿Cuánto cuesta un pastel grande?

92. LA REVENTA. Manuel ha comprado dos entradas para ir al fútbol con un 10% de recargo. Si las vende ahora con un 15% de incremento sobre el precio de taquilla, se gana un 5% sobre el recargo que pagó. ¿De acuerdo?

93. ENCARECER UN 10% Y ABARATAR UN 10%. Una mercancía encareció un 10% y luego abarató en un 10%. ¿Cuándo era más barata, antes de encarecerla o después de abaratarla?

94. ABARATAR UN 10% Y ENCARECER UN 10%. Una mercancía se abarató un 10% y luego se encareció en un 10%. ¿Cuándo era más barata, antes de abaratarla o después de encarecerla?

95. GANANCIA Y PÉRDIDA EN LA VENTA DE LOS CUADROS. Un tratante de arte americano vendió un día dos cuadros por novecientos noventa dólares cada uno. Con uno sacó un beneficio del 10% y con el otro sufrió una pérdida del 10%. "Eso significa que hoy me he quedado igual que estaba", se dijo. ¿Estaba en lo cierto?

96. HÁMSTERES Y PERIQUITOS. El dueño de una pajarería compró cierto número de hámsteres y la mitad de ese número de parejas de periquitos. Pagó los hámsteres a 200 pesetas cada uno, y 100 por cada periquito. Para su venta al público, recargó el precio de compra en un 10 por ciento. Cuando tan sólo le quedaban siete animalitos por vender, descubrió que había recibido por los ya vendidos exactamente lo mismo que había pagado por todos ellos inicialmente. Su posible beneficio viene, pues, dado por el valor colectivo de los siete animales restante. ¿Cuál es el posible beneficio?

97. OPOSICIONES AL AYUNTAMIENTO. A unas oposiciones al Ayuntamiento de Salamanca, se presentaron 37 candidatos. Todos los residentes en Salamanca capital consiguieron plaza y su número representaba el 95% del total de aprobados. ¿Cuántos aprobaron y cuántos eran de Salamanca capital?

98. PASTELES SOBRE LA MESA. Sobre la mesa había una cierta cantidad de pasteles. Ana se comió la mitad y uno más. Blas se comió la mitad de los que quedaban y uno más. Carlos se comió la mitad de los que quedaban y uno más. Diego se comió la mitad de los que quedaban y uno más. Con esto se acabaron los pasteles. ¿Cuántos había sobre la mesa?

99. PASTELES COMO PAGO. Una empresa contrató a un empleado para trabajar durante 26 días. Estipularon que por cada día que trabajara, recibiría 3 pasteles, pero por cada día que holgazaneara no sólo no recibiría ninguno, sino que tendría que darle uno a la empresa. El empleado terminó ganando 62 pasteles. ¿Cuántos días trabajó?

100. EL MANOJO DE ESPÁRRAGOS. Una verdulera de legumbres tenía la costumbre de atar sus espárragos con un bramante de 30 cm. de longitud y formaba así manojos que vendía a 80 ptas. cada uno. Cómo esos manojos le parecían demasiado pequeños, dio en utilizar bramantes de doble longitud y, en consecuencia, vendía sus manojos de espárragos a 160 ptas. cada uno. ¿Calculaba bien la verdulera? ¿Qué precio debería pedir por cada manojo de espárragos?

101. MIDIENDO UN CABLE. Al tratar de medir un cable que tenía en casa, observé lo siguiente: Si medía de 2 en 2 metros me sobraba 1 metro. Si medía de 3 en 3 metros me sobraban 2 metros. Si de 4 en 4 me sobraban 3 metros. Si de 5 en 5 me sobraban 4 metros. Si de 6 en 6 me sobraban 5 metros. Estaba seguro de que el cable medía menos de 100 metros. ¿Cuántos metros medía?

102. VESTIDOS A GOGÓ. Sonia tiene un número de vestidos igual a los que posee Alicia divididos por los que tiene Ana. Alicia posee 42, pero tendría 8 veces los que tiene Gema si tuviera 14 más. ¿Cuántos vestidos tiene Sonia?

103. LOS DOS BEBEDORES. Un inglés y un alemán beben de un barril de cerveza por espacio de dos horas, al cabo de las cuales el inglés se queda dormido y el alemán se bebe lo que resta en 2 horas y 48 minutos; pero si el alemán se hubiera dormido en vez del inglés y éste hubiese continuado bebiendo, habría tardado en vaciar el barril 4 horas y 40 minutos. ¿En cuánto tiempo se lo hubiera bebido cada uno?

104. JUEGO EN FAMILIA. Mis amigos Juan y Pablo, con nuestros hijos Julio, José y Luis, disparamos con dardos sobre una diana con número en cada casilla. Cada uno marcó en cada tiro tantos puntos como tiros hizo (es decir: si alguien tiró 10 tiros anotó diez puntos en cada tiro). Cada padre se anotó 45 puntos más que su hijo. Yo disparé 7 tiros más que Luis y Julio 15 más que Pablo. ¿Cómo se llama mi hijo? ¿Quién es el hijo de Juan? ¿Cuántos puntos se marcaron? ¿Cuántos tiros se tiraron?

105. EL VASO DE VINO. Paco llena un vaso de vino y bebe una cuarta parte; vuelve a llenarlo con agua y bebe una tercera parte de la mezcla. Lo llena por segunda vez de agua y entonces bebe la mitad del vaso. ¿Cuánto vino puro le queda por beber, considerando la capacidad del vaso?

106. LAS CHOVAS Y LAS ESTACAS. Llegaron las chovas y se posaron en estacas. Si en cada estaca se posa una chova, hay una chova que se queda sin estaca. Pero si en cada estaca se posan dos chovas en una de las estacas no habrá chova. ¿Cuántas eran las chovas y cuántas las estacas?

107. LIBROS DESHOJADOS. Un escritor ha compuesto dos libros que suman, entre los dos, 356 páginas. El formato del primero es de 20x15 cm., y el del segundo de 17x12. Si extendiesen las hojas de los dos libros, cubrirían 4'2264 m^2. ¿Cuántas páginas tiene cada libro?

108. LA CUADRILLA DE SEGADORES. Una cuadrilla de segadores debía segar dos prados, uno tenía doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal de la cuadrilla en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminadas las dos siegas, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Cuántos segadores componían la cuadrilla?

109. EL TRUEQUE EN EL AMAZONAS. En una tribu del Amazonas, donde todavía subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio:
a) Un collar y un escudo se cambian por una lanza.
b) Una lanza se cambia por tres cuchillos.
c) Dos escudos se cambian por tres cuchillos.
¿A cuántos collares equivale una lanza?

110. NEGOCIANDO POLLOS. Un granjero y su buena esposa están en el mercado para negociar sus aves de corral por ganado, sobre la base de que 85 pollos equivalen a un caballo y una vaca. Se supone que 5 caballos tienen el mismo valor que 12 vacas.

Esposa: Llevemos otros tantos caballos como los que ya hemos elegido. Entonces tendremos tan sólo 17 caballos y vacas que alimentar durante el invierno.
Granjero: Creo que deberíamos tener más vacas que esas. Más aún, creo que si duplicáramos el número de vacas que hemos elegido, tendríamos en total 19 vacas y caballos, y tendríamos la cantidad exacta de pollos para hacer el canje.
¿Cuántos pollos llevaron al mercado el granjero y su esposa?

111. PAGO EXACTO Y PUNTUAL. Un hombre tomó una posada por 30 días, por precio de un denario cada día. Este huésped no tenía otro dinero, sino 5 piezas de plata que todas ellas valían 30 denarios. Y con estas piezas cada día pagaba la posada, y no le quedaba debiendo nada a la patrona, ni ella a él. ¿Cuántos denarios valía cada pieza? ¿Cómo se pagaba con ella?

112. TRANSPORTE DE UN TESORO. Cuatro muchachos se encontraron un enorme tesoro de monedas de oro. De primera intención los cuatro cargaron con pesos iguales, pero los tres mayores vieron que podían con más, y aumentaron su carga con la mitad de lo que habían tomado. Todavía los dos mayores se vieron capaces de aumentar su carga con un tercio de la que ya llevaban y así lo hicieron. Pero al cargarlo de nuevo, el mayor se atrevió aún a añadir una quinta parte más de lo que llevaba. En total se llevaron entre los cuatro 138 kg. de oro. ¿Cuánto cargó cada uno?

113. NEGOCIANTE METÓDICO. Un negociante separa al principio de cada año 100 dólares para los gastos del año y aumenta todos los años su capital en 1/3. Al cabo de 3 años se encuentra duplicado su capital. ¿Cuál era el capital al empezar el primero de estos años?

114. EL REPARTO DE LAS CASTAÑAS. Tras recoger 770 castañas, tres niñas las repartieron de modo que las cantidades recibidas guardaran proporción con sus edades. Cada vez que María se quedaba con 4 castañas, Lola tomaba 3, y por cada 6 que recibía María, Susana tomaba 7. ¿Cuántas castañas recibió cada niña?

115. SE QUEDÓ SIN DISCOS. Antonio repartió entre sus amigos los discos que tenía. A uno le regaló un disco y 1/7 de los restantes, a otro dos discos y 1/7 de todos los restantes, a un tercero, tres discos y 1/7 de los restantes y así sucesivamente, hasta que repartió todos sus discos. ¿Cuántos discos tenía y entre cuántos amigos los repartió?

116. EL REPARTO DE LA HERENCIA. Un padre, al morir, dejó establecido que el hijo mayor recibiría 100.000 ptas. más la quinta parte del resto. El siguiente 200.000 ptas. más la quinta parte del nuevo resto. Y en la misma forma cada hijo iría recibiendo 100.000 más que el anterior y la quinta parte del resto. Al final todos recibieron igual cantidad. Curiosamente todos los amigos recibieron la misma cantidad de discos. ¿Cuántos herederos había y qué cantidad recibió cada uno?

117. LOS LADRONES Y LAS CÁMARAS DE FOTOS. En una banda de ladrones cada uno tenía un grado diferente. Una noche después de haber robado una partida de cámaras fotográficas, el jefe les dijo: "El de menor grado se quedará con una cámara, el del grado inmediatamente superior se quedará con dos, el de tercer grado con tres y así sucesivamnente". Los ladrones se rebelaron contra esta injusticia y el más audaz de ellos dijo: "Tomaremos cinco cámaras cada uno". Y así se hizo. ¿Cuántas cámaras fotográficas habían robado?

118. LOS LADRONES Y LOS CUADROS. El jefe de unos bandidos decía a sus hombres: "Hemos robado unas piezas de tela. Si cada uno de nosotros toma seis, quedarán cinco piezas. Pero si cada uno de nosotros quiere siete, nos faltarían ocho". ¿Cuántos eran los ladrones? (Resolverlo sin utilizar el álgebra)

119. LOS LADRONES Y LAS TELAS. Unos ladrones robaron varios rollos de tela. Si repartían 6 para cada uno les sobraban 5. Si repartían 7 para cada uno les faltaban 8. ¿Cuántos ladrones y cuántos rollos de tela había?

120. MAESTROS Y ESCOLARES. En una comunidad existen 1.000 alumnos que son atendidos por 19 personas entre maestros y maestras.
Cada maestro atiende 30 alumnos más que cada maestra. Últimamente se decidió aumentar en 8 alumnos más la clase de cada maestra, reduciéndose así las de los maestros. ¿A cuántos niños atiende ahora cada maestro?

121. EL GRANJERO Y LOS POLLOS. Un granjero le dice a su mujer: "No sé qué hacer. Si vendo 75 pollos, las reservas de pienso que tenemos nos durarán 20 días más de lo previsto, lo que nos permitirá terminar la campaña sin más abastecimientos, que ahora están difíciles. Pero como los pollos se pagan bien, tal vez convenga comprar 100 pollos, con lo que nuestras reservas de pienso nos durarán 15 días menos".

Dejando al granjero que resuelva el dilema con su mujer, ¿cuántos pollos tiene el granjero?

122. ORIGINAL TESTAMENTO. Un mercader estando enfermo hizo testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda, ordenando que al hijo primero le diesen la sexta parte de la hacienda, y 300 ducados más, y al segundo la sexta parte del restante, y 600 ducados más, y al tercero la sexta parte del restante y 900 ducados más, y con este orden en los demás, dando siempre a cada uno la sexta parte del restante, y 300 ducados más al uno que al otro. Muerto el padre, partieron la hacienda, y hallaron que tanto vino al uno como al otro. Pídese cuántos hijos dejó el padre, cuánta hacienda, y cuanto vino por cada uno.

123. LOS GUARDIANES DE LAS NARANJAS. Un vagabundo furtivo entró en un huerto ajeno para apropiarse algunas naranjas. Al salir tropezó con un guardián que, compadecido por su necesidad, le dejó pasar haciéndole entregar la mitad de las naranjas que llevaba y otra media naranja. Con el segundo guardián consiguió por lástima de sus ruegos, que también le dejase pasar, pero dándole también la mitad de las naranjas que tenía más media naranja. Y lo mismo exactamente le sucedió con un tercer guardián. Después de esto el ladronzuelo se vio en campo libre y en posesión de dos naranjas. ¿Cuántas naranjas había cogido al principio?

124. LAS PERLAS DEL RAJÁ. Un rajá dejó en herencia a sus hijas cierto número de perlas. Tenían que repartírselas de una forma muy especial. Cada hija recibiría: La mayor, una perla más 1/7 de las restantes, la 2ª dos perlas más 1/7 de las restantes, la 3ª tres perlas más 1/7 de las restantes, y así sucesivamente todas las demás hijas. Las hijas menores se sintieron perjudicadas por este reparto. El juez, tras contar las perlas, les dijo que todas ellas se llevarían el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas y perlas había?

125. VENTA DE HUEVOS. Una campesina llegó al mercado a vender huevos. La primera clienta le compró la mitad de los huevos más medio huevo. La segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo. La tercera clienta sólo compró un huevo. Con esto terminó la venta, porque la campesina no tenía más huevos. ¿Cuántos huevos llevó al mercado la campesina?

126. VENTA DE GANSOS. Un campesino fue al mercado a vender gansos. Vendió al primer cliente la mitad de los gansos más medio ganso. Al segundo cliente la tercera parte del resto más un tercio de ganso. Al tercer cliente un cuarto de los que le quedaban más tres cuartos de ganso. Al cuarto cliente un quinto de los que le quedaban más un quinto de ganso. Volvió a casa con 19 gansos que le sobraron. ¿Cuántos gansos llevó al mercado el campesino? Hay que tener en cuenta que ningún ganso fue dividido.

127. LOS 3 PANES Y LAS 3 MONEDAS. Un pastor tiene 2 panes y otro 1 pan. Se encuentran con un cazador que no lleva comida. Juntan los 3 panes y los tres comen partes iguales. Al despedirse, el cazador les deja 3 monedas. ¿Cómo deben repartirse las monedas los pastores?

128. CURIOSO TESTAMENTO. Un hombre, cuya mujer está a punto de dar a luz, muere, disponiendo en su testamento lo siguiente: "Si la criatura que va a nacer es niño, éste se llevará 2/3 de la herencia y 1/3 la madre. Si es niña, ésta se llevará 1/3 y 2/3 la madre." Las posesiones del padre eran únicamente 14 hermosas vacas. Para complicar las cosas, sucedió que nacieron mellizos, niño y niña. ¿Cómo deben repartirse las 14 vacas entre los tres?

129. ARAÑAS Y ESCARABAJOS. Un chiquillo cazó varias arañas y escarabajos, en total ocho, y los guardó en una caja. Si se cuenta el número total de patas que corresponde a los 8 animales resultan 54 patas. ¿Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?

130. VACAS, CERDOS Y OVEJAS (1). Un granjero se gastó 100 dólares en comprar 100 animales de tres clases. Cada vaca le costó 10 dólares, cada cerdo, 3, y cada oveja, medio dólar. Suponiendo que haya comprado al menos una vaca, un cerdo, y una oveja, ¿cuántos animales de cada clase compró el granjero?

131. VACAS, CERDOS Y OVEJAS (2). Un granjero se gastó 100 dólares en comprar 100 animales de tres clases. Cada vaca le costó 5 dólares, cada cerdo, 2, y cada oveja, medio dólar. Suponiendo que haya comprado al menos una vaca, un cerdo, y una oveja, ¿cuántos animales de cada clase compró el granjero?

132. VACAS, CERDOS Y OVEJAS (3). Un granjero se gastó 100 dólares en comprar 100 animales de tres clases. Cada vaca le costó 4 dólares, cada cerdo, 2, y cada oveja, un tercio de dólar. Suponiendo que haya comprado al menos una vaca, un cerdo, y una oveja, ¿cuántos animales de cada clase compró el granjero?

133. NEGOCIO PARA TRES. Tres feriantes tienen cada uno un cierto número de reales. El primero compra vino a los otros dos, pagándoles tantos reales como ellos tienen. Después, el segundo compra garbanzos a los otros dos, pagando a cada uno tantos reales como ellos tienen. Por último, el tercero compra aceite a los otros dos, pagándole a cada uno tantos reales como ellos tienen. Terminados estos negocios se vuelven a su casa con 48 reales cada uno. ¿Con cuántos reales habían llegado a la feria?

134. LOS ASPIRANTES AL PUESTO DE TRABAJO. Una gran empresa proyectaba abrir una sucursal en cierta ciudad y puso anuncios solicitando tres empleados. El gerente eligió a tres jóvenes que parecían prometer, y les dijo: "Sus sueldos han de ser, al empezar, de 1.000 dólares anuales, pagaderos por semestres. Si su trabajo es satisfactorio y decidimos que sigan, se les aumentará el sueldo; pero, díganme que prefieren, ¿un aumento de 150 dólares anuales o uno de 50 dólares cada semestre?" Los dos primeros aceptaron la primera alternativa, pero el tercero, después de pensarlo, eligió la segunda. Inmediatamente lo pusieron al frente de los otros dos. ¿Por qué? ¿Fue acaso que al gerente de personal le gustó su modestia y su aparente deseo de ahorrarle dinero a la compañía?

135. CURIOSA PARTIDA (1). Tres jugadores convienen en que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con 200 ptas. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

136. CURIOSA PARTIDA (2). Siete jugadores convienen en que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros seis. Jugaron siete partidas y cada vez perdió un jugador distinto; es decir, perdieron todos ellos. Al acabar todos tenían el mismo dinero: 12 pesetas. y 80 céntimos. ¿Con cuánto dinero empezó cada uno el juego?

NÚMEROS

Problemas sobre números, curiosidades numéricas, etc.

137. PACIENCIA Y PROGRESIÓN. Las nueve cifras de los tres números:

ABC DEF GHI

son distintas. El segundo es el doble del primero, y el tercero es triple del primero. Encuentra los tres números.

138. TODOS LOS PRIMOS. Los números primos detectados hasta ahora son muchísimos, pero hay una cantidad finita de ellos. Multipliquémoslos todos entre sí. No, no se ponga a multiplicar; imagine que alguien ya hizo esa multiplicación por Vd. Llamemos al resultado P.

a) ¿Con qué cifra del 0 al 9 termina P?

b) La segunda cifra (la de las decenas), ¿es par o impar?

139. ¿QUE NÚMERO SOY? Soy capicúa, del 2 al 10 sólo hay un divisor mío, tengo cuatro cifras, pero algunos me ven como si fuera un 9. ¿Qué número soy?

140. AÑO DE NACIMIENTO. Restad a vuestro año de nacimiento la suma de las cuatro cifras que lo componen. Se obtiene un resultado divisible por 9. ¿Por qué?

141. MENOR NÚMERO. ¿Cuál es el menor número que, dividido por 2, 3, 4, 5 y 6 da respectivamente los restos 1, 2, 3, 4 y 5?

142. EL MENOR CON X DIVISORES. ¿Cuál es el menor número con 7 divisores y no más? ¿Y, con 8 divisores?

143. LA BASE DESCONOCIDA. Mi hijo ha aprendido a contar según una base no decimal, de manera que en lugar de escribir 136 escribe 253. ¿Cuál es esta base?

144. PRODUCTO DE CUATRO ENTEROS CONSECUTIVOS. El producto de cuatro números enteros consecutivos es 3.024. ¿Cuáles son estos números?

145. PRIMERA ESCRITURA DEL CIEN. Escribe el número 100 empleando cinco cifras iguales.

Éstas sólo podrán estar separadas por los signos matemáticos +, -, x, : y ( ).

146. DIVISIONES EXACTAS. Escoge un número de tres cifras y forma otro repitiendo el primero. Por ejemplo: 234234. Divide este número entre 7; después el cociente entre 11 y, por último, el nuevo cociente entre 13. Obtienes divisiones parciales exactas y al final tu número inicial, ¿verdad? ¿Por qué?

147. CON LAS CIFRAS DEL 1 AL 9. Los números del 2 al 9 pueden ser expresados como fracciones en las cuales cada dígito, excepto el 0, aparece una y sólo una vez. Por ejemplo: 2=13458/6729, 4=15768/3942. Encuentra fracciones similares que den por resultado 3, 5, 6, 7, 8 y 9.

148. EL NÚMERO 25.

1. El producto de cualquier número entero por 100 da como resultado el citado número con dos ceros más a su derecha.
2. El cociente de 100 entre 4 da como resultado el número 25.
3. El producto de cualquier número por 25, se puede obtener, dividiendo entre 4, el citado número con dos ceros más a su derecha.

Ejemplo. 357419 x 25 = 8935475. Obtenido así: 35741900 : 4 = 8935475.

149. EL NÚMERO 142.857.143.

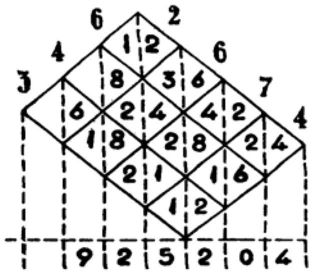
1. El producto de cualquier número de 9 cifras por 1.000.000.001 da como resultado el citado número de 9 cifras duplicado.
2. El cociente de 1.000.000.001 entre 7 da como resultado el número 142.857.143.
3. El producto de cualquier número de 9 cifras por el 142.857.143, ¿cómo se puede obtener rápidamente sin tener que realizar la multiplicación?

150. ERROR MECANOGRÁFICO. Una mecanógrafa inexperta estaba copiando un libro de matemáticas, donde debía escribir $5^4 2^3$, escribió 5423, que es muy distinto. ¿Podría Vd. encontrar otras cuatro cifras, para que ambos modos de escribir signifiquen el mismo número? (En este caso el error mecanográfico no hubiese tenido importancia en el resultado).

151. CURIOSA PROPIEDAD. 17^3=4.913. Si ahora sumamos las cifras del resultado 4+9+1+3, volvemos a tener el 17. Lo mismo ocurre con el 18. 18^3=5.832. 5+8+3+2=18. No muy lejos de ellos hay otros dos números, consecutivos, que gozan de la misma propiedad. ¿Cuáles son?

152. SEGUNDA ESCRITURA DEL CIEN. Escribe el número 100 con nueve cifras idénticas. Éstas sólo podrán estar separadas por los signos +, -, x, : y ( ).

153. MÉTODO ÁRABE DE MULTIPLICACIÓN. Todavía lo practican algunos árabes de ciertas regiones.
En el ejemplo se muestra el producto de 346 x 2674 = 925204.



Realiza por este método: a) 789 x 1358. b) 5432 x 9876. c) 1234 x 56789.

154. CON 4 TRESES. Empleando cuatro treses (ni más ni menos) y las operaciones habituales: (+, -, x, /, $\sqrt{\ }$, !, potencias, etc.) expresar todos los números del 1 al 10. Se puede usar la notación anglosajona 0'3=.3=3/10. También se admite: 0,3 período=0,3333...=3/9.

155. CON 4 CINCOS. Empleando cuatro cincos (ni más ni menos) y las operaciones habituales: (+, -, x, /, $\sqrt{\ }$, !, potencias, etc.) expresar todos los números del 1 al 10. Se puede usar la notación anglosajona 0'5=.5=5/10. También se admite: 0,5 período=0,5555...=5/9.

SERIES - SECUENCIAS

Problemas sobre series, secuencias, sucesiones, ...

156. ALFA COMO PISTA. ¿Qué representa la siguiente secuencia?
0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7, 3, 1.

157. PRINCIPIO Y FIN. ¿Qué representa la siguiente secuencia?
6, 8, 62, 63, 66, 72, 73, 76, 81, 84, ...

158. CON CALCULADORA MEJOR. ¿Qué representa la siguiente secuencia?
6, 2, 5, 5, 4, 5, 6, 3, 7, 6.

159. SECUENCIA QUE RUEDA. ¿Qué representa la siguiente secuencia?
0, 32, 15, 19, 4, 21, 2, 15, 17, 34, 6, 27, 13, ...

160. SON PARIENTES. ¿Qué emparenta a todas estas palabras?
DOLOR - RESTA - MILLAR - FAZ - SOLAR - LAGO - SIGLO

161. SOND y SOND. Las letras iniciales de los números 7, 8, 9 y 10 forman la secuencia SOND. ¿Las iniciales de qué otros cuatro elementos, tomados también en orden, dan la misma secuencia?

162. VAYA CRITERIO. Siguiendo un criterio lógico, se tachan los números naturales que no cumplan ese criterio. ¿Cuál es el criterio, si al final quedan únicamente 1, 2 y mil?

163. EXTRAÑA PARTIDA DE AJEDREZ. Las siguientes anotaciones parecen corresponder a una partida de ajedrez.
A1C; A2D; R1T; P3T; D14R.
Pero la última es más bien extraña. ¿De qué se trata entonces?

164. NI EN UNA SEMANA. ¿Qué representa la siguiente secuencia?
O, S, S, S, S, S, O.
Apuesto a que no lo saca Vd. ni en una semana.

JUEGOS DE ESTRATEGIA

No podrían faltar los problemas que surgen a partir de los juegos de estrategia. Suelen ser muy interesantes.

165. DE HOLA RAFFAELA EN TVE. Los números del 1 al 15 están escritos en tres filas como se muestra más adelante. El juego, que es para competir dos jugadores entre sí, consiste en tomar alternativamente cada jugador los que quiera de una fila solamente. El que se lleve el último pierde. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12
13 14 15

166. DEL ESTILO DEL DE RAFFAELA. Los números del 1 al 16 están escritos en cuatro filas como se muestra más adelante. El juego, que es para competir dos jugadores entre sí, consiste en tomar alternativamente cada jugador los que quiera de una fila solamente. El que se lleve el último gana. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12
13 14 15
16

167. LLEGAR A 50. Es un juego para dos jugadores. Los jugadores eligen por turnos un número entero entre 1 y 5, y los suman a los números elegidos anteriormente. El primer jugador que consigue sumar exactamente 50 es el ganador. Veamos una partida:

Primer jugador	3		4		1		5		4		5		1	
Segundo jugador		5		4		3		5		4		1		5
Suma total	3	8	12	16	17	20	25	30	34	38	43	44	45	50

¡Gana el segundo jugador!

Después de jugar algunas partidas, ¿puedes encontrar alguna estrategia ganadora?

CUADRADOS MÁGICOS

*Los **cuadrados mágicos** son ordenaciones de números en celdas formando un cuadrado, de tal modo que la suma de cada una de sus filas, de cada una de sus columnas y de cada una de sus diagonales dé el mismo resultado.*

Si la condición no se cumple para las diagonales, entonces se llaman "cuadrados latinos".

El origen de los cuadrados mágicos es muy antiguo. Los chinos y los indios los conocían antes del comienzo de la era cristiana.

Los cuadrados mágicos se clasifican de acuerdo con el número de celdas que tiene cada fila o columna. Así, uno con 5 celdas se dice que es de quinto orden.

Cuadrados mágicos de orden impar

Veamos un modo de construir fácilmente cuadrados mágicos de orden impar.

1) Tomemos una serie aritmética cualquiera, para mayor comodidad la serie de los números naturales, y coloquemos el número 1 en la celda central de la fila superior.
2) La cifra consecutiva a una cualquiera debe colocarse en la celda que le sigue diagonalmente hacia arriba y hacia la derecha.
3) Si al hacer esto se sale del cuadrado por el límite superior del contorno del mismo, saltaremos a la celda de la columna siguiente hacia la derecha y en su fila inferior, si se sale por la derecha, se sigue por la primera celda, a partir de la izquierda, de la fila superior.
4) Cuando la celda siguiente está ocupada, el número consecutivo de la serie se coloca en la celda inmediatamente inferior a la del número precedente, comenzando así un nuevo camino en la dirección de la diagonal.

Como ejemplo, realicemos un cuadrado mágico de quinto orden:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Finalmente, puesto que las sumas siguen siendo iguales entre si cuando multiplicamos todos los números de las casillas por un mismo factor, o les añadimos un mismo sumando, es claro que podemos alterar fácilmente, en esta forma el llenado de las casillas.

168. DE ORDEN 3. Construye un cuadrado mágico de 3x3. (Suma=15)

169. DE ORDEN 4. Construye un cuadrado mágico de 4x4. (Suma=34)

170. ORDEN 3, NUEVE CONSECUTIVOS, SUMA 24. Coloca nueve números consecutivos en un cuadrado de 3x3, de manera que la suma de las filas y la de las columnas sea 24.

171. ORDEN 3, TRES CONSECUTIVOS, SUMA 18. Coloca tres números consecutivos en un cuadrado de 3x3, de manera que la suma de las filas y la suma de las columnas sea 18.

172. A COMPLETAR. Completa el siguiente cuadrado para que sea "mágico".

67		43
	73	

173. COMPLETA 3x3. Completa los casilleros que faltan para que resulte mágicos el siguiente cuadrado:

7		5
	8	
11		9

174. CALCULA: A, B, C, D, E. Hallar A, B, C, D y E en el siguiente cuadrado mágico:

15	A	35
50	B	C
25	D	E

PESADAS

Los problemas sobre pesas y pesadas suelen ser muy interesantes. En su resolución se usan razonamientos matemáticos.

175. LAS PESAS DEL MERCADER. Un mercader tenía una pesa de 40 Kg. que se le cayó, rompiéndose en 4 pedazos cuyos pesos respectivos eran números exactos de kilos, y por medio de los cuales podía pesar cualquier carga que fuese; asimismo, un número exacto de kilos comprendido entre 1 y 40 ambos inclusive. Determinar el peso de cada uno de los 4 pedazos en que se rompió la pesa inicial.

176. LAS 30 MONEDAS DE ORO. Como cada año, un rey espera que cada uno de sus 30 vasallos le entregue 30 monedas de oro. Pero sabe que uno de ellos ha adoptado la triste costumbre de darle monedas de 9 gr. y no de 10 como él ordena. ¿Cómo podrá, con una sola pesada, identificar al culpable, con el fin de cortarle la cabeza?

177. CON SÓLO DOS PESAS. El juego de pesas de una balanza consta sólo de dos pesas, una de 10 gramos y la otra de 40 gramos. En sólo tres pesadas, separa 1.800 gramos de semillas en dos bolsas de 400 y 1.400 gramos.

178. ENGAÑANDO A LA BALANZA. Cinco gruesas niñas que descubrieron que pesándose de a dos e intercambiándose de a una por vez, podían conocer el peso de todas gastando una sola moneda. Encontraron que de a pares pesaban 129 kilos, 125, 123, 122, 121, 120, 118, 116 y 114. Descubre el peso de cada una por separado.

179. LAS 9 BOLAS. Se tienen 9 bolas semejantes, entre las cuales hay una más pesada que las otras. No se sabe cuál es y se trata de hallarla mediante dos pesadas solamente, realizadas en una balanza que carece de pesas. (Dos pesadas comparativas)

180. LAS 27 BOLAS. Se tienen 27 bolas semejantes, entre las cuales hay una más pesada que las otras. No se sabe cuál es y se trata de hallarla mediante tres pesadas solamente, realizadas en una balanza que carece de pesas. (Tres pesadas comparativas)

181. LAS 81 BOLAS. Se tienen 81 bolas semejantes, entre las cuales hay una más pesada que las otras. No se sabe cuál es y se trata de hallarla mediante cuatro pesadas solamente, realizadas en una balanza que carece de pesas. (Cuatro pesadas comparativas)

MÓVILES

La mayor parte de la gente se hace con facilidad un lío en los problemas relativos a velocidades medias. Hay que tener mucho cuidado al calcularlas.

La velocidad media de cualquier viaje se calcula siempre dividiendo la distancia total por el tiempo total.

182. PROMEDIANDO. Una persona camina al ritmo de 2 km/h al subir una cuesta, y al de 6 km/h al bajarla. ¿Cuál será la velocidad media para el recorrido total? (Se supone, claro está, que tan pronto alcanza la cima, inicia el descenso)

183. AL CAMPO DE MERIENDA. El otro día, cuando fuimos al campo de merienda, el viaje de ida lo hice a una velocidad media de 60 km/h. y el de vuelta, a 30 km/h. ¿Qué velocidad media conseguí en el viaje completo?

184. UN ALTO EN EL CAMINO. Los Gómez y los Arias, acuerdan realizar un viaje al alimón. Parten a la vez de Madrid, y fijan el lugar de la primera parada. Llevaban esperando media hora los Gómez, cuando llegó el coche de los Arias. Estos fueron con una velocidad media de 60 km/h. y los Gómez con una velocidad media de 70 km/h. ¿A cuántos kilómetros de Madrid estaba situada la primera parada?

185. EL ESQUIADOR FRUSTADO. Un esquiador sube en telesilla a 5 km/h. ¿A qué velocidad tendrá que descender esquiando para conseguir una velocidad de 10 km/h. en el recorrido total?

186. EL AVIÓN Y EL VIENTO. Un avión vuela en línea recta desde el aeropuerto A hasta el aeropuerto B, y a continuación regresa también en línea recta desde B hasta A. Viaja con aire en calma, manteniendo el motor siempre en el mismo régimen. Si soplara un fuerte viento de A hacia B, y el número de revoluciones se mantiene como antes, ¿sufrirá alguna modificación el tiempo invertido en el trayecto de ida y vuelta?

187. EL BÓLIDO Y LOS TRES MOJONES. Un automóvil pasa frente a un mojón que lleva el número kilométrico AB. Una hora después pasa frente al mojón BA, una hora más tarde frente al mojón A0B. ¿Qué números tienen los mojones y cuál es la velocidad (constante) del automóvil?

GEOMETRÍA

El origen de la geometría

Creer que una ciencia existe a partir de determinado momento o de tal acontecimiento parece una ingenuidad. Sin embargo, en sus Historias, Herodoto, que vivió en Grecia en el siglo V antes de Cristo, relata el origen de la geometría (palabra que en griego significa medición de la tierra).

"Se cuenta también que el rey Sesostris dividió la tierra entre todos los egipcios, otorgando a cada uno un rectángulo de igual tamaño, con la intención de cobrar la renta por medio de un impuesto que sería recaudado anualmente. Pero cuando el paso del Nilo redujese una porción, el súbdito correspondiente debía acudir al rey para notificarlo. Entonces éste mandaba a sus inspectores, que controlasen la reducción del terreno, de manera que el propietario pagase la parte proporcional del impuesto. De esta forma, me parece, se originó la geometría, que se difundió más tarde por la Hélade".

Problemas geométricos

Cuando un matemático se tropieza por primera vez con teoremas como algunos de los que veremos a continuación, casi siempre manifiesta admiración, seguida invariablemente, de la exclamación: "¡Precioso!".

No podemos decir exactamente qué entienden por "precioso" los matemáticos. Quizá tenga que ver con la sorpresa de lo inesperadamente sencillo. Pero todos los matemáticos perciben la belleza de un teorema, o de la demostración de un teorema, con la misma claridad con que se aprecia la belleza de las personas.

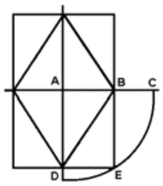
Por la riqueza de sus aspectos visuales, la geometría guarda un tesoro de hermosos teoremas y preciosas demostraciones. Es frecuente que la resolución de problemas geométricos resulte prácticamente trivial atinando a usar uno de los teoremas fundamentales de la geometría euclídea.

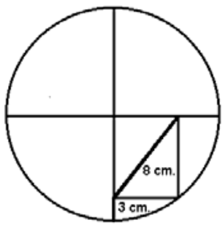
188. TRIÁNGULOS ORIGINALES. ¿Cuál tiene una superficie mayor, un triángulo con lados 5, 5, 6 o uno con lados 5, 5, 8?

189. EL VALOR DE LA MEDIANA. En el triángulo ABC, rectángulo en A, la hipotenusa a=10, el cateto b=8 y el cateto c=6. Hallar en 30 segundos el valor de la mediana AM.

Hay problemas que nos dejan perplejos porque la respuesta elemental, a menudo se complica de un modo inverosímil.

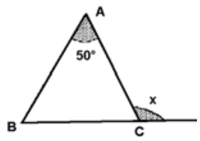
190. EL LADO DEL ROMBO. En una plaza circular de R=9 m. se quiere construir un estanque de forma rómbica, según la figura. ¿Cuánto mide el lado del rombo?



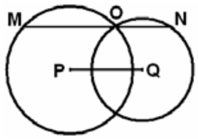


191. EL RADIO DEL CÍRCULO. Teniendo en cuenta la figura, hallar el radio del círculo.

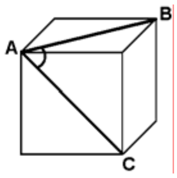
192. EL ÁNGULO EXTERIOR. En el triángulo isósceles ABC el ángulo A mide 50°. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



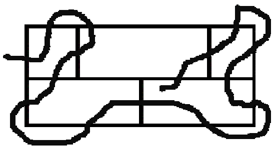
193. GOLPE DE VISTA. Dos circunferencias secantes tienen por centros respectivos P y Q. El segmento PQ mide 3 cm.. Por uno de los puntos (O) donde se cortan las circunferencias trazamos una recta paralela al segmento PQ. Sean M y N los puntos donde corta dicha recta a las circunferencias. ¿Cuánto mide MN?



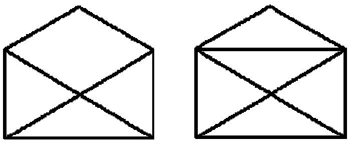
194. EL ÁNGULO DE LAS DIAGONALES. ¿Cuántos grados mide el ángulo que forman las dos diagonales de las caras del cubo?



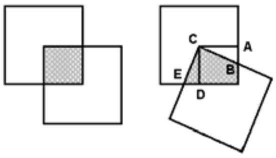
195. EL CRUCE DE LA RED. Se trata de trazar una línea continua a través de la red cerrada de la figura, de modo que dicha línea cruce cada uno de los 16 segmentos que componen la red una vez solamente. La línea continua dibujada no es, evidentemente una solución del problema, ya que deja un segmento sin cruzar. Se ha dibujado solamente a fin de hacer patente el significado del enunciado del problema.



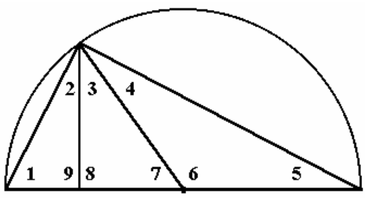
196. DIBUJANDO SOBRES. En la figura tenemos dos sobres ligeramente diferentes ya que el segundo tiene una línea más, que marca la doblez de cierre. ¿Es posible dibujar cada uno de los sobres sin levantar el lápiz del papel, y sin pasar más de una vez por el mismo trazo.



197. CUADRADOS QUE SE CORTAN. Tenemos dos cuadrados iguales superpuestos, de manera que un vértice de uno está siempre en el centro del otro. ¿En qué posición el área comprendida entre los dos cuadrados es la mayor posible?



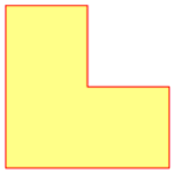
198. NUEVE ÁNGULOS. Calcula el valor de todos los ángulos de la figura sabiendo que el ángulo 1 vale 70E.



CONSTRUCCIONES

Construcciones, divisiones, trasposiciones, ... con palillos, cerillas, monedas, triángulos, cuadrados, trapecios, polígonos, etc.

199. EN 4 PIEZAS IDÉNTICAS. Divide la figura adjunta en cuatro piezas idénticas.



200. LOS SEIS PALILLOS. Con seis palillos formar cuatro triángulos equiláteros.

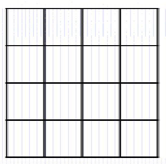
201. LOS SEIS CUADRADOS. Formar con 12 cerillas 6 cuadrados iguales.

202. SEIS SOLDADOS, SEIS FILAS. Formar 6 filas, de 6 soldados cada una, empleando para ello 24 soldados.

203. DOS FILAS, TRES MONEDAS. Colocar 4 monedas como si fueran los vértices de un cuadrado. Moviendo sólo una de ellas, conseguir dos filas con tres monedas cada una.

204. LAS DOCE MONEDAS. Con 12 monedas formamos un cuadrado, de tal modo que en cada lado haya 4 monedas. Se trata de disponerlas igualmente formando un cuadrado, pero con 5 monedas en cada lado del cuadrado.

205. MUCHOS CUADRADOS. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura adjunta?



CRIPTOGRAMAS

*La **criptografía** es, como lo indica su etimología, el arte de las escrituras secretas. Su objeto es transformar un mensaje claro en un mensaje secreto que en principio sólo podrá ser leído por su destinatario legítimo (operación de cifrar); a esto sigue la operación inversa llevada a cabo por el destinatario (operación de descifrar). Restablecer el texto claro partiendo del texto cifrado sin que de antemano se conozca el procedimiento de cifras es el **desciframiento**.*

Si dejamos de lado los textos bíblicos en cifra, discutidos y discutibles, el procedimiento criptográfico más antiguo que se conoce es la escitala de los lacedemonios, de la que Plutarco nos dice que fue empleada en la época de Licurgo (siglo IX antes de nuestra era). La escitala era un palo en el cual se enrollaba en espiral una tira de cuero. Sobre esa tira se escribía el mensaje en columnas paralelas al eje del palo. La tira desenrollada mostraba un texto sin relación aparente con el texto inicial, pero que podía leerse volviendo a enrollar la tira sobre un palo del mismo diámetro que el primero.

Los romanos emplearon un procedimiento muy ingenioso indicado por Eneas el Tácito (siglo IV a de C.) en una obra que constituye el primer tratado de criptografía conocido. El procedimiento consistía en enrollar un hilo en un disco que tenía muescas correspondientes a las letras del alfabeto. Para leer el mensaje bastaba con conocer su primera letra. Si el correo era capturado sólo tenía que quitar el hilo del disco y el mensaje desaparecía. Pero posteriormente este procedimiento se perdió. Por Suetonio conocemos la manera en que Julio César cifraba las órdenes que enviaba a sus generales; sus talentos de criptógrafo no igualaban a los del general. Julio César se limitaba a utilizar un alfabeto desplazado en tres puntos: A era reemplazada por D, B por E, etc.

Hoy el arte de cifrar utiliza las técnicas de la electrónica y ya no tiene ninguna relación con los procedimientos que acabamos de describir.

Todos los procedimientos de cifrar antiguos y modernos, a pesar de su diversidad y de su número ilimitado, entran en una de las dos categorías siguientes: transposición o sustitución. La transposición consiste en mezclar, de conformidad con cierta ley, las letras, las cifras, las palabras o las frases del texto claro. La sustitución consiste en reemplazar esos elementos por otras letras, otras cifras, otras palabras u otros signos.

La criptografía es un arte que desempeñó un importante papel en el desenvolvimiento de la historia. La ***criptaritmética*** *no es más que un juego. No sé en qué época se inventó, pero los aficionados a las variedades comenzaron a interesarse por ellas en el primer congreso internacional de recreaciones matemáticas que se reunió en Bruselas en 1935.*

La criptaritmética consiste en reemplazar las cifras por letras en la transcripción de una operación de aritmética clásica, de una ecuación. El problema consiste en hallar las cifras que están "bajo" las letras. Para complicar las cosas, en ciertos sitios se puede marcar simplemente el lugar de una cifra con un punto o un asterisco. En el caso extremo solo quedan asteriscos.

Es fácil ver que la criptaritmética es un procedimiento de cifrar por sustitución y que la clave es una regla matemática.

Los enunciados criptaritméticos son a veces seductores; sus soluciones no presentan dificultades matemáticas pero en cambio exigen numerosísimas hipótesis y, en consecuencia, cálculos largos y trabajosos que implican grandes riesgos de confusión.

Por eso se aconseja que se dediquen a este género de problemas sólo los lectores pacientes y minuciosos.

206. PARA PRINCIPIANTES. Resuelve: PAR + RAS = ASSA.

207. SEÑAL DE SOCORRO. Resolver: IS + SO = SOS.

208. ÚNICA SOLUCIÓN. Éste tiene solución única: ABCDE x 4 = EDCBA.

209. FACILÓN. Reconstruir la suma: 3A2ABC + C8A4DD = E1DE19.

210. MUY FACILÓN. Reconstruir el siguiente: R1G + 1G3 + 305 = GN5.

211. OTRO MUY FACILÓN. Reconstruir éste: PLAYA - NADAR = 31744.

212. SUMA FÁCIL. Reconstruir la suma: 3AB32C + B2DECA = F51CD6.

213. OTRA SUMA FÁCIL. Reconstruir la suma: ABC23D + C4EFGB = B769C7.

214. OTRA SUMA FÁCIL. Reconstruir la suma: ABC52C + D31ECA = G45GH7.

RELOJES

En la resolución de problemas relativos a relojes se usan razonamientos matemáticos.

215. OJO AL MINUTERO. Entre las 12 del mediodía y las 12 de la noche, ¿cuántas veces pasa el minutero sobre la aguja horaria?

216. A LAS TRES Y DIEZ. Siendo las tres en punto, el ángulo formado por la aguja horaria y el minutero del reloj es de 90E. ¿Cuánto medirá el ángulo diez minutos después?

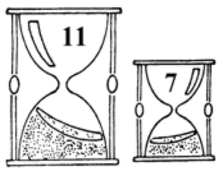
217. EL RELOJ DE CUCO. Un reloj de cuco tarda 5 segundos en dar las 6. ¿Cuánto tardará en dar las 12?

218. SONÓ EL DESPERTADOR. Mi tío estaba tan cansado que se acostó a las 9 de la noche, con la intención de dormir hasta las 10 de la mañana del día siguiente. Para ello puso su despertador a las 10. Unos 20 minutos después de acostarse ya estaba dormido. ¿Cuánto pudo descansar antes de que el despertador sonase?

219. LOS DOS RELOJES. Puse en marcha dos relojes al mismo tiempo y descubrí que uno de ellos se atrasaba dos minutos por hora y que el otro se adelantaba un minuto por hora. Cuando volví a fijarme, el que se adelantaba marcaba exactamente una hora más que el otro. ¿Durante cuánto tiempo habían estado funcionando estos dos relojes?

220. EL MINUTERO TRES VECES MENOS. Miro el reloj. A partir de ahora la aguja de las horas va a tardar justo el triple de tiempo que el minutero para llegar al número 6. ¿Qué hora es?

221. DOS RELOJES DE ARENA. Disponiendo de un reloj de arena de 7 minutos, y de otro de 11 minutos, ¿cuál es el método más rápido para controlar la cocción de un huevo, que debe durar 15 minutos?



222. OTROS DOS RELOJES DE ARENA. ¿Cuál es el método más rápido para cronometrar 9 minutos, disponiendo de un reloj de arena de 7 minutos y otro de 4 minutos?

EDADES

Los problemas relativos a edades son siempre interesantes y ejercen cierta fascinación sobre los jóvenes con inclinaciones matemáticas. Por lo general son extremadamente simples.

223. CARLOS EN EL AÑO 2.000. ¿Qué edad tendrá Carlos en el año 2.000 sabiendo que esa edad será igual a la suma de las cuatro cifras de su año de nacimiento?

224. LA EDAD DEL SR. GÓMEZ. "Yo tenía n años en el año n^2", gustaba decir el Sr. Gómez a sus amigos. Bien, ¿cuándo nació?

225. ¿QUIÉN ES MAYOR? Dentro de dos años mi hijo será dos veces mayor que era hace dos años. Y mi hija será dentro de tres años tres veces mayor que era hace tres años. ¿Quién es mayor, el niño o la niña?

226. POBRE PÍO. En una lápida podía leerse esta inscripción: "Aquí yace Pío Niro, muerto en 1971, vivió tantos años como la suma de las cifras del año de su nacimiento". ¿A qué edad murió?

227. LA EDAD DE JUAN. La edad de Juan es 1/6 la de su padre. La edad del padre dividida por 2, 3, 4, 6 y 8 da de resto 1; pero al dividirla por 5 da de resto cero. ¿Qué edad tiene Juan?

228. MI HERMANO Y YO. Mi hermano me lleva 8 años. ¿Dentro de cuántos años su edad será el doble que la mía, si hace tres años era el triple?

229. LA EDAD DE MI HIJO. Mi hijo es ahora tres veces más joven que yo. Pero hace cinco años era cuatro veces más joven. ¿Cuántos años tiene?

230. LAS MENINAS. El famoso cuadro Las Meninas fue pintado por Velázquez en 1656, a los 57 años de edad, después de vivir 34 años en Madrid, donde se había instalado a los 4 años de casado. ¿A qué edad se casó?

231. LA EDAD DEL CAPITÁN. El capitán dice a su hijo: tres veces el cuadrado de tu edad más 26 años dan el cuadrado de mi edad. ¿Cuál es la edad del capitán?

232. LA FAMILIA DE CARLOS. Carlos frisa en la cuarentena. Si se escribe tres veces seguidas su edad se obtiene un número que es el producto de su edad multiplicada por la de su mujer y la de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?

PARENTESCOS

Estrictamente hablando los problemas de parentescos no forman parte de las Matemáticas, pero el tipo de razonamiento que se necesita para resolverlos es muy parecido al que usan a veces los matemáticos.

233. SUEGRA FENOMENAL. La persona que más quiero en este mundo es, precisamente, la suegra de la mujer de mi hermano. ¿Quién es esa persona?

234. ¿QUIÉN ES ANTONIO? Antonio se preguntaba que si el hijo de Pedro era el padre de su hijo, ¿qué era él de Pedro?

235. HIJO DE LA HERMANA DE MI MADRE. ¿Qué clase de pariente mío es el hijo de la hermana de mi madre?

236. HIJO DE TU PADRE. ¿Quién es el hijo de tu padre que no es tu hermano?

237. LAS HERMANAS. Marta y María son hermanas. Marta tiene dos sobrinas, que no son sobrinas de María. ¿Cómo puede ser esto?

238. LOS HERMANOS DE LA FAMILIA. Cada uno de tres hermanos tiene una hermana. ¿Cuántos son entre todos?

239. HERMANDAD. El hermano de Teresa tiene un hermano más que hermanas. ¿Cuántos hermanos más que hermanas tiene Teresa?

240. CARLOS Y LA FOTOGRAFÍA. Carlos estaba mirando un retrato y alguien le preguntó: "¿De quién es esa fotografía?", a lo que él contestó, "Ni hermanos ni hermanas tengo, pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre". ¿De quién era la fotografía que estaba mirando Carlos?

241. OTRA VEZ CARLOS Y LA FOTO. Supongamos que en esa misma situación, Carlos hubiera contestado: "Ni hermanos, ni hermanas tengo, pero el hijo de este hombre es el hijo de mi padre" ¿De quién sería la fotografía?

242 .REGALAR CULTURA. Una madre compró a su hija 25 libros y otra madre regaló a la suya 7 libros. Entre las dos hijas aumentaron su capital literario en 25 libros. ¿Cómo se explica este fenómeno?

243. HERMANA DE MI HERMANA. ¿Quién es la hermana de mi hermana que no es mi hermana?

LÓGICA

Los problemas de lógica, a veces, pueden ser verdaderos rompecabezas.

244. SILENCIO. Si Ángela habla más bajo que Rosa y Celia habla más alto que Rosa, ¿habla Ángela más alto o más bajo que Celia?

245. LOS CUATRO ATLETAS. De cuatro corredores de atletismo se sabe que C ha llegado inmediatamente detrás de B, y D ha llegado en medio de A y C. ¿Podría Vd. calcular el orden de llegada?

246. LA NOTA MEDIA. La nota media conseguida en una clase de 20 alumnos ha sido de 6. Ocho alumnos han suspendido con un 3 y el resto superó el 5. ¿Cuál es la nota media de los alumnos aprobados?

247. SEIS AMIGOS DE VACACIONES. Seis amigos desean pasar sus vacaciones juntos y deciden, cada dos, utilizar diferentes medios de transporte; sabemos que Alejandro no utiliza el coche ya que éste acompaña a Benito que no va en avión. Andrés viaja en avión. Si Carlos no va acompañado de Darío ni hace uso del avión, podría Vd. decirnos en qué medio de transporte llega a su destino Tomás.

248. LOS CUATRO PERROS. Tenemos cuatro perros: un galgo, un dogo, un alano y un podenco. Éste último come más que el galgo; el alano come más que el galgo y menos que el dogo, pero éste come más que el podenco. ¿Cuál de los cuatro será más barato de mantener?

PROBABILIDAD

Para finalizar, un par de problemas de probabilidad, en los cuales la solución no es la que parece a primera vista.

249. TRES BOLAS. Para elegir a un muchacho entre tres se prepara una bolsa con dos bolas negras y una bola blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. Quien saque la bola blanca gana.
¿Quién lleva más ventaja: el primero, el segundo o el tercero?

250. PARTIDAS DE AJEDREZ. Dos ajedrecistas de igual maestría juegan al ajedrez. ¿Qué es más probable: ganar dos de cuatro partidas o tres de seis partidas? *(Los empates no se toman en consideración)*

SOLUCIONES

1. PERROS, GATOS Y LOROS. Un perro, un gato y un loro.

2. MENUDA RAZA DE GIGANTES. 20 metros.

3. EL PESO DE UN LADRILLO. Como ya tenemos en un platillo 3/4 de ladrillo, la pesa representará el cuarto que falta. Por tanto bastará multiplicar por 4 el valor de la pesa para tener el resultado. El ladrillo entero pesa 3 kilos.

4. LA CUADRILLA. Las tres cuartas partes de hombre es el cuarto que le falta a la cuadrilla. Entonces: 4 x 3/4 = 3 hombres.

5. ACABÓ LA GUERRA. 138 ojos.

6. PROPINAS AL ACOMODADOR. 1.300 duros.

7. ¿CUÁNTOS NUEVES? Veinte.

8. ¿CUÁNTO BENEFICIO? 2 ptas.

9. EL PRECIO DE LAS AGUJAS. 10 ptas.

10. PILOTO DE FÓRMULA 1. Una hora y 23 minutos. Al multiplicar por 60, los segundos pasan a ser minutos y los minutos, horas.

11. LOS TANTOS POR CIENTO. Igual.

12. EL PRECIO DE LA BOTELLA. La botella 50 centavos. El vino 9 dólares y 50 centavos.

13. LA BOTELLA Y EL TAPÓN. La botella 40 ptas. El tapón 10 ptas.

14. OTRA BOTELLA Y OTRO TAPÓN. La botella 1 Kg. y 5 gramos. El tapón 5 gramos.

15. EL MISMO DINERO. 5 ptas.

16. ENTRE PASTORES. El primero 5 y el segundo 7.

17. ANTONIO, PEDRO Y LOS LIMONES. Antonio 24 y Pedro 30 limones.

18. EL DESGASTE DE LAS RUEDAS. Cada cubierta se utiliza 4/5 partes del tiempo total. Por tanto, cada una ha sufrido un desgaste de 4/5 de 5000 Km., es decir, 4000 Km.

19. ESCRIBIENDO A MAQUINA. 40 segundos.

20. ¿CUÁNTA TIERRA? 100/9 Ha. En efecto: 100/9 – 10/9 = 90/9 = 10 Ha.

21. DOMINÓ. No.

22. LA AMEBA. Dos horas y un minuto. Transcurrido sólo un minuto, ya se ha dividido en dos, y sabemos que dos amebas llenan el tubo en dos horas.

23. MANOS Y DEDOS. 50. Es frecuente que se conteste 100.

24. ¿QUÉ HORA SERÁ? Las 6 de la tarde.

25. DOCENAS DE HUEVOS. 72 - 72 = 0.

26. EL PRECIO DEL OBJETO. 18 duros.

27. LA EPIDEMIA DE LAS OVEJAS. Nueve.

28. OTRO LADRILLO. 6 Kg.

29. LA ALTURA DEL ÁRBOL. x=altura del árbol. x=3x-2, x=1 metro.

30. ENTRE PASTORES. El primero 5 y el segundo 7.

31. DÍAS Y SEGUNDOS. Medio día.

32. ESCALA DE ESTATURAS. Pedro es el más alto. Juan y Antonio tienen igual estatura, pues le falta lo mismo para llegar a la de Pedro.

33. PINTANDO UN CUBO. Tres colores. Las caras opuestas se pintan del mismo color.

34. DINERO DE JUAN Y PEDRO. Juan 24 ptas y Pedro 30 ptas.

35. EL CUBO PINTADO. 12.

36. EL CEREZO. 2 cerezas.

37. OTRO CEREZO. 2 cerezas.

38. JUGANDO AL AJEDREZ. Cada uno jugó dos partidas: A-B, A-C y B-C.

39. LO DE LA SARDINA. Siete reales y medio.

40. LO DE LA SARDINA PERO CON HUEVOS. Dieciséis duros y medio.

41. LO DE LOS ARENQUES. 12 peniques (1 chelín).

42. PAN, PAN Y PAN. 11 pares.

43. MEDIAS MEDIAS. Depende de cómo hayan sido los cortes. Si hechos al azar pueden darse tres casos: a) Puede que sean cuatro medias medias sueltas, que no encajan para formar ni siquiera una media porque las medias medias sean todas punteras, o talones, o mitades superiores (musleras), o inferiores (calcetas), o cualesquiera mezclas heterogéneas pero incoherentes de estas dichas. b) Pueden ser una media y dos medias medias, si tiene Vd. la suerte de que dos de ellas encajen para venir a darle una media, pero las otras dos medias medias no, cómo en el caso a), más desgraciado. c) Si está Vd. de mucha suerte, y encajan las cuatro medias medias dos a dos, puede llegar a ser dueño (o dueña) de un par de medias. En este caso, si quiere ponerse el par, tendrá que coser.

44. LAS CERVEZAS. 24 cervezas.

45. LOS TATUADORES. Dos tatuadores y medio.

46. NIÑOS Y MOSCAS. Tres minutos.

47. A MODO DE CHIMENEAS. Dos fumadores.

48. LA TORRE EIFFEL. 875 toneladas. No sólo se reduce la altura de la torre, sino también su ancho y su profundidad, por lo que su peso disminuye a un octavo del peso original.

49. MILÍMETROS CUADRADOS. En un metro cuadrado hay un millón de milímetros cuadrados. Cada mil mm2, dispuestos uno junto al otro, constituyen un metro; mil millares formarán mil metros. Por lo tanto, la línea formada tendrá un kilómetro de longitud.

50. LAS 16 CERVEZAS. 1, 3, 5 y 7 cervezas.

51. TRIÁNGULO ISÓSCELES DE MAYOR ÁREA. Como el área de un triángulo es máxima cuando sea máxima la altura, considerando como base uno de los lados iguales, la altura máxima se conseguirá cuando el otro lado esté perpendicular al anterior; es decir la altura mide 4 cm. El tercer lado entonces será la hipotenusa, es decir, $\sqrt{32}$ = 5'65 cm.

52. LOS GATOS DE MARGARITA. Sea n el número de gatos.
Tenemos: $n=4/5 \cdot An+4/5 \Rightarrow n=4$. Margarita vive con 4 gatos.

53. LAS FOCAS DEL ZOO. Sea n el número de focas.
Tenemos: $n = 7/8 \cdot An + 7/8 \Rightarrow n=7$. Había 7 focas en el zoológico.

54. CONEJOS Y PALOMAS. 23 palomas.

55. ¿CUÁNTO TIENE PEDRO? 50 ptas.

56. MULAS Y BURROS. A 15.000 ptas.

57. EL TIRO AL BLANCO. Nueve veces.

58. OJO QUE ES UN CIRCUITO. Una hora y veinte minutos es lo mismo que 80 minutos.

59. CURIOSA PELÍCULA. Una hora y veinte minutos es lo mismo que 80 minutos.

60. EL GRAN CHOQUE. El dato de 5.000 km. es irrelevante, pues se pide la distancia a la que se encuentran antes de chocar, pero un minuto antes de chocar.
La distancia será: 8 + 12 = 20 km.

61. TRABALENGUAS. Nueve cupones. Siendo B=coste en cupones de un bote de detergente. Por 10 cupones, el cliente recibe un bote de detergente con el cupón correspondiente, no lo olvidemos. Así: 10=B+1, B=9.

62. LA GALLINA PONEDORA. Cada gallina tiene que poner 6 huevos, lo que se consigue al cabo de 9 días.

63. ¿CUÁNTA AGUA SE DERRAMÓ? El quinto día, antes de que se derramara el agua, quedaba agua para ocho días. El agua derramada le habría durado ocho días al hombre que murió, así que se derramaron ocho litros.

64. LAS DIMENSIONES DEL RECTÁNGULO. Largo 120 m., ancho 60 m.

65. LOS CHICOS DE LA FERIA. 60 chicos.

66. MONEDAS DE 5 Y 1 PTA. 15 de cada clase.

67. MITOLOGÍA. Tres centauros tienen 3x6 = 18 extremidades.

68. EN DOS DADOS. 42.

69. LA VIDA DE DIOFANTO. Al resolver la ecuación y hallar el valor de la incógnita, 84, conocemos los siguientes datos biográficos de Diofanto: se casó a los 21 años, fue padre a los 38 años, perdió a su hijo a los 80 años y murió a los 84.

70. EL CABALLO Y EL MULO. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $x=5$, $y=7$. El caballo llevaba 5 sacos y el mulo 7 sacos.

71. LOS CUATRO HERMANOS. Sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: $x=8$, $y=12$, $z=5$, $t=20$.

72. COMERCIANTES DE VINOS. x=Precio de cada barril. y=Impuesto aduanero.
$5x+40=64y$; $2x-40=20y$. Resolviendo el sistema: $x=120$ francos, $y=10$ francos.

73. EL REBAÑO MÁS PEQUEÑO. mcm (2,3,4,5,6,7,8,9,10) + 1 = 2.521.

74. EL PRECIO DE LOS HUEVOS. Sea x el número de huevos y P y P' los precios inicial y resultante tras la rotura.
$Px=60 \Rightarrow P=60/x$
$P'(x-2)=60 \Rightarrow P'=60/(x-2)$
Pero $P'=P+12/12$
$60/(x-2) = 60/x + 1 = (60+x)/x \Rightarrow 60x=60x-120+x^2-2x \Rightarrow x^2-2x-120=0 \Rightarrow x=12.$

75. LOS DIEZ ANIMALES. Primero damos cinco galletas a cada uno de los diez animales; ahora quedan seis galletas. Bien, los gatos ya han recibido su parte. Por tanto, las seis galletas restantes son para los perros, y puesto que cada perro ha de recibir una galleta más, debe haber seis perros y cuatro gatos. (6 x 6 + 5 x 4 = 36 +20 = 56).

76. LOROS Y PERIQUITOS. Puesto que un loro vale lo que dos periquitos, cinco loros valen lo que diez periquitos. Por tanto, cinco loros más tres periquitos valen lo que trece periquitos. Por otro lado, tres loros, más cinco periquitos valen lo que once periquitos. Así que la diferencia entre comprar cinco loros y tres periquitos o comprar tres loros y cinco periquitos es igual que la diferencia entre comprar trece periquitos y comprar once periquitos, que es dos periquitos. Sabemos que la diferencia es de 20 dólares. Así que dos periquitos valen 20 dólares, lo que significa que un periquito vale 10 dólares y un loro 20 dólares. (5 loros + 3 periquitos = 130 dólares; 3 loros + 5 periquitos = 110 dólares).

77. COCHES Y MOTOS. Si todos los vehículos hubieran sido motos, el número total de ruedas sería 80, es decir, 20 menos que en realidad. La sustitución de una moto por un coche hace que el número total de ruedas aumente en dos, es decir, la diferencia disminuye en dos. Es evidente que hay que hacer 10 sustituciones de este tipo para que la diferencia se reduzca a cero. Por lo tanto se repararon 10 coches y 30 motos. 10≅4+30≅2=40+60=100.

78. MONDANDO PATATAS. En los 25 minutos de más, la segunda persona mondó 2≅25=50 patatas. Restando estas 50 patatas de las 400, hallamos que, trabajando el mismo tiempo las dos mondaron 350 patatas. Como cada minuto ambas mondan en común 2+3=5 patatas, dividiendo 350 entre 5, hallamos que cada una trabajó 70 minutos. Este es el tiempo real que trabajó la primera persona; la segunda trabajó 70+25=95 minutos. 3≅70+2≅95=400.

79. TINTEROS Y CUADERNOS. Dos tinteros cuestan 70-46=24 ptas. Luego un tintero cuesta 12 ptas. Antonio pagó 60 ptas. por los tinteros, luego 70-60=10 ptas. por los cuatro cuadernos, o sea que un cuaderno cuesta 10/4 = 2'50 ptas.

80. LA BALANZA Y LAS FRUTAS. Como 4 manzanas y 6 melocotones se equilibran con 10 melocotones, entonces una manzana pesa lo mismo que un melocotón. Por tanto una pera se equilibra con 7 melocotones.

81. LAS TIERRAS DEL GRANJERO. Reducimos todo a sesentavos, 1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60. Esto deja 13/60 para el cultivo de maíz. Por consiguiente, 13/60 de la tierra es 26, y como 13 es la mitad de 26, 60 debe ser la mitad del número total de Ha. La tierra tiene 120 Ha.

82. LA MAQUINA DE PETACOS. La diferencia 471.300 - 392.750 = 78.550 son los puntos que cada amigo tiene que hacer de más por faltar uno de los amigos. 539750/78550 son 5 veces los puntos en cuestión. Luego los amigos eran inicialmente eran 6. Para conseguir partida necesitan 392.750 por 6 = 471.300 por 5 = 2.356.500 puntos.

83. LAS MANZANAS DEL HORTELANO. 36.

84. EL PRECIO DE LOS LIMONES. Sea "x" el precio de un limón expresado en duros.
36 limones cuestan 36x duros.
Por 16 duros dan 16/x limones.
$36x = 16/x$, $36x^2 = 16$, $x^2 = 16/36$, $x = 2/3$ duros.

Luego, 12 limones valen 8 duros.

85. SOLDADOS DEL REGIMIENTO. Como 63,63636363... = 700/11, el 700/11 % de los que quedan tiene carnet de conducir. Si N es el número de los que quedan, tienen carnet de conducir 700/11·1/100·N = 7N/11. Por tanto N debe ser múltiplo de 11. Igualmente como, 92,2297297...=6825/74 entonces: 6825/74·1/100·N = 273N/296 no llevan gafas. Por tanto N también debe ser múltiplo de 296. Así N es múltiplo de 296≅11=3.256. Pero en el regimiento sólo había 4.000 soldados, por lo que N=3.256 soldados. Por lo tanto, se han licenciado 4.000-3.256=744.

86. VENTA DE HUEVOS. Después de que la segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que quedaban más medio huevo, a la campesina sólo le quedó un huevo. Es decir, un huevo y medio constituyen la segunda mitad de lo que le quedó después de la primera venta. Está claro que el resto completo eran tres huevos. Añadiendo medio huevo, obtenemos la mitad de los que tenía la campesina al principio. Así, pues, el número de huevos que trajo al mercado era siete.

87. PASTELES PARA LOS INVITADOS. Había 10 invitados preferidos.
10A4 + 20A3 = 40 + 60 = 100.

88. LOS PASTELES. Ana tiene que darle a Carlos 2 pasteles. En total había 12 pasteles. Al principio Ana tenía 9 y Carlos 3.

89. MÁS PASTELES. Ana 24, Carlos 8 y Diego 4.

90. VENGA PASTELES. Había 32 pasteles. Carlos comió 10 y Diego 14.

91. PASTELES GRANDES Y PEQUEÑOS. Sabemos que 1G = 3P.
7G + 4P = 21P + 4P = 25P
4G + 7P = 12P + 7P = 16P
25P - 19P = 6P = 12 ptas. $\Rightarrow$ 1P = 2 ptas. $\Rightarrow$ 1G = 6 ptas.

92. LA REVENTA. El porcentaje sobre el recargo que se gana Manuel es del 50%.

93. ENCARECER UN 10% Y ABARATAR UN 10%. Si se utiliza un artículo que valga 100 ptas., el proceso es:
100 ptas - encarece 10% - 110 ptas. - abarata 10% - 99.
Luego es más barata después de abaratarla.
En general: x - encarece 10% - 110x/100 ptas. - abarata 10% - 99x/100.
Siempre es más barata después de abaratarla.

94. ABARATAR UN 10% Y ENCARECER UN 10%. Si se utiliza un artículo que valga 100 ptas., el proceso es:
100 ptas - abarata 10% - 90 ptas. - encarece 10% - 99.
Luego es más barata después de encarecerla.
En general: x - abarata 10% - 99x/100 ptas. - encarece 10% - 99x/100.
Siempre es más barata después de encarecerla.

95. GANANCIA Y PÉRDIDA EN LA VENTA DE LOS CUADROS. El tratante no calculó bien: No se quedó igual que estaba; perdió 20 dólares ese día. Veamos por qué:
Consideremos primero el cuadro que vendió con un beneficio del 10%. Por el cuadro le dieron 990 dólares; ¿cuánto pagó por él? El beneficio no es el 10% de 990, sino el 10% de lo que pagó. De modo que 990 dólares es el 110% de lo que pagó. Esto significa que pagó 900 dólares, hizo el 10% de 900 dólares, que es 90 dólares, y recibió 990 dólares. Por consiguiente sacó 90 dólares con el primer cuadro. Consideremos ahora el segundo cuadro: Perdió el 10% de lo que pagó por él, de modo que lo, vendió por el 90% de lo que pagó. Por tanto pagó 1100 dólares, y el 10% de 1100 es 110, así que lo vendió por 1100 menos 110, que es 990 dólares.
Por consiguiente perdió 110 dólares con el segundo cuadro, y ganó sólo 90 con el primero. Su pérdida neta fue de 20 dólares.

96. HÁMSTERES Y PERIQUITOS. Se compraron inicialmente tantos hámsteres como periquitos. Sea x dicho número. Llamaremos y al número de hámsteres que quedan entre los animalitos aún no vendidos. El número de periquitos será entonces 7-y. El número de hámsteres vendidos a 200 pesetas cada uno, tras aumentar en un 10% el precio de compra, es igual a x-y, y el número de periquitos vendidos (a 110 pesetas cada uno) es evidentemente x-7+y. El costo de compra de los hámsteres es por tanto 200x pesetas, y el de los periquitos, 100x pesetas, lo que hace un total de 300x pesetas. Los hámsteres vendidos han reportado 220(x-y) pesetas y los periquitos 110(x-7+y) pesetas, lo que hace un total de 330x - 110y - 770 pesetas. Se nos dice que estos dos totales son iguales, así que los igualamos y simplificamos, tras de lo cual se obtiene la siguiente ecuación diofántica con dos incógnitas enteras: 3x = 11y + 77. Como x e y han de ser enteros positivos, y además y no puede ser mayor que 7, es cosa sencilla tantear con los ocho valores posibles (incluido el 0) de y a fin de determinar las soluciones enteras de x. Solamente hay dos: 5 y 2. Ambas podrían ser soluciones del problema si olvidamos el hecho de que los periquitos se compraron por pares. Este dato permite desechar la solución y=2, que da para x el valor impar de 33. Por lo tanto concluimos que y es 5. Podemos ahora dar la solución completa. El pajarero compró 44 hámsteres y 22 parejas de periquitos, pagando en total 13.200 pesetas por todos ellos. Vendió 39 hámsteres y 21 parejas de periquitos, recaudando un total de 13.200 pesetas. Le quedaron 5 hámsteres cuyo valor al venderlos será de 1.100 pesetas, y una pareja de periquitos, por los que recibirá 220, lo que le da un beneficio de 1.320 pesetas, que es la solución del problema.

97. OPOSICIONES AL AYUNTAMIENTO. El 95% del número de aprobados ha de ser un número natural (no existen, en vivo, fracciones de personas).
En este caso, el procedimiento más fácil para hallar la cantidad correspondiente al 95% es buscar un número, entre 1 y 36, cuyo 5% (100-95) sea un número natural. Si el 5% es una cantidad exacta, también lo será el 95%.
Un número cuyo 5% sea un número natural ha de ser 20 o múltiplo de 20. En este caso, solo es posible el 20. Número total de aprobados: 20. Número de aprobados de Salamanca capital (el 95%): 19.

98. PASTELES SOBRE LA MESA. 30 pasteles. Diego encontró 2 = 1+1. Carlos encontró 6 = (2+1)2. Blas encontró 14 = (6+1)2. Ana encontró 30 = (14+1)2.

99. PASTELES COMO PAGO. El máximo es 3x26=78. Ganó sólo 62. Por holgazanear perdió 16. Cada día que holgazanea pierde 4 (3 que no recibe y 1 que da), luego 16/4=4. Holgazaneó 4 días y trabajó 22 días.

100. EL MANOJO DE ESPÁRRAGOS. La cantidad de espárragos del manojo es aproximadamente proporcional a la superficie del círculo formado por el bramante.
Cuando se dobla la longitud del bramante se dobla el radio del círculo, y la superficie de ese círculo está multiplicada por 4 (S=πR2).
De suerte que los nuevos manojos contienen cuatro veces más espárragos y su precio debería ser 80 x 4 = 320 ptas.

101. MIDIENDO UN CABLE. 59 metros.

102. VESTIDOS A GOGÓ. 6.

103. LOS DOS BEBEDORES. Se puede considerar a los personajes como desagües de un barril, con velocidad uniforme de salida cada uno. Sean x las horas que tarda el inglés en beber todo el barril, e las horas que tarda el alemán.
Los dos juntos en dos horas habrán bebido 2(1/x+1/y) parte del barril.
En 2 horas y 48 minutos el alemán bebe: (2+4/5)·1/y.
En 4 horas y 40 minutos el inglés bebe: (4+2/3)·1/y.
2(1/x+1/y) + (2+4/5)·1/y = 1
2(1/x+1/y) + (4+2/3)·1/x = 1
Sistema que se resuelve fácilmente tomando como incógnitas 1/x=x' y 1/y=y', de donde x=10, y=6.
Es decir, el alemán se bebería el barril en 6 horas y el inglés en 10 horas.

104. JUEGO EN FAMILIA. Supongamos que un padre dispara x tiros y que su hijo dispara y tiros: x^2-y^2=45, (x-y)(x+y)=45.
Combinaciones de factores posibles: (x+y): 45, 15, 9 con (x-y):1, 3, 5.

De donde, fácilmente: Yo: 9 tiros, mi hijo, José: 6 tiros.
Juan: 23 tiros, su hijo, Julio: 22 tiros.
Pablo: 7 tiros, su hijo, Luis: 2 tiros.
Se tiraron 39 tiros y se marcaron 1183 puntos.

105. EL VASO DE VINO. Una cuarta parte.

106. LAS CHOVAS Y LAS ESTACAS. Cuatro chovas y tres estacas.

107. LIBROS DESHOJADOS. 124 páginas el primero y 232 páginas el segundo.

108. LA CUADRILLA DE SEGADORES. Tomemos como unidad de medida el prado grande.
Si el prado grande fue segado por todo el personal de la cuadrilla en medio día, y por la mitad de la gente en el resto de la jornada, se deduce que media cuadrilla en medio día segó 1/3 del prado. Por consiguiente, en el prado chico quedaba sin segar 1/2-1/3=1/6. Si un segador siega en un día 1/6 del prado y si fueron segados 6/6+2/6=8/6, esto quiere decir que había 8 segadores. (Conviene hacer un dibujo)

109. EL TRUEQUE EN EL AMAZONAS. De b) y c) se obtiene que una lanza se cambia por 2 escudos. Si esto se completa con a) resulta que un collar se cambia por un escudo. Por tanto, una lanza equivale a dos collares.

110. NEGOCIANDO POLLOS. Una vaca vale 25 pollos. Un caballo vale sesenta pollos. Ya deben haber elegido 5 caballos y 7 vacas, que valen 475 pollos, y como tienen lo suficiente como para conseguir 7 vacas más, le quedan 175 pollos, lo que haría un total de 650.

111. PAGO EXACTO Y PUNTUAL. Las piezas son de 1, 2, 4, 8 y 15 denarios de valor.
Indicando con 1 la moneda que tiene la patrona, y con 0 la moneda que tiene el hombre, la situación diaria se puede expresar como sigue:

Valor de la moneda	15	8	4	2	1
Día 11	0	0	0	0	1
Día 21	0	0	0	1	0
Día 31	0	0	0	1	1
......	...	...	...	...	...
Día 161	1	0	0	0	1
Día 171	1	0	0	1	0
......	...	...	...	...	...
Día 291	1	1	1	1	0
Día 301	1	1	1	1	1

Este cuadro hace evidente que el estado contable en cualquier día puede deducirse de la expresión binaria (en base 2) del número correspondiente.

112. TRANSPORTE DE UN TESORO. 1er intento: 20 - 20 - 20 - 20
21 intento: 20 - 30 - 30 - 30
3er intento: 20 - 30 - 40 - 40
Finalmente: 20 - 30 - 40 - 48

113. NEGOCIANTE METÓDICO. Sea x el capital buscado.
Fin del 1er año: 4/3·x – 4/3·100
Fin del 21 año: 1x – 28/9·100
Fin del 3er año: 64/27·x – 148/27·100 = 2x de donde x=1.480 dólares.

114. EL REPARTO DE LAS CASTAÑAS. Las edades de las niñas están en la proporción 9:12:14. Las niñas recibieron: 198, 264 y 308 castañas.

115. SE QUEDÓ SIN DISCOS. 36 discos entre 6 y dio 6 discos a cada uno.

116. EL REPARTO DE LA HERENCIA. Siendo *C* el importe total de la herencia.
El 11 recibió: 100.000 + (*C*-100000)/5
El 21 recibió: 200.000 + 1/5 [(*C*-100.000) - (*C*-100000)/5 - 200.000]
Igualando lo recibido por cada uno se obtiene:
(*C*-100000)/5 = 100.000 + *C*/5 - 60.000 - (*C*-100000)/25 $\Rightarrow$ *C* = 1.600.000 ptas.
Luego: 4 herederos a 400.000 ptas. cada uno.

117. LOS LADRONES Y LAS CÁMARAS DE FOTOS. Sea n el número de ladrones y N el número de aparatos robados.
En el primer reparto: N = 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2
En el segundo reparto: N = 5n
n(n+1)/2 = 5n por lo tanto n(n-9)=0, n=9, N=9x5=45 cámaras robadas.

118. LOS LADRONES Y LOS CUADROS. El hecho de que los ladrones disminuyan cada uno en una pieza de tela su parte (6 en lugar de 7) hace que queden trece piezas disponibles (5+8). Los ladrones eran, pues, 13.

119. LOS LADRONES Y LAS TELAS. 6x+5=y; 7x=y+8; x=13 ladrones, y=83 rollos de tela.

120. MAESTROS Y ESCOLARES. Si x es el número de maestros y n el de alumnos que le eran asignados antes de la modificación, podemos escribir:
xn+(19-x)(n-30)=1.000 $\Rightarrow$ 19n+30x=1.570 $\Rightarrow$ n=10/19 (157-3x). Como n es un número entero (157-3x) ha de ser múltiplo de 19, siendo al mismo tiempo, x<19. La única posibilidad es x=8, n=70. Es decir, que había 8 maestros y 11 maestras. Cada maestro atendía

a 70 niños; 560 en total. Cada maestra atendía 40 niños; 440 en total. Con la variación cada maestra atiende 48 niños, lo que hace un total de 528 alumnos para las maestras. El resto, 472, se reparten entre los 8 maestros, tocando pues a 59 alumnos.

121. EL GRANJERO Y LOS POLLOS. Sean A=Cantidad total de pienso (en unidades pollos-día). D=Número de días que le duraría con los pollos que tiene. P=Pollos que tiene actualmente.
A/P=D, A/(P-75)=D+20, A/(P+100)=D-15. Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.
Resolviendo: P=300. Es decir: 300 pollos con pienso para 60 días.

122. ORIGINAL TESTAMENTO. La hacienda de 9000 ducados, repartida entre 5 hijos, da 1800 ducados para cada uno.

123. LOS GUARDIANES DE LAS NARANJAS. El método para resolver problemas de este tipo es el de hacer el camino inverso. Pues que salió con 2, al tercer guardián llegó con 5. Por esto, al segundo llegó con 11. Y si del primero salió con 11, quiere decir que llegó a él con 23.

124. LAS PERLAS DEL RAJÁ. x=perlas.

La mayor coge: $1+\frac{x-1}{7}$, quedan: $x-[1+\frac{x-1}{7}] = \frac{6x-6}{7}$

La 2ª coge: $2+[\frac{6x-6}{7}-2]\frac{1}{7} = 2+\frac{6x-20}{49}$

$1+\frac{x-1}{7} = 2+\frac{6x-20}{49} \Rightarrow$ x=36 perlas, $\sqrt{36}$ = 6 hijas

125. VENTA DE HUEVOS. Después de que la segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que quedaban más medio huevo, a la campesina sólo le quedó un huevo. Es decir, un huevo y medio constituyen la segunda mitad de lo que le quedó después de la primera venta. Está claro que el resto completo eran tres huevos. Añadiendo medio huevo, obtenemos la mitad de los que tenía la campesina al principio. Así, pues, el número de huevos que trajo al mercado era siete.

126. VENTA DE GANSOS. Llevó al mercado 101 gansos. (51 + 17 + 9 + 5 + 19)

127. LOS 3 PANES Y LAS 3 MONEDAS.

	Pastor A	Pastor B	Cazador
Panes que aporta	2	1	0
Parte que come	3/3	3/3	3/3
Parte que regala	3/3	0	0
Parte del dinero	3	0	

Pastor A = 3 monedas. Pastor B = 0 monedas.

128. CURIOSO TESTAMENTO. Si nacía niño, éste heredaba doble que la madre. Si nacía niña, ésta heredaba la mitad que la madre. Al nacer niño y niña mantengamos esta proporción entre los tres.
niña=x, madre=2x, niño=4x.
4x+2x+x=1, 7x=1, x=1/7.
El reparto fue así: Niña=2 vacas. Madre=4 vacas. Niño=8 vacas.

129. ARAÑAS Y ESCARABAJOS. Hay que saber que las arañas tienen 8 patas y que los escarabajos tienen 6 patas. Así, en la caja hay 3 arañas y 5 escarabajos.

130. VACAS, CERDOS Y OVEJAS (1). 10x+3y+2(100-x-y)=100, 20x+6y+100-x-y=200, 19x+5y=100. (5 vacas, 1 cerdo, 94 ovejas)

131. VACAS, CERDOS Y OVEJAS (2). 5x+2y+2(100-x-y)=100, 10x+4y+100-x-y=200, 9x+3y=100. No hay solución.

132. VACAS, CERDOS Y OVEJAS (3). 4x+2y+1/3 (100-x-y)=100, 12x+6y+100-x-y=300, 11x+5y=200.
(5 vacas, 29 cerdos, 66 ovejas)
(10 vacas, 18 cerdos, 72 ovejas)
(15 vacas, 7 cerdos, 78 ovejas)

133. NEGOCIO PARA TRES. 78, 42 y 24 reales.

134. LOS ASPIRANTES AL PUESTO DE TRABAJO. Ni mucho menos. En realidad, y como le correspondía por su cargo, cobraba un salario más elevado que sus compañeros. Estos llegaron precipitadamente a la conclusión de que un aumento de 50 dólares cada semestre equivalía a otro de 100 dólares anuales, pero aquél, había tomado en consideración todas las condiciones del problema, y estudió las dos posibilidades de este modo:
150 de aumento anual50 de aumento semestral
1er año:500 + 500 = 1.000500 + 550 = 1.050
21 año:575 + 575 = 1.150600 + 650 = 1.250
3er año:650 + 650 = 1.300700 + 750 = 1.450
41 año:725 + 725 = 1.450800 + 850 = 1.650
De esta forma se dio cuenta inmediatamente de que su sueldo excedería al de los otros en los años subsiguientes, en 50, 100, 150, 200, ... dólares, ya que el aumento anual que a él le correspondía siempre sería 50 dólares mayor que el de ellos. Lo que impresionó a su nuevo patrón no fue, pues, su modestia, sino su despierta inteligencia.

135. CURIOSA PARTIDA (1). 325, 175 y 100 ptas.

136. CURIOSA PARTIDA (2). (En página 215-216 de Mat. Recreativas de Y. Perelman)

137. PACIENCIA Y PROGRESIÓN. 219, 438, 657.

138. TODOS LOS PRIMOS. a) Termina en 0, porque P tiene los factores 2 y 5. b) La cifra de las decenas es impar; porque si fuera par, P sería múltiplo de 4, lo que es imposible.

139. ¿QUE NÚMERO SOY? El 1001 que en numeración binaria corresponde al 9.

140. AÑO DE NACIMIENTO. Sea mcdu es el año de nacimiento.
1000m + 100c + 10d + u - (m+c+d+u) = 999m + 99c + 9d que es múltiplo de 9.

141. MENOR NÚMERO. Sea n el número desconocido. Ya que n dividido por 2 da resto 1, n+1 es divisible por 2, ya que al dividir n por 3 da resto 2, n+1 es divisible por 3, etc. De la misma manera, n+1 es divisible por 4, 5 y 6. Ahora bien, el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6 es 60. Así: n+1=60. Luego n=59.

142. EL MENOR CON X DIVISORES. Con 7 divisores el 64. Con 8 divisores el 24.

143. LA BASE DESCONOCIDA. Sea b la base desconocida. 2b2+5b+3=136 $\Rightarrow$ b=7.

144. PRODUCTO DE CUATRO ENTEROS CONSECUTIVOS. 3.024 no acaba ni en 0 ni en 5; luego ninguno de los cuatro números es divisible por 5 ni por 10. Si los números fueran mayores que 10, el producto sería mayor que 10.000. Luego solamente tenemos como posibles soluciones 1-2-3-4 y 6-7-8-9. Evidentemente los buscados son 6-7-8-9.

145. PRIMERA ESCRITURA DEL CIEN. 100 = 111-11, 100 = 33x3+(3:3)
100 = 5x(5x5-5), 100 = 5x5x5-5x5, 100 = (5+5+5+5)x5

146. DIVISIONES EXACTAS. 7 x 11 x 13 = 1001.
234 x 1001 = 234234 $\Rightarrow$ 234234 : 1001 = 234.
Es decir, las dos únicas operaciones que hacemos son:
1º) Multiplicar por 1001 el número de partida.
2º) Dividir por 1001 de forma disfrazada. Obviamente debe dar el número de partida.

$$\text{abcabc} = \text{abc} \times 1001; \qquad \frac{abcabc}{7 \times 11 \times 13} = \frac{abcabc}{1001} = \text{abc}.$$

147.CON LAS CIFRAS DEL 1 AL 9.

$$3=\frac{17469}{5823},\ 5=\frac{13485}{2697},\ 6=\frac{17658}{2943},\ 7=\frac{16758}{2394},\ 8=\frac{25496}{3187},\ 9=\frac{57429}{6381}.$$

149. El producto de cualquier número de 9 cifras por el 142.857.143 se puede obtener dividiendo el citado número de 9 cifras duplicado entre 7.
Ejemplo: 987.542.937 x 142.857.143 = 141077562569648991. Se ha obtenido así:
987.542.937.987.542.937 : 7 = 141.077.562.569.648.991

150. ERROR MECANOGRÁFICO. 2592 = $2^5 9^2$.

151. CURIOSA PROPIEDAD. El 26 y el 27. 263=17.576. 273=19.683.

152. SEGUNDA ESCRITURA DEL CIEN. 100 = 111-11+11-11,
100 = 22x2x2+2+(2x2x2)+2, 100 = 333:3-(3x3)-3+(3:3),
100 = 444:4-4-4-4+(4:4), 100 = 5x5x5-(5x5)+5-5+5-5,
100 = 66+(6x6)-[(6+6):6x(6:6)], 100 = 7x7x(7+7):7+(7:7)+(7:7),
100 = 88+8+[8x8x8:8:(8+8)], 100 = (99+99):(9+9)x9+(9:9)

153. MÉTODO ÁRABE DE MULTIPLICACIÓN. ...

154. CON 4 TRESES. $1 = \frac{33}{33} = 3-3+\frac{3}{3}$ $\quad 2 = \frac{3}{3}+\frac{3}{3}$ $\quad 3 = \frac{3+3+3}{3}$ $\quad 4 = \frac{3x3+3}{3}$

$5 = 3+\frac{3+3}{3}$ $\quad 6 = 3+3+3-3 = (3+3)x\frac{3}{3}$ $\quad 7 = 3+3+\frac{3}{3}$

$8 = \frac{33}{3}-3$ $\quad 9 = 3x3x\frac{3}{3}$ $\quad 10 = 3x3+\frac{3}{3}$

155. CON 4 CINCOS. $1 = \frac{55}{55} = 5-5+\frac{5}{5}$ $\quad 2 = \frac{5}{5}+\frac{5}{5}$ $\quad 3 = \frac{5+5+5}{5}$ $\quad 4 = \frac{5x5-5}{5}$

$5 = 5+\frac{5-5}{5}$ $\quad 6 = \frac{5x5+5}{5}$ $\quad 7 = 5+\frac{5+5}{5}$

$8 = \frac{5!}{5+5+5}$ $\quad 9 = 5+5-\frac{5}{5}$ $\quad 10 = \frac{55-5}{5}$

156. ALFA COMO PISTA. Son los números del 0 al 9 escritos por orden alfabético.

157. PRINCIPIO Y FIN. Números cuyos nombres empiezan y terminan con la misma letra.

158. CON CALCULADORA MEJOR. Es el número de barritas que se encienden en la calculadora en la formación de cada dígito, desde el 0 hasta el 9.

159. SECUENCIA QUE RUEDA. Son algunos de los números de la ruleta, tal como se suceden en la rueda.

160. SON PARIENTES. Cada palabra empieza con el nombre de una nota musical.

161. SOND y SOND. Septiembre, Octubre, Noviembre y Diciembre.

162. VAYA CRITERIO. Tachar los números cuyo nombre no tenga tres letras.

163. EXTRAÑA PARTIDA DE AJEDREZ. El número indica la cantidad de letras que hay en el abecedario entre las dos letras que aparecen. Así entre A y C hay 1 (la B); entre A y D, 2; y así hasta las 14 que hay entre D y R...

164. NI EN UNA SEMANA. Son las últimas letras de los días de la semana.

165. DE HOLA RAFFAELA EN TVE. La estrategia ganadora es: Coger primero un número de cualquiera de las filas. Así se consigue dejar al contrario para que elija: 6-5-3, 7-4-3 ó 7-5-2. Después, cuando volvamos a coger hay que dejar al contrario los siguientes números en cada fila:
1-1-1 ó 2-2-0 ó 3-3-0 ó 4-4-0 ó 5-5-0 ó 3-2-1 ó 5-4-1 ó 6-4-2.

166. DEL ESTILO DEL DE RAFFAELA. ...

167. LLEGAR A 50. La estrategia ganadora es: ...

168. DE ORDEN 3.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

169. DE ORDEN 4.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

170. ORDEN 3, NUEVE CONSECUTIVOS, SUMA 24.

12	8	4
5	10	9
7	6	11

171. ORDEN 3, TRES CONSECUTIVOS, SUMA 18.

6	7	5
6	6	6
6	5	7

172. A COMPLETAR.

67	b	43
	K	
	73	

67 + b + 43 = b + K + 73 = 3K. Por lo tanto: K=37, b=1.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Tiene la particularidad de estar compuesto sólo por números primos.

173. COMPLETA 3x3. ...

174. CALCULA: A, B, C, D, E. ...

175. LAS PESAS DEL MERCADER. Observemos primero, que si tenemos un juego de pesas que nos permita pesar desde 1 hasta n, podemos mediante una nueva pesa de p=2n+1 Kg. aumentar el campo de pesada hasta 3n+1 Kg.

En efecto, puesto que con las primitivas pesas podíamos pesar desde 1 hasta n, para pesar ahora cualquier carga que valga p+x ó p-x (siendo x un número de 1 hasta n), no tendremos más que poner el peso p en el platillo opuesto a la carga y añadir la combinación de pesas necesarias para compensar la diferencia x entre los dos platillos, lo que es siempre posible, pues equivale a pesar una carga comprendida entre 1 y n.

Una vez visto esto, el resto es sencillo. Como el extremo de nuestro margen de medida es 40, pondremos: 3n+1=40, n=13, p=2n+1, p=27.

Las tres restantes han de permitirnos pesar desde 1 hasta 13. No tendremos más que repetir el razonamiento, siendo ahora 13 el tope superior: 3n+1=13, n=4, p=2n+1, p=9.

De la misma forma: 3n+1=4, n=1, p=2n+1, p=3.

Debiendo ser la cuarta pesa p=n=1.

La solución es, por tanto: 1, 3, 9 y 27 Kg. Incidentalmente, el camino seguido para hallar la solución nos permite ver rápidamente cuál sería la combinación de pesas en cada caso.

176. LAS 30 MONEDAS DE ORO. Es suficiente pesar un montón de monedas de oro formado por una pieza entregada por el primer vasallo, dos del segundo, tres del tercero,... y 30 del trigésimo.

Si todos los vasallos hubieran entregado piezas de 10 gr., el montón pesaría:

10(1+2+3+...+30) = 10≅465 = 4650 gr.

Si falta 1 gr., el culpable es el primer vasallo.

Si faltan 2, es el segundo, etc.

Si faltan 30, es el trigésimo.

177. CON SÓLO DOS PESAS. 10 pesada: Se reparten los 1.800 gramos en dos bolsas de 900 gramos cada una.

2º pesada: Una bolsa de 900 gramos se reparte en dos bolsas de 450 gramos.
3º pesada: Con las dos pesas se retiran 50 gramos de una de las bolsas anteriores y en ella quedan 400 gramos. El resto de las semillas pesa 1.400 gramos.

178. ENGAÑANDO A LA BALANZA. Las niñas pesan 56, 58, 60, 64 y 65 kilos.

179. LAS 9 BOLAS. Hacemos tres grupos de tres bolas. Con una pesada seleccionamos el grupo en el que se encuentra la bola más pesada. Con otra pesada se obtiene la bola que buscamos.

180. LAS 27 BOLAS. Hacemos tres grupos de nueve bolas. Con una pesada seleccionamos el grupo en el que se encuentra la bola más pesada. Hacemos tres grupos de tres bolas. Con otra pesada seleccionamos el grupo en el que se encuentra la bola más pesada. Con otra pesada se obtiene la bola que buscamos.

181. LAS 81 BOLAS. Hacemos tres grupos de 27 bolas. Con una pesada seleccionamos el grupo en el que se encuentra la bola más pesada. Hacemos tres grupos de nueve bolas. Con otra pesada seleccionamos el grupo en el que se encuentra la bola más pesada. Hacemos tres grupos de tres bolas. Con otra pesada seleccionamos el grupo en el que se encuentra la bola más pesada. Con otra pesada se obtiene la bola que buscamos.

182. PROMEDIANDO. Llamemos D a la longitud de la cuesta.
El tiempo empleado en subir será D/2 y en bajar D/6.
El total, por consiguiente, es: T = D/2 + D/6 = 2D/3.
La velocidad media: Vm = 2D/T = 3 km/h.

183. AL CAMPO DE MERIENDA. Como no sabemos le distancia recorrida, partamos del supuesto que fuese de 60 km. En este caso, hubiera tardado 1 hora en el viaje de ida y 2 horas en el de vuelta, por lo que la velocidad media sería:
v = (60+60) km. : (1+2) h. = 120 km. : 3 h. = 40 km/h.
En general, llamando d a la distancia recorrida en cada uno de los viajes de ida y de vuelta, el tiempo total de viaje sería: $t = \frac{d}{60} + \frac{d}{30} = \frac{3d}{60} = \frac{d}{20}$

y la velocidad media: $v = 2d : \frac{d}{20} = \frac{40d}{d} = 40$ km/h.

184. UN ALTO EN EL CAMINO. El coche de los Gómez le saca al de los Arias 10 km. de ventaja por cada hora de viaje.
A la velocidad de 60 km/h., el coche de los Arias recorre 30 km. durante la media hora que los Gómez estuvieron esperándole.

Estos 30 km. representan la ventaja total de un coche sobre otro. Para obtenerla, el coche de los Gómez tuvo que circular durante 3 horas, pues en cada hora conseguía la ventaja de 10 km.
Por tanto, el trayecto fue de: 70 km/h. x 3 h. = 210 km.
Madrid estaba a 210 km. de distancia de la primera parada.

185. EL ESQUIADOR FRUSTRADO. Cuesta creerlo, pero la única forma de que el promedio de subida y bajada alcanzase los 10 km/h. ¡sería descender en tiempo nulo! Al principio puede parecer que habrá que tener en cuenta las distancias recorridas al subir y bajar la ladera. Sin embargo, tal parámetro carece de importancia en este problema. El esquiador asciende una cierta distancia, con una cierta velocidad. Desea descender con tal velocidad que su velocidad media en el recorrido de ida y vuelta sea doble que la primera. Para conseguirlo tendría que hacer dos veces la distancia primitiva en el mismo tiempo que invirtió en el ascenso. Como es obvio, para lograrlo ha de bajar en un tiempo cero. Como esto es imposible, no hay forma de que su velocidad media pase de 5 km/h a 10 km/h.

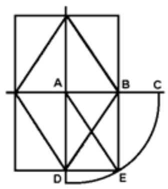
186. EL AVIÓN Y EL VIENTO. Como el viento aumenta la velocidad del avión en la mitad del recorrido en la misma cantidad en que la disminuye en el trayecto de regreso, resulta tentador suponer que el tiempo total invertido en el viaje de ida y vuelta no sufrirá modificación. Sin embargo, éste no es el caso, pues el tiempo durante el cual la velocidad del avión se incrementa es menor que el tiempo durante el cual sufre retardo, así que el efecto total es de retraso. El tiempo total de vuelo con viento, de cualquier fuerza y dirección con tal de que permanezcan constantes, es siempre mayor que si no hubiera viento.

187. EL BÓLIDO Y LOS TRES MOJONES. BA - AB = A0B - BA.
10B + A - 10A - B = 100A + B - 10B - A.
A, diferente de 0 no puede ser sino 1. B=6.
Los números que llevan los mojones son: 16, 61, 106. Velocidad del bólido: 45 Km/h.

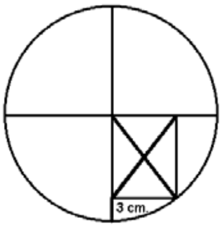
188. TRIÁNGULOS ORIGINALES. Tienen la misma área.
Ambos pueden dividirse por la mitad para dar lugar a dos triángulos 3, 4, 5.

189. EL VALOR DE LA MEDIANA. Basta recordar que todo triángulo rectángulo puede inscribirse siempre en un círculo cuyo diámetro CB=a=10 es la hipotenusa, así que AM=radio=5.

190. EL LADO DEL ROMBO. Basta con darse cuenta de que el lado AC es el radio de la circunferencia y AE y BD son diagonales de un rectángulo. Por lo tanto, son iguales en longitud. Lado del rombo = 9 m.



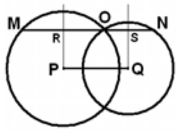
191. EL RADIO DEL CÍRCULO. Dado que la diagonal de 8 cm. tiene la misma longitud que el radio del círculo, la respuesta es 8 cm.



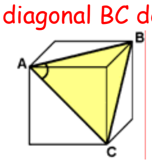
192. EL ÁNGULO EXTERIOR. Puesto que es isósceles: $B = C = \dfrac{180° - A}{2} = \dfrac{130°}{2} = 65°$.

Por lo tanto: x= 180°-C = 180 - 65 = 115°.

193. GOLPE DE VISTA. MN = 6 centímetros. Trazando desde P y Q perpendiculares al segmento MN, obtenemos los puntos R y S. Como MR=RO y NS=SO y RS=PQ, surge la respuesta.

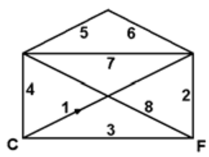


194. EL ÁNGULO DE LAS DIAGONALES. 60E. Basta observar que se trata de un triángulo equilátero ABC trazando la diagonal BC de la otra cara.



195. EL CRUCE DE LA RED. El problema no tiene solución.
En efecto, cada uno de los tres rectángulos mayores de la figura tiene un número impar de segmentos. Como cada vez que se cruza un segmento se pasa de dentro a fuera del rectángulo o viceversa, quiere decirse que en los tres debe de haber una terminación de la línea en su interior para que la línea cruce el número impar de segmentos una sola vez, y como hay tres rectángulos mientras que la línea continua no tiene más que dos extremos, la solución del problema es imposible.

196. DIBUJANDO SOBRES. Aunque el segundo parece el más complicado de dibujar, la realidad es que puede dibujarse en las condiciones estipuladas.
El primero en cambio, no.
Todo vértice en el que concurren un número impar de líneas ha de ser comienzo o fin del trazado, ya que si no, por cada entrada ha de haber un salida. En la segunda figura, en los vértices inferiores

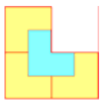


ocurre esto, luego uno puede ser comienzo y el otro fin del dibujo. (Ver figura)
En el primer sobre son cuatro los vértices en los que concurren un número impar de líneas; como no puede haber más que un fin y un comienzo, es imposible dibujarlo en las condiciones propuestas.

197. CUADRADOS QUE SE CORTAN. El área comprendida entre ambos siempre es la cuarta parte de la de un cuadrado. Los triángulos ABC y CDE son iguales.

198. NUEVE ÁNGULOS. El ángulo 2 mide 20E. Por tratarse de un triángulo isósceles (dos lados son radios) los ángulos 4 y 5 son iguales. La suma de los ángulos 2, 3 y 4 es 90E, pues el ángulo total abarca el diámetro. De estas dos condiciones se obtiene que la suma de los ángulos 2 y 4 es igual al ángulo 7. Y el ángulo 7 es igual a dos veces el ángulo 4. De donde el ángulo 2 es la mitad del ángulo 7. Por tanto el ángulo 7 mide 40E, los ángulos 4 y 5 miden 20E cada uno, el ángulo 6 mide 140E, el ángulo 7 mide 50E y los ángulos 8 y 9 son rectos.

199. EN 4 PIEZAS IDÉNTICAS.



200. LOS SEIS PALILLOS. Formar un tetraedro.

201. LOS SEIS CUADRADOS. Formar un cubo.

202. SEIS SOLDADOS, SEIS FILAS. Formar un hexágono.

203. DOS FILAS, TRES MONEDAS. Colocar una moneda cualquiera encima de otra.

204. LAS DOCE MONEDAS. En los vértices poner dos monedas, una encima de la otra.

205. MUCHOS CUADRADOS. En total hay 30. Los 16 pequeños, 9 de cuatro cuadrados cada uno, 4 de nueve pequeños cada uno y el envolvente. 16 + 8 + 4 + 1 = 30.

206. PARA PRINCIPIANTES. A=1. S+R=11, A+A+1=S, ⇒ S=3, R=8. 8+P=13 ⇒ P=5. La suma completa es 518 + 813 = 1331.

207. SEÑAL DE SOCORRO. S=1. De la primera columna O=0.
De la segunda, I=9. 91+10=101.

208. ÚNICA SOLUCIÓN. 21978 x 4 = 87912.

209. FACILÓN. 332364 + 483455 = 815819.

210. MUY FACILÓN. 317 + 173 + 305 = 795.

211. OTRO MUY FACILÓN. 53161 - 21417 = 31744.

212. SUMA FÁCIL. 325324 + 526142 = 851466.

213. OTRA SUMA FÁCIL. 132234 + 244693 = 376927.

214. OTRA SUMA FÁCIL. 314524 + 231043 = 545567.

215. OJO AL MINUTERO. Casi todo el mundo dice que 11 veces, pero la solución correcta son 10. Si no le parece cierto, échele un vistazo a su reloj.

216. A LAS TRES Y DIEZ. 35°.

217. EL RELOJ DE CUCO. Si un reloj de pared tarda 5 segundos en dar las 6, es que los intervalos entre campanadas son de un segundo. Así, en dar las 12 tardará 11 segundos.

218. SONÓ EL DESPERTADOR. Mi tío durmió solamente 40 minutos.

219. LOS DOS RELOJES. Uno de los relojes se adelanta tres minutos con respecto al otro por cada hora, de modo que después de veinte horas estará una hora adelantado.

220. EL MINUTERO TRES VECES MENOS. Las 5 y 15. El minutero tarda desde aquí 15 minutos en llegar al número 6, mientras que el horario tarda 45 minutos.

221. DOS RELOJES DE ARENA. Se ponen a contar los dos relojes de 7 y 11 minutos, al mismo tiempo que echamos el huevo en el agua hirviente. Cuando se termine la arena en el reloj de 7 minutos, le damos la vuelta y esperamos a que se agote el de 11. Entonces le damos la vuelta otra vez al reloj de 7 minutos. Cuando se agote también la arena habrán transcurrido 15 minutos.
Aunque la solución anterior es la que menos tiempo requiere, obliga a dar dos vueltas a uno de los relojes. Hay otra solución más larga (que precisa de 22 minutos en total), pero más sencilla en el sentido de que sólo es necesario voltear una vez uno de los relojes. Se ponen ambos en marcha simultáneamente y, transcurridos los primeros 7 minutos se inicia la cocción del huevo. Cuando se agote la arena en el reloj de 11 minutos, le damos la vuelta. Al agotarse por segunda vez la arena de este reloj habrán transcurrido 15 minutos.

222. OTROS DOS RELOJES DE ARENA. Se ponen a contar los dos relojes a la vez. Cuando se termine la arena en el reloj de 4 minutos, le damos la vuelta (han pasado 4 minutos). Cuando se termine la arena en el reloj de 7 minutos, le damos la vuelta (han pasado 7 minutos). Cuando se termine la arena en el reloj de 4 minutos, por segunda vez le damos la vuelta (han pasado 8 minutos), el reloj de 7 minutos ha funcionado durante 1 minuto. Le damos la vuelta una vez más. Cuando se termine la arena, han transcurrido los 9 minutos.

223. CARLOS EN EL AÑO 2.000. 19 años. Nació en 1981. 1+9+8+1=19.

224. LA EDAD DEL SR. GÓMEZ. Nació en 1892; tenía 44 años en el año 44^2=1936.

225. QUIÉN ES MAYOR? Son mellizos y tienen 6 años. Prueba: 6+2=8=2x4, 6+3=9=3x3.

226. POBRE PÍO. Nació en 1953. Murió a los 18 años.

227. LA EDAD DE JUAN. Sea x la edad del padre. Como el mcm(2,3,4,6,8)=24 $\Rightarrow$ x = 24k+1 = 25h (h entero) que se cumple para k=1. Así: 25 es la edad del padre y 25/6=4 años y 2 meses la edad de Juan. Es cierto que caben otras soluciones, (k=6,11,...), pero implican para el padre edades superiores a 144 años, lo que las excluye, pues hubiese engendrado el hijo después de 120 años y, no conviene exagerar.

228. MI HERMANO Y YO. Dentro de un año. Edades actuales: (7,15), 15-7=8.
Edades hace 3 años: (4,12), 4x3=12. Edades dentro de un año: (8,16), 8x2=16.

229. LA EDAD DE MI HIJO. Hijo 15 años. Padre 45 años. 15=45/3, 15-5=10=4x40

230. LAS MENINAS. Se instaló en Madrid a los 57-34=23 años. Se casó a los 23-4=19 años.

231. LA EDAD DEL CAPITÁN. No existe solución. Se tendría: $a^2 = 3b^2 + 26 = 3n + 2$. Pero, un cuadrado será múltiplo de 3 o múltiplo de 3 más 1, nunca múltiplo de 3 más 2.

232. LA FAMILIA DE CARLOS. Sea ab la edad de Víctor. ababab = ab0000 + ab00 + ab = 10101 x ab = 1 x 3 x 7 x 13 x 37 x ab.
Carlos tiene 39 años, su mujer 37 y sus hijos 1, 3, 7 y 13 años.

233. SUEGRA FENOMENAL. Mi madre.

234. ¿QUIÉN ES ANTONIO? Su hijo.

235. HIJO DE LA HERMANA DE MI MADRE. Primo.

236. HIJO DE TU PADRE. Tú.

237. LAS HERMANAS. Porque las sobrinas de Marta son precisamente las hijas de María.

238. LOS HERMANOS DE LA FAMILIA. Cuatro.

239. HERMANDAD. Teresa tiene tres hermanos más que hermanas.

240. CARLOS Y LA FOTOGRAFÍA. De su hijo.

241. OTRA VEZ CARLOS Y LA FOTO. De su padre.

242. REGALAR CULTURA. Los personajes son: una hija, su madre y su abuela. De los 25 libros que la madre recibió de la abuela, separó 7 para dárselos a su hija.

243. HERMANA DE MI HERMANA. Yo.

244. SILENCIO. Más bajo.

245. LOS CUATRO ATLETAS. B-C-D-A.

246. LA NOTA MEDIA. Ocho.

247. SEIS AMIGOS DE VACACIONES. En coche.

248. LOS CUATRO PERROS. El galgo.

249. TRES BOLAS. $p(1_1) = 1/3$. $p(2_1) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$. $p(3_1) = 2/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/3$.
Luego los tres tienen la misma probabilidad.

250. PARTIDAS DE AJEDREZ. P(2 de 4) = 6/16   P(3 de 6) = 20/64 = 5/16.
Luego es más probable ganar dos de cuatro partidas.

BIBLIOGRAFÍA

Albaiges Olivart J. M. - ¿Se atreve Vd. con ellos? Marcombo. Barcelona. (1981)

Allem, J. P. - Juegos de ingenio y entretenimiento mat. Gedisa. Barcelona. (1984)

Allem, J. P. - Nuevos juegos de ingenio y entret. mat. Gedisa. Barcelona. (1984)

Barry Townsend, Charles. - Acertijos Clásicos. Selector. (1994)

Berrondo, M. - Los juegos matemáticos de eureka. Reverté. Barcelona. (1987)

Corbalán, F. - Juegos matemáticos para secundaria y Bach. Síntesis. Madrid. (1994)

Falleta, N. - Paradojas y juegos. Ilustraciones, ... Gedisa. Barcelona. (1986)

Fixx, J. - Juegos de recreación mental para los muy intelig. Gedisa. Barcelona. (1988)

García Solano, R. - Matemáticas mágicas. Escuela Española. Madrid. (1988)

Gardner, M. - Nuevos pasatiempos matemáticos. Alianza. Barcelona. (1980)

Gardner, M. - Carnaval matemático. Alianza. Barcelona. (1980)

Gardner, M. - Circo matemático. Alianza. Barcelona. (1983)

Gardner, M. - Festival mágico-matemático. Alianza. Barcelona. (1984)

Gardner, M. - ¡Ajá! Inspiración ¡Ajá! Lábor. Barcelona. (1981)

Gardner, M. - ¡Ajá! Paradojas que hacen pensar. Lábor. Barcelona. (1983)

Gardner, M. - Ruedas vida y otras div. matemáticas. Lábor. Barcelona. (1985)

Gardner, M. - Juegos y enigmas de otros mundos. Gedisa. Barcelona. (1987)

Guzmán, M. de - Cuentos con cuentas. Lábor. Barcelona. (1984)

Guzmán, M. de - Mirar y ver. Alhambra. Madrid. (1976)

Holt, M. - Matemáticas recreativas 2. Martínez Roca. Barcelona. (1988)

Holt, M. - Matemáticas recreativas 3. Martínez Roca. Barcelona. (1988)

Lánder, I. - Magia matemática. Lábor. Barcelona. (1985)

Mataix, M. - Cajón de sastre matemático. Marcombo. Barcelona. (1978)

Mataix, M. - Divertimientos lógicos y matemáticos. Marcombo. Barcelona. (1979)

Mataix, M. - Fácil, menos fácil y difícil. Marcombo. Barcelona. (1980)

Mataix, M. - El discreto encanto de las matemáticas. Marcombo. Barcelona. (1981)

Mataix, M. - Nuevos divertimientos matemáticos. Marcombo. Barcelona. (1982)

Mataix, M. - Droga matemática. Marcombo. Barcelona. (1983)

Mataix, M. - Ocio matemático. Marcombo. Barcelona. (1984)

Mataix, M. - Problemas para no dormir. Marcombo. Barcelona. (1987)

Mataix, M. - En busca de la solución. Marcombo. Barcelona. (1989)

Mathematical Association of America - Concursos de mat. Euler. Madrid. (1996)

Northrop, E. P. - Paradojas matemáticas. Uteha. México. (1977)

Paraquín, K. H. - Juegos visuales. Lábor. Barcelona. (1978)

Perelman, Y. I. - Matemáticas recreativas. Martínez Roca. Barcelona. (1977)

Perelman, Y. I. - Álgebra recreativa. Mir. Moscú. (1978)

Perelman, Y. I. - Problemas y experimentos recreativos. Mir. Moscú. (1983)

Rodríguez Vidal, R. - Diversiones matemáticas. Reverté. Barcelona. (1983)

Rodríguez Vidal, R. - Cuentos y cuentas de los mat. Reverté. Barcelona. (1986)

Rodríguez Vidal, R. - Enjambre matemático. Reverté. Barcelona. (1988)

Smullyan, R. - ¿Cómo se llama este libro? Cátedra. Madrid. (1981)

Smullyan, R. - ¿La dama o el tigre? Cátedra. Madrid. (1983)

Smullyan, R. - Alicia en el país de las adivinanzas. Cátedra. Madrid. (1984)

Thio de Pol, S. - Primos o algunos dislates sobre números. Alhambra. Madrid. (1976)

Revistas: SUMA. - ICE. Zaragoza.

Revistas: UNO - Laboratorio de matemáticas. Grao. Barcelona. (1996)

Estos problemas y muchos más se encuentran en **Internet** en la siguiente dirección:

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
CENTRO DE PROFESORES Y RECURSOS
SALAMANCA

CPR