Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 14, No 1. Setiembre — Febrero 2014. ISSN 1659 -0643

Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje

William J. Ugalde
william.ugalde@ucr.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Recibido: 18 Abril 2013 Aceptado: 24 Julio 2013

Resumen. La principal intención de este trabajo es motivar a los docentes e investigadores en educación matemática a integrar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas relacionados con el concepto de función, el desarrollo histórico de dicho objeto de estudio. Como segundo objetivo se desea sugerir diferentes actividades que se pueden utilizar para estudiar el concepto de función en los varios niveles de la educación formal. Este artículo se divide en tres secciones. La primera sección es una revisión del desarrollo del concepto de función a través de la historia. La segunda sección es un breve estudio de los tipos de definición existentes y las diferentes formas de representar funciones. La tercera sección es un recuento de actividades o situaciones de interés, con la intención de indicar facetas interesantes a la hora de estudiar el concepto de función.

Palabras clave: historia de las matemáticas, función, actividades de enseñanza aprendizaje.

Abstract. The main intention of this work is to motivate teachers and researchers in math education to integrate in the processes of teaching and learning mathematics related to the concept of function, the historical development of such an object of study. As a second objective, it is intended to suggest different activities that can be used to study the concept of function in the various levels of formal education. The first of three sections in this paper is a historical review of the development of the concept of function . The second section is a brief study of the types of existing definitions and the different ways to represent a function. The third section lists activities of situations of interest, aiming to identify interesting stages during the study of the concept of function.

KeyWords: history of mathematics, function, learning-teaching activities.

1.1 Introducción

> *El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad.*
>
> M. Spivak.

Al imaginarse la forma más primitiva de contar –para los propósitos de este artículo, la forma más primitiva de función–, se asigna a cada uno de los objetos de interés, un dedo de la mano o una marca en una vara de madera. De este modo, cada uno de los objetos se hace corresponder con uno de los dedos o con una de las marcas. El conjunto de dedos seleccionados o marcas en la vara describe, en cardinalidad, el conjunto de objetos en cuestión. Esta sencilla observación pone de manifiesto tres hechos importantes.

a) Que el concepto de función está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto (amén de otros conceptos como relación, variable, criterio, etc.).

b) Que el concepto de función desde su origen –cualquiera que este sea–, está ligado al desarrollo del concepto de cantidad, y más generalmente, al concepto de número.

c) Que el concepto de función nace del interés de la humanidad por entender el mundo que le rodea.

Al renombrado matemático Fourier se le atribuye la frase: *"el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos".* Véase [5], por ejemplo.

No es de extrañarse entonces que el desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia, vaya de la mano con los diferentes intereses de la humanidad en entender y tratar de describir la naturaleza en la que vive. Como se verá adelante, este interés se concentra primero en la simple observación y tabulación primitiva de algunos fenómenos o cuentas. Piénsese aquí en las culturas de la antigüedad. Luego, se basa en razonamientos filosóficos, algunas veces religiosos, como es el caso de la Grecia clásica, para después de muchos años dar paso a un proceso más científico, apoyado en observaciones y cuantificaciones serías del entorno; para culminar, luego de un esfuerzo en conjunto por muchos grandes matemáticos, en un objeto perfectamente definido, inherente a toda la matemática que se desarrolla hoy en día, y con una demostrada utilidad a la hora de modelar el mundo y las leyes que lo rigen.

El concepto de función está presente en toda la matemática. No sólo es central en las áreas propias de la matemática (llamada teórica o pura), si no que es la herramienta por excelencia en las áreas que buscan modelar o describir las actividades cotidianas y los fenómenos que se perciben (matemática aplicada). Esta universalidad además de enriquecer el concepto, le otorga una importancia relevante a su correcto entendimiento. Como tal, es fundamental comprender que el concepto de función, como tantos otros conceptos de la matemática, no debe enseñarse como un ente abstracto, si no que debe tenerse presente que lo que le dio vida fue precisamente el entendimiento de fenómenos naturales y situaciones cotidianas alrededor del hombre. Claros ejemplos de esta condición son:

- La trigonometría.

- Las leyes de la física.
- Estudios de crecimiento de poblaciones.
- Interés simple o compuesto.

Es inmediato entonces que la idea predominante en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función debe ser, tratar de imitar en los mejores aspectos posibles, el desarrollo histórico de dicho concepto.
Dicho desarrollo histórico presenta las mismas dificultades, diversas caracterizaciones, formas de representación, etc., que deben estudiarse en el aula. Como lo observan Gutiérrez et al en [14]:

> No se trata de llegar a una clase y comenzar a contar todo el desarrollo histórico del tema de funciones, si no más bien, de crear situaciones que inviten a reflexionar sobre el impacto social, económico, político y hasta cultural, en la humanidad.

Este enfoque requiere un esfuerzo grande por parte de los docentes y en general, por parte de las instituciones involucradas. Es necesario entonces recordar dos aspectos fundamentales que apoyan el proceso de enseñanza aprendizaje. Primero, que no se puede enseñar lo que no se sabe. Y segundo, que la motivación del docente por favorecer el aprendizaje de los estudiantes es uno de los principales catalizadores de dicho aprendizaje.

Estas notas son el resultado del mini curso titulado "Funciones: paso de la secundaria a la universidad", impartido por el autor durante el mes de agosto del 2012 en la *Escuela seminario internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática: CANP Costa Rica 2012*, auspiciado por la International Comission on Mathematical Instruction. Cómo tal, la principal intención de este trabajo es motivar a los docentes e investigadores en educación matemática a integrar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas relacionados con el concepto de función, el desarrollo histórico de dicho objeto de estudio (una excelente fuente para este aspecto es el artículo [18]). Como segundo objetivo se desea sugerir diferentes actividades que se pueden utilizar para estudiar el concepto de función en diferentes niveles de la educación formal, desde los más básicos a los más avanzados. Por último, se listan una serie de inquietudes en la Sección 1.5.1, con la esperanza que ellas sirvan de inspiración para futuros trabajos de estudio sobre el tema de funciones.

Este artículo se divide en tres secciones. La primera sección es una revisión del desarrollo del concepto de función a través de la historia. En esta parte del artículo aparecen múltiples observaciones sobre diferentes percepciones a través de la historia y de las culturas de conceptos previos al de función. Diferentes autores argumentan si es válido o no reconocer en ellos los orígenes del concepto de función. Dado que este trabajo es también de índole motivacional, se invita a los lectores a profundizar en dichas opiniones.

La segunda sección es un breve estudio de los tipos de definición existentes y las diferentes formas de representar funciones. La tercera sección es un recuento de actividades o situaciones de interés, con la única intención de indicar facetas interesantes a la hora de estudiar el concepto de función. La idea de esta sección es invitar a los maestros y profesores en ejercicio a ejercer su creatividad a la hora de estudiar el concepto que nos ocupa, y no es este el lugar para explorar estas actividades más allá de los niveles aquí expuestos. Sin embargo, esta sección es en parte motivadora de las inquietudes expuestas al final del artículo.

1.2 Perspectiva histórica

Como es usual en matemática, muchas ideas surgen primero como ideas intuitivas, y luego se van cristalizando al ir refinando el concepto. El concepto de función no escapa esta realidad. El concepto de **función**, como se entiende hoy en día, se consolida en el año 1837, con el matemático Gustav Dirichlet. Sin embargo, algunos autores atribuyen a Galileo la introducción de manera formal del concepto de función en las matemáticas:

> Del estudio matemático de los movimientos deriva un concepto fundamental, que será central para prácticamente todo trabajo de los siguientes doscientos años –el concepto de función o una relación entre variables–, Galileo expresó en esas relaciones funcionales en palabras y en lenguaje de proposición ...
>
> M. Klein (1972)
> "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"

La principal motivación para este estudio es, en primera instancia, la idea que el desarrollo histórico del concepto de función, los obstáculos que enfrentó y las motivaciones que lo impulsaron, son todos herramientas que se pueden utilizar a la hora de enseñar y aprender dicho concepto (la inspiración para este aspecto surgió en parte de la lectura de las fuentes [5], [18] y [14]).

Una segunda motivación nace del simple hecho que el concepto de función ha sido, y es hoy en día, central en el estudio de muchas áreas de las matemáticas.
En el mundo antiguo (Babilonia y Egipto), la matemática desde el punto de vista del concepto de función se limitaba a la elaboración de tablas de mediciones de fenómenos observados. Luego aparecen las matemáticas griegas, en particular los trabajos de Arquímedes con las primeras leyes de la cinemática. Si bien en la Grecia antigua no se conocía el concepto de función como tal, las proporciones y los primeros intentos de cálculo infinitesimal vieron la luz.

Durante la edad media, una época de oscurantismo en muchas áreas del pensamiento humano, se vislumbraron los primeros intentos para representar mediante gráficas sencillas los movimientos y cambios observados en los fenómenos naturales. El mayor auge del concepto de función se dio durante los siglos XVI, XVII y XVIII con el desarrollo de los números reales y el análisis matemático.

El concepto de función se consolida del siglo XIX a la primera parte del siglo XX, cuando este concepto juega un papel central en la gran mayoría de las áreas del que hacer matemático.

Diferentes autores ([2], [5], [9], [13], [16]) dividen el estudio de la historia de la matemática en diferentes períodos. Para desarrollar este trabajo, se eligió la propuesta de Bell en [9], con una pequeña modificación. Dado que de los siete períodos que Bell sugiere, dos están superpuestos en tiempo pero no en espacio, y dado el gran desarrollo en las matemáticas al final del siglo anterior e inicios del presente, es la opinión de este autor que en lo que atañe a este breve estudio es más apropiado dividirla en los siguientes ocho periodos.

a) De la época remota a Babilonia y Egipto inclusive.

b) Los griegos, de 600 aC a 400 dC, aproximadamente.

c) Pueblos orientales y semíticos, entre 600 aC y el siglo XIV.

d) Europa aproximadamente entre los siglos V y XIV, la Edad Media.

e) Europa aproximadamente entre los siglos XV y XVI, El Renacimiento.

f) Siglos XVII y XVIII.

g) Siglo XIX.

h) Siglo XX e inicio del siglo XXI.

Sin lugar a duda, el volumen tan alto de investigación hoy en día, obligará muy pronto a divisiones más finas del octavo periodo que aquí se enuncia. En varias referencias ([5], [17] [18] por citar algunas) se dedica abundante espacio a listar los diferentes matices del concepto de función en la matemática actual. Amén que diferentes enfoques de la historia motivan a diversos acomodos de estas épocas. Sin embargo, el objetivo en esta sección es revisar un poco las ideas preliminares que condujeron al concepto de función en los primeros seis de estos ocho períodos. Luego seguir la huella de la definición formal del concepto de función, principalmente durante la parte final del siglo XVIII, y durante el siglo XIX. Para terminar con una pequeña observación sobre la relevancia del concepto de función en la matemática del siglo XX.

Se revisan ahora, según la lista anterior, los diferentes períodos de la historia de las matemáticas y el desarrollo del concepto de función en cada uno de ellos.

1.2.1 De la época remota a Babilonia y Egipto

La versión más rudimentaria del concepto de función es, sin lugar a duda, el concepto de **dependencia entre cantidades**. Como tal, está presente en tablas de arcilla de los babilonios y en papiros de los egipcios.

Los babilonios escribieron múltiples tablas de cálculo. Dos de ellas datan de 2000 aC y dan los cuadrados de los números del 1 al 59, y los cubos de los números del 1 al 32. Los babilonios conocían las relaciones

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad \text{y} \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4},$$

con lo cual, la tabla de cuadrados era suficiente para calcular cualquier producto. Un dato interesante de tomar en cuenta es como estas tablas se presentan en forma de columnas, como un anticipo a través de la historia, de las tablas que hoy en día se utilizan en los primeros niveles de enseñanza para representar funciones de variable discreta real $y = f(x)$. Además, se sabe que complementaban sus tablas por medio de aritmética, usando interpolaciones y extrapolaciones de datos.

En el Papiro Rhind (Egipto alrededor de 1700 aC) hay una tabla de descomposición de $N/10$ para $N = 1, \ldots, 9$ usada para facilitar cálculos y otra tabla en la que se expresan todas las fracciones del numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias.

Si bien es cierto, estas culturas no percibieron el concepto de función (como se le conoce hoy en día [5], [16], [17]), pues no abstrajeron el concepto general de fórmula, dado quizá a la limitante de no tener simbología adecuada y lo empírico e intuitivo de su matemática, entre otros factores. Sin embargo, estudiaron problemas como la variación de la luminosidad de la luna en intervalos iguales de tiempo, o períodos de visibilidad de un planeta respecto a su posición relativa con el sol. Este tipo de problemas con lleva, en forma latente, un sentido de *funcionalidad*.

Otro concepto que antecede al de función es el de **fórmula**, en el sentido que diferentes valores (o variaciones de una o varias cantidades iniciales –variables independientes–), producen diferentes resultados (o variaciones de una cantidad final –variable dependiente–). Evidencias indican que Egipcios y Babilonios no lograron entender el concepto de fórmula general como se acaba de describir [16]. Los egipcios tenían un método diferente para calcular el área de un círculo de radio 3, que para calcular el área de un círculo de radio 4. Pero entendieron el concepto de dependencia ya que sabían que una variación en la longitud del radio resultaba en una variación en la magnitud del área, amén de muchas otras situaciones registradas en innumerables tablas de valores.

1.2.2 Los griegos, de 600 aC a 400 dC

La primera vez que parece ser claro en la historia la noción de dependencia entre cantidades sucede con los griegos, en particular con Arquímedes y las leyes de la mecánica.
La primera ley de la hidrostática, descubierta por Arquímedes establece que

> Cualquier cuerpo sólido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido.

Con poco esfuerzo es posible establecer en el enunciado anterior, no sólo la dependencia entre cantidades –o magnitudes asociadas a objetos–, si no en forma latente el concepto de función utilizado en la actualidad:

Ejemplo 1.1

Si A es el conjunto de todos los cuerpos sólidos y B es el conjunto de todos los vectores verticales que apuntan hacia arriba entonces, para todo x en A existe un único $F(x)$ en B tal que $||F(x)|| =$ volumen(x).

Otros ejemplos de dependencia entre cantidades se encuentran en su trabajo sobre las espirales. Por ejemplo:

> El área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta.

En sus trabajos en geometría, en el tratado sobre la esfera y el cilindro, destaca la relación entre el área y el volumen de una esfera y un cilindro circunscrito con la misma altura y diámetro. Arquímedes descubrió que:

> La esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro.

Por último, se cita su descubrimiento sobre la cuadratura de la parábola. Arquímedes prueba que

> El área comprendida entre una parábola y una línea recta es 4/3 multiplicado por el área de un triángulo que tiene por base el segmento de la recta y cuyo vértice superior está sobre la parábola, en el punto medio que forman las verticales a través de los puntos de intersección.

Para mostrar este último hecho, usó una serie geométrica.

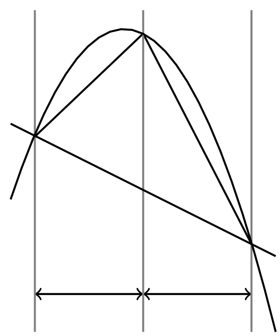

Figura 1.1: Resultado de Arquímedes sobre el área dentro de una parábola

El paso al límite fue fundamental en el desarrollo del análisis, y como resultado, en el desarrollo del concepto de función. Arquímedes utilizó los infinitesimales, a través de la reducción al absurdo (*reductio ad absurdum*), aproximó el valor del número π y postuló que cualquier magnitud, sumada a sí misma suficientes veces, puede exceder cualquier otra magnitud dada.

Una observación es pertinente. La visión homogénea de las relaciones entre las cantidades (largo es a largo como área es a área) y la filosofía hacia la matemática, propiamente la idea de Aristóteles de oponer la matemática –estrictamente teórica–, a la física –ocupada de los objetos en movimiento–, motivaron que por muchos años se desarrollaran los conceptos de incógnitas y ecuaciones, en lugar de variables y funciones.

Antes de pasar al siguiente período de la historia, se hace ahora una pequeña observación sobre el concepto de función y la geometría, pilar de la matemática griega. El primer postulado de Euclides establece:

> Por dos puntos distintos pasa sólo una línea recta.

O bien, el postulado equivalente dado en honor al matemático escocés John Playfair:

> A través de un punto fuera de una línea recta, se puede construir solamente una línea recta paralela a la recta dada.

Es un ejercicio interesante establecer en el enunciado anterior, el concepto de función utilizado en la actualidad, tomando apropiados conjuntos de salida y llegada.

Ejemplo 1.2

Si A es el conjunto de todos los pares de puntos distintos de un plano, y B es el conjunto de todas las rectas en el plano entonces, para todo x en A existe un único $f(x)$ en B tal que $x \subset f(x)$.

O bien, si A es el conjunto de todos los puntos de un plano que no pertenecen a una recta dada, y B es el conjunto de todas las rectas en el plano paralelas a la recta dada entonces, para todo x en A existe un único $f(x)$ en B tal que x en $f(x)$.

1.2.3 Pueblos orientales y semíticos, entre 600 aC y el siglo XIV

Se concentra el estudio ahora en los pueblos árabes e hindúes, simplemente porque se desea identificar hechos históricos que influenciaron la percepción actual del concepto de función. Si en otras épocas o culturas se evidenciaron instancias iniciales de este concepto, pero la historia no permitió que ese conocimiento permeara nuestra percepción, no se le mencionarán en esta reseña.
La matemática árabe (entre los siglos VII y XIII) brinda las primeras evidencias de lo que hoy se llaman razones trigonométricas. Los árabes de esa época tenían ya tablas de senos y cosenos, y tablas para la secante, cosecante, tangente y cotangente. Además sentaron las bases del álgebra, la aritmética y la trigonometría –desarrollada a partir de la trigonometría hindú (a través de un texto de astronomía, el Surya Siddhanta)–, lo cual representaba una visión revolucionaria en contraparte a la geometría de los griegos. Para el siglo X ya habían calculado tablas para las funciones trigonométricas –evidentemente, sin ser consideradas como las funciones de hoy en día–, incluidas la secante y la cosecante. Es importante entender que nuestra noción de función debía esperar otros 600 años, por lo que las obras matemáticas de la época no se parecen a la trigonometría elemental de nuestros días.

El interés en la trigonometría por parte de los árabes se vio potenciado cuando entraron en contacto con las tablas de los hindúes. De hecho, la finalidad básica era mejorar la exactitud de éstas.
Se mencionan dos tradiciones en la astronomía y las matemáticas en el Bagdad de la época. Una con base en las fuentes persas e hindúes, que subrayaba una aproximación algebraica en las matemáticas, presente en las tablas astronómicas, con una motivación práctica. En esa tradición se coloca al-Jwārizmi, quien construyó tablas astronómicas, que tuvieron influencia por 500 años.

Otra tradición con énfasis en las matemáticas helenísticas, que subrayaba la geometría y los métodos deductivos. Su figura emblemática: Tabit ibn Qurra, quien alrededor del año 850, descubrió una fórmula general con la cual se podían hallar "números amigos" (dos números enteros positivos a y b tales que a es la suma de los divisores propios de b, y b es la suma de los divisores propios de a –la unidad se considera divisor propio–). Por ejemplo, los números 220 (con divisores 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110) y 284 (con divisores 1, 2, 4, 71 y 142).

Sin temor a ser redundantes, se acota que en el párrafo anterior se evidencian dos concepciones primitivas del concepto de función: las tablas de valores y la fórmula.

Para concluir este párrafo, se presentan la siguiente construcción usada por los artesanos árabes en sus cerámicas (véase [23] y [14]). Esta construcción tiene, evidentemente, una gran in fluencia griega y en forma asombrosa, llama la atención a las gráficas de la época Cartesiana.

> Sobre una recta AG se sitúa un punto arbitrario B y se traza la recta BE, perpendicular a AG. En el segmento BG se marcan puntos arbitrarios H, D, Z, ... Las semi circunferencias de diámetros AH, AD, AZ, ... determinan, respectivamente, los puntos T, I, F, ... de la recta BE. los puntos K, L, M, ... de la figura pertenecen a la parábola de vértice B, eje AG y parámetro AB.

La parábola anterior tiene por recta directriz una recta paralela a la recta BE situada a un cuarto de la distancia entre B y A, y por foco un punto situado sobre el rayo BG, también a un cuarto de la distancia entre B y A, ambos indicados en color.

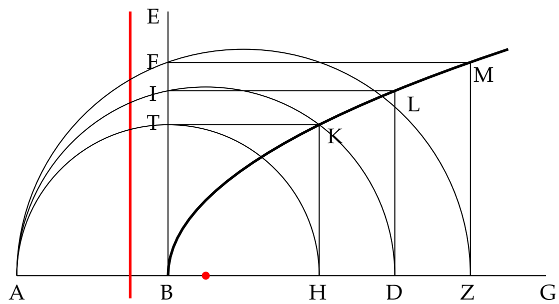

Figura 1.2: Dibujando una parábola

1.2.4 Europa aproximadamente entre los siglos V y XIV

La Edad Media. Apoyados en la tesis que las matemáticas, y en particular el concepto de función, surgen históricamente del tratar de entender la naturaleza que nos rodea, poco se puede decir sobre el desarrollo de la matemática durante toda la Edad Media. Como lo anota Barahona en [5]:

> "El conocimiento de la naturaleza durante los primeros siglos de la Edad Media era considerado de importancia secundaria. No se pretendía que su estudio condujera a hipótesis y generalizaciones científicas sino que proporcionara símbolos vivientes de las realidades morales."

Es evidente que durante semejante época de oscurantismo científico y cultural, el concepto de función, aún como dependencia entre cantidades, no tuvo ninguna o muy poca oportunidad de desarrollo. Dicho desarrollo debe esperar hasta el Renacimiento, donde el concepto de dependencia entre cantidades recobra el impulso que inicialmente le diera Arquímedes.

Sin embargo, es importante anotar dos hechos históricos cercanos al final de este período.
Primero, en el siglo XIV, en Oxford, Thomas Bradwardine utilizó un "álgebra de palabras" para expresar relaciones de tipo funcional. Su idea era utilizar letras del alfabeto en lugar de números para sustituir cantidades variables, y representar con palabras, las operaciones suma resta, etc. En su obra "del tractatu de proportionibus velocitatum" establece que

> Cuando la fuerza es mayor que la resistencia, la velocidad depende de los cocientes de ambas magnitudes, y cuando es igual o menor no se produce movimiento.

En concreto consideraba que "elevando al cuadrado el cociente de la fuerza y la resistencia, se produce una duplicación de la velocidad, y a la inversa" (citado por M. Klein en "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times").

Segundo, en Paris, Nicholas Oresme, alrededor de 1361, diseñó una versión primitiva de representación gráfica para modelar la forma en que algunas cosas varían, en particular, fenómenos naturales. Utilizó segmentos verticales de diferentes longitudes, para representar diferentes variaciones de un mismo objeto siendo observado, apoyados sobre un segmento horizontal, con la idea de formar una figura geométrica. Su idea era que propiedades de la figura geométrica, representaban propiedades de la cualidad o magnitud siendo observada.

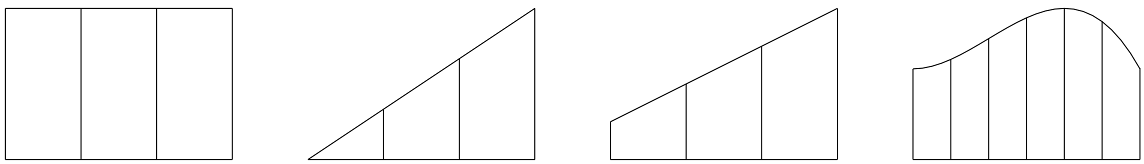

Figura 1.3: Representaciones utilizadas por Oresme

En la Figura 1.3 se observa, según las representaciones de Oresme, a la izquierda una velocidad constante; al centro velocidades con aceleraciones constantes. La primera de ellas con velocidad inicial cero, y la segunda con velocidad inicial dada. A la derecha, una velocidad con aceleración variable. En estas gráficas, el segmento horizontal representa el tiempo, y los segmentos v verticales representan diferentes velocidades.

Una diferencia significativa con las representaciones gráficas actuales radica en el hecho que sobre el segmento horizontal no existía ninguna referencia a escala o a posiciones relativas, como resultado, no había en sus representaciones asociaciones de tipo algebraico.

1.2.5 Europa aproximadamente entre los siglos XV y XVI

El Renacimiento. Varias situaciones empujaron el desarrollo del concepto de función (véanse por ejemplo [5], [16], [17], [18]), de estas, dos en particular se centran en este período: el uso de símbolos para representar objetos matemáticos y un nuevo enfoque al estudiar la naturaleza.

a) El uso de **símbolos para representar objetos matemáticos**. Entre los momentos que se destacan en la historia, de este uso de símbolos para representar objetos matemáticos, se recuerdan ahora los siguientes.

- al-Jwārizmi en 830 (ocho siglos antes de la época en cuestión) escribió

  census et quinque radices equantur viginti quator,

  para representar $x + 5\sqrt{x} = 24$.

- Cardano en 1545 (un siglo antes de la época en cuestión) escribió

  cubus p6 rebus aequalis 20,

  para representar $x^3 + 6x^2 = 20$. Aquí "cubus" y "rebus" se utilizaron para representar el cubo y el cuadrado de la misma incognita, y la letra p para representar "suma".

- Viète 1570 (circa) escribió

  $$\mathbf{C + 8Q + 16N\ aequ\ 40},$$

  para representar $x^3 + 8x^2 + 16x = 40$. Aquí N representa la incógnita, y C y Q representan el cubo y el cuadrado, respectivamente, de dicha incógnita.

  Más tarde, Descartes (1637) escribió la ecuación anterior en la forma

  $$\mathbf{xxx + 8xx + 16x = 40}.$$

b) Un **nuevo enfoque al estudiar la naturaleza**. Antes del siglo XV el estudio de la naturaleza no logró romper su ligamen con la teología. En el siglo XVI primordialmente, los científicos se plantearon problemas desde el punto de vista experimental y físico. El estudio de variables requería entonces relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas adecuadamente. Todo esto implicaba nuevas relaciones que podían verificarse en forma experimental. Al estudiar fenómenos naturales desde una nueva perspectiva matemática, se descubrían nuevas relaciones y un notable progreso en esta ciencia.

1.2.6 Siglos XVII y XVIII

En esencia la dificultad más importante en el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de una idea de dependencias funcionales la cual permitiera aplicar a ellas las operaciones del nuevo cálculo. Por ello resultaba cada vez mas necesario investigar el significado del concepto de función, dar la clasificcción de todas las funciones conocidas y encontrar los medios de operar con ellas. El problema de la creación de la teoría de funciones se convirtió en el primer problema o problema preliminar del análisis infinitesimal.

De Ribnikov.

El rápido desarrollo de las matemáticas de los siglos XVII y XVIII, las matemáticas de los siglos venideros y muy particularmente el desarrollo del concepto de función, se inicia con la publicación de los trabajos de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz a partir del año 1600.
Dentro de los catalizadores que durante este período fomentaron la formalización del concepto de función se citan los siguientes.

a) La **introducción de sistemas coordenados**. En el "Discurso del Método", Descartes expone su visión del sistema coordenado. Si bien no consideró el uso de los números negativos –no muy populares en la época–, su sistema sienta las bases para lo que hoy se llama en su honor "Sistema Cartesiano de Coordenadas". Es fácil intuir que Descartes distinguía el concepto de dependencia entre cantidades, el papel de la variable independiente y la variable dependiente, cantidades que permanecen constantes, entre otros. Sin embargo, nunca brindó una definición explícita.

Se cita de nuevo a Barahona [5]:

> "... el hecho de tener ecuaciones para representar determinadas curvas no implica haber definido el concepto de función. Lo que si había era una clara concepción de la dependencia entre las variables expresadas mediante fórmulas ..."

b) El uso que hizo Fermat de **ecuaciones para representar ciertas curvas**. En el año 1629 había encontrado las ecuaciones de la recta, la circunferencia con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola.

c) El uso de Galileo de **fórmulas** para relacionar ciertas cantidades, en particular, para representar las relaciones que se generan entre determinadas variables, al estudiar algún fenómeno. Por su potencial importancia a nivel de la didáctica de la matemática, y su demostrada efectividad en la historia de la ciencia, se listan ahora una síntesis (adaptada de [5]) de la forma de trabajar sugerida por Galileo:

Método sugerido por Galileo para abordar problemas científicos:

1. A partir de los datos recolectados al observar un fenómeno, crear un modelo ideal al desechar variables que no influyen en forma determinante en los resultados.
2. A partir de reiteradas repeticiones del experimento, se obtiene el promedio de las mediciones, tomando en cuenta correcciones resultantes de factores perturbadores.
3. A partir de las mediciones obtenidas en los experimentos, se formulan hipótesis matemáticas, con el objetivo de obtener conclusiones basadas en razonamientos lógicos.
4. Nuevamente, mediante experimentación, se verifican las conclusiones con el fin de verificar las hipótesis planteadas.

Los hechos a) y b) citados anteriormente, también marcan el nacimiento de la *Geometría Analítica*. Este sin embargo, es tema para otro artículo.

El primer gran aporte de esta época hacia la formalización del concepto de función surge con Newton y su teoría de **fluxiones**. En su teoría las magnitudes están descritas como movimientos continuos, de manera tal que la variable "dependiente" se va generando en forma continua a partir de la variable "independiente". Newton utilizó la palabra **genita**, que en latín significa generada o nacida, para referirse a expresiones de la forma Ax^n. Para varios autores, "genitum" surge como la primera expresión usada para referirse al concepto de función.

En julio de 1698 Leibniz escribe una carta a Johann Bernoulli:

> Me agrada que usted use el término función en el sentido que lo sugiero...

Las funciones reales de variable real son el objeto central de estudio del Cálculo Diferencial e Integral. En 1692, en su artículo **De Linea Ex Lineis Numero Infinitis Ordinatim Ductis**, Leibniz usó por primera vez las palabras *Cálculo Diferencial* para referirse a dicha teoría. Más importante para el tema en cuestión, la palabra función aparece por primera vez en un manuscrito de Leibniz de 1673, *Método de la inversa de las tangentes, o de las funciones.*

Luego en 1694 lo usa en la frase:

> La recta tangente y algunas otras funciones que dependen de ella, por ejemplo, las perpendiculares trazadas desde la curva a un eje ...

en el artículo "Considerations sur la difference qu'il'y a entre l'analyse ordinaire et nouveaux calcul des trascendentes".

En agosto del mismo año, en su respuesta Bernoulli escribe:

> Para denotar una función de alguna indeterminada, por ejemplo, la indeterminada x, uso la correspondiente letra mayúscula X ó la letra griega "ξ_x", de modo que se pueda ver al mismo tiempo de que cantidad indeterminada depende la función ...

La primera definición de función aparece en 1699 en un artículo de Johann Bernoulli publicado en "Acta Eroditorum":

> Aquí denotamos por función de una variable una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes.

A partir de este momento, la idea intuitivamente geométrica de función utilizada por Leibniz, adquiere un carácter más abstracto, al atribuírsele por primera vez, un sentido analítico.

En 1737, Clairaut utiliza funciones en el sentido descrito por Bernoulli, y para denotarlas utiliza símbolos como π_x y σ_x.

El símbolo $f(x)$ fus usado por primera vez por Eüler en 1740 en un artículo llamado "Additamentun". Más tarde, en 1748, en el capítulo primero de su "Introductio in Analysis Infinitorum", Eüler se refirió al concepto de función de la manera siguiente:

> Toda relación entre x y y tal como se representa en el plano mediante una curva trazada a mano libre.

Luego escribe,

> Por lo tanto cada expresión analítica, en la cual aparecen aparte de una cantidad variable "z", otras cantidades constantes que componen esta expresión, es una función de esta "z". Algunas de estas expresiones son por ejemplo:
>
> $$a+3z, \quad \text{ó}$$
> $$az-4zz, \quad \text{ó}$$
> $$az+baa-zz-c.$$

En el mismo trabajo aclara:

> Se acostumbra denominar como funciones a las cantidades dependientes de otras, tal que, como consecuencia de la variación de la últimas cambian también las primeras.

Es en extremo interesante recordar que el desarrollo del análisis se daba paralelo a todas estas situaciones. En particular, el concepto de función continua (y la terminología pertinente) aún estaba por acuñarse.

A la fecha, no existía un claro entendimiento entre el papel del dominio de la función, y la relación que determina la variable dependiente en términos de la variable independiente.

Siempre dentro del mismo documento, y haciendo uso de su noción de función Eüler escribe:

> Una curva continua es de tal naturaleza que puede ser expresada por una sola función de x. Pero si una línea curva es de tal naturaleza que varias partes de ella, BM, MD, DN, etc; son expresadas por varias funciones de x, de modo que la parte de BM ha sido definida con la ayuda de una función, la parte MD es descrita por otra función y así sucesivamente, entonces llamaremos a esta curva línea discontinua o mixta e irregular, porque ella no está formada de acuerdo a una ley constante sino a partes de varias curvas continuas.

Posteriormente, en el año 1755, en su obra "Instituciones Calculi Diferencials", Eüler escribe al referirse a la idea de función:

> ... es una expresión algebraica que puede ser anotada por una sola fórmula analítica tal como un polinomio, un seno, un coseno, un logaritmo o aún una integral de cualquiera de estas expresiones.

En 1787, en su afán de dotar al cálculo de un fundamento netamente algebraico, Lagrange escribió:

> El Algebra no es otra cosa que la teoría de funciones. En el Algebra las cantidades buscadas deben ser funciones de cantidades dadas, es decir, expresiones representadas por diferentes operaciones, las cuales es necesario realizar con esas cantidades para obtener los valores buscados.

En palabras del mismo Lagrange,

> Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas.

Entre los años 1750 y 1801, el concepto de función, en el sentido entendido por Eüler generó polémica y ocupó la mente de muchos matemáticos de Europa. La discusión se centraba en si una función debía o no ser expresada mediante una sola fórmula. Al estudiar el **problema de las cuerdas vibrantes** destacaban las soluciones de Daniel Bernoulli (quien obtuvo la solución por medio de una única fórmula expresada por medio de una serie trigonométrica) y la de Jean D'alambert (cuya solución podía ser dada por fórmulas diferentes para diferentes valores del argumento). Se tenía entonces un mismo problema, con dos soluciones diferentes.

En particular los matemáticos de la época pensaban que la solución de Bernoulli estaba incompleta. En 1801, Jean Fourier demostró que la suma de una serie infinita de funciones trigonométricas puede expresarse en intervalos diferentes mediante fórmulas diferentes. Este hecho puso fin a la discusión, y como el mismo Fourier lo sugirió, lo más importante es cómo se expresan los valores que toma la función, y que si dichos valores se pueden expresar de una o de varias maneras no era lo esencial. En la práctica, no había diferencia alguna entre las soluciones de Bernoulli y D'alambert.

1.2.7 Siglo XIX

Es en la primera mitad del siglo XIX, cuando Cauchy, Lobachevsky, Dirichlet y Riemann, a través de la teoría de funciones establecida en 1797 por Joseph Lagrange, dan una definición más rigurosa y general que la dada por Eüler.

En su *Curso de Análisis Algebraico* de 1827, Cauchy escribió:

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable.

En 1834, Lobachevsky escribió:

> El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida.

Las palabras de Lobachevsky merecen dos observaciones:

- Establece por primera vez la condición de que la función debe asignar un valor a todo "número" en (lo que sería) su *dominio*.
- Se desliga la necesidad de conocer en forma expresamente analítica el criterio de asignación de valores.

El primer matemático en dar una definición satisfactoria del concepto de función fue Gustav Dirichlet. Hay dos oraciones atribuidas a Dirichlet, ambas del año 1837:

> Una cantidad variable "y" se llama función de la cantidad variable "x" si a cada valor de "x" le corresponde un solo y determinado valor de "y".

y

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Para declarar por cimentada la definición de función, en 1858 Riemann escribió:

> Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y.

La siguiente etapa en el desarrollo del concepto de función se inició casi de inmediato por el mismo Dirichlet al sugerir que:

> Una función podía ser expresada, incluso solamente con palabras.

La intención era desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas. El ejemplo clásico lo dió el mismo Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$$

Este ejemplo abrió el portillo para la definición de muchas otras funciones y curvas con las más extrañas características.

Sería tarea de los matemáticos que vivieron en la época de la teoría de conjuntos, muchos años más tarde, agregar las palabras "perteneciendo a un conjunto" en los lugares apropiados.

1.2.8 Siglo XX

El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales.

Hausdorf (1978).

La percepción del concepto de función en el siglo XX se desliga ya del uso de variables numéricas, y alcanza los altos grados de generalidad con la que se le conoce hoy en día. Ya no es necesario que la variable independiente sea un número real o complejo, ni su valor debe de ser de tal naturaleza. El desarrollo de las matemáticas al final del siglo XIX e inicio de siglo XX, y los requerimientos de otras disciplinas como la física, hicieron inevitable pasar al estudio de funciones definidas sobre conjuntos arbitrarios con valores en conjuntos arbitrarios.
Buscando el rigor que de sustento al uso de este concepto dentro de las estructuras altamente formales y abstractas de las matemáticas del siglo XX, la definición del concepto de función se ve enmarcado dentro del dominio de la teoría de conjuntos, y en particular, se utiliza la noción de gráfico para darle sustento formal.

Definición 1.1

Sean A y B conjuntos. Una **función** $f : A \to B$ de A en B es un subconjunto f de $A \times B$ tal que:

a) para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a,b) en f; y

b) si (a,b) y (a,b') son elementos de f, entonces $b = b'$.

Con respecto a esta definición general de función, Azcárate y Deulofeu observan:

> Hay que resaltar que se trata de una última generalización del concepto, y que, como tal, pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función

Una de las ventajas de esta generalización basada en la teoría de conjuntos (al entender que los elementos u objetos del dominio pueden ser muy variados en muchos aspectos), es la riqueza de situaciones en las que el concepto de función se hace presente. Una situación elemental, pero que incluso se ha escapado al tratamiento dado a este trabajo, es el caso de conjuntos de pares ordenados, lo que produce funciones de varias variables independientes, las cuales pueden representar por ejemplo, fenómenos físicos o fórmulas para fenómenos que dependen de varias variables.

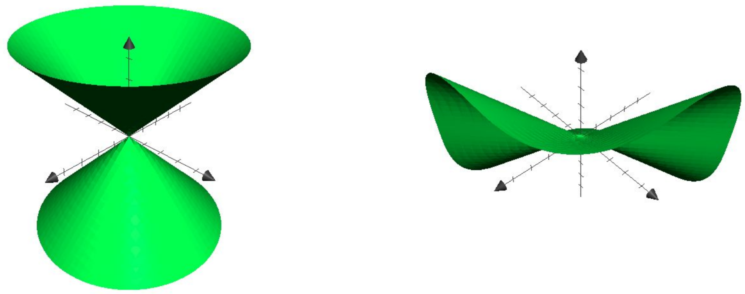

Figura 1.4: $x^2 + y^2 = z^2$ y $x^3 + y^3 = z^3$

Por ejemplo,

$$x^n + y^n = z^n$$

del último teorema de Fermat. Si bien la relación anterior es para números enteros x, y y z, se pueden considerar como variables de valor real. Los gráficos de la Figura 1.4 son respectivamente los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Por último, se debe observar que cada vez más autores –véase por ejemplo Dieudonné [11], Bartle [7] y Apostol [1]– dejan de exigir la propiedad 1.1 **a)** y se limitan a pedir 1.1 **b)**, dejando claro que una función $f : A \to B$ no necesariamente debe actuar sobre todos los elementos de A. Aquellos elementos sobre los que sí actúa forman el dominio. En el caso particular en que el dominio es todo A (es decir si se dan i. y ii.) entonces a dicha función la llaman una **aplicación** de A en B. A este respecto, debe aclararse en este punto que muchos autores modernos en sus libros de análisis real (compárense por ejemplo, [8], [20], [25], [22]), denotan mediante $f(a) = b$ el enunciado $(a,b) \in f$. Con esta notación las condiciones de la definición se escriben:

a') para todo a en A existe b en B con $f(a) = b$;

b') si $f(a) = b$ y $f(a) = b'$ entonces $b = b'$,

lo cual hace la segunda condición parecer un tanto evidente. Más importante aún, esta costumbre ha alejado por muchos años de la mente y el entendimiento de docentes y estudiantes, el concepto de función como un subconjunto del producto cartesiano de su dominio y condominio.

Es mucho el desarrollo de la matemática moderna, y en consecuencia son muchos los avances y las áreas en las que el concepto de función se estudia hoy en día. Pensar en hacer un recuento de cómo el concepto de función se enmarca en la matemática moderna es una labor titánica. Sin embargo, pasos importantes están presentes en [2], [16] y [17].

1.3 Diferentes representaciones y tipos de definición

Una función en el sentido matemático, va más allá de una relación de la forma $y = f(x)$ usada comúnmente. Una función requiere de dos conjuntos A y B (con B diferente de vacío), donde al primer conjunto se le llama dominio y al segundo codominio. Además la función determina una relación entre todos los elementos de A y algunos de los elementos de B. En forma folklórica es común decir que una función de A en B es una regla que asocia a cada elemento de A un único elemento de B. Formalmente, se puede crear un subconjunto f de $A \times B$ exigiendo dos condiciones:

1. para todo a en A existe b en B con (a,b) en f;
2. si (a,b) y (a,b') están en f entonces $b = b'$.

De este modo, la función queda determinada por el trío (A,B,f) el cual es comúnmente denotado $f : A \to B$.

Quizá el más común de los errores con respecto al trabajo con funciones, es la errónea identificación que se hace entre un criterio, como por ejemplo $f(x) = x^2$, y una función.

El criterio anterior anterior puede utilizarse para definir una función sobre cualquier conjunto en el que esté definida una multiplicación, por ejemplo, si $M_2(\mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices dos por dos con entradas reales, entonces la función $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida mediante $f(x) = x^2$, tiene perfecto sentido. De hecho si

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

entonces

$$f(x) = x^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Un ejemplo más: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = x^2$. En este caso, para a y b en $\mathbb{R}$, con $x = a + \boldsymbol{i}b$ en $\mathbb{C}$ se tiene

$$f(x) = x^2 = (a+\boldsymbol{i}b)(a+\boldsymbol{i}b) = a^2 - b^2 + 2\boldsymbol{i}ab.$$

Incluso si se adopta otra postura errónea de uso común, a saber que las funciones están definidas solamente sobre subconjuntos de números reales, con el criterio $f(x) = x^2$, es posible definir una infinidad de funciones diferentes. Para conjuntos finitos:

$$\begin{aligned} f : \{0,1,2,3\} &\to \{0,1,4,9\}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \{0,1,2,3\} &\to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Para conjuntos discretos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z}. \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Para intervalos:

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [0,\infty[. \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Es evidente, que más allá de un simple ejercicio lógico matemático, la distinción entre función y criterio descansa en la aplicación concreta que se tiene en mente, en el contexto preciso en el que se está trabajando.

1.3.1 Representaciones

Más adelante se tendrá oportunidad de explorar algunas actividades y situaciones interesantes. En este momento se exploran un poco las diferentes representaciones existentes, y los diferentes tipos de definición de función.

Descripción verbal	Diagramas	Tabla de valores	Gráfica	Relación algebraica

Tabla 1.1

Las cinco formas por excelencia para representar una función están descritas en la Tabla 1.1. Como lo anotan Azcárate y Deulofeu en [3]:

> El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro

Es entonces importante conocer las debilidades y fortalezas de cada uno de ellos, y tener a la mano una serie de actividades y situaciones en las que cada tipo de representación es más adecuada que las otras.

Descripción verbal: en este tipo de representación, mediante el lenguaje común se ofrece una descripción general, cualitativa, de la relación funcional que asigna los elementos del conjunto de salida, con los elementos del conjunto de llegada. Ofrece una relación funcional que no requiere de simbología elaborada.

Se recuerda en este momento el hito histórico marcado por Dirichlet cerca del final del siglo XIX, cuando sugirió utilizar este tipo de representación para desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas. Se escribe de nuevo el ejemplo clásico, *la función de Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$$

Matemáticamente, la función de Dirichlet es interesante por muchas razones, en particular porque nos da un ejemplo de una función con una cantidad infinita de discontinuidades, más aún, es discontinua en cada uno de los puntos de su dominio. Desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, es interesante porque nos brinda un ejemplo de una función que no se puede graficar (y que cualquier tabla de valores que la represente sería en extremo simplista).

Otro ejemplo interesante de funciones matemáticas cuya representación verbal es más concreta que cualquiera de las otras representaciones es la siguiente función, la cual es además interesante pues es un ejemplo de una función con una cantidad infinita de máximos locales en un intervalo acotado.

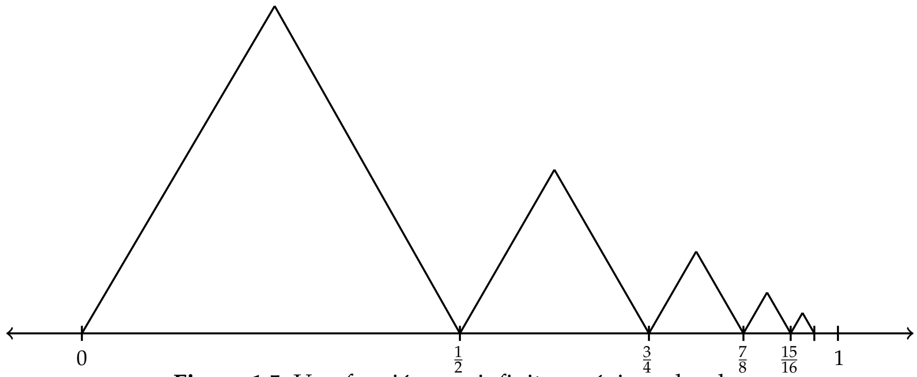

Figura 1.5: Una función con infinitos máximos locales

- Primero divida el intervalo $[0,1]$ en dos intervalos de la misma longitud, a saber $[0,\frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2},1]$.
- Segundo construya un triángulo equilátero sobre el primero de los intervalos.
- Tercero, repita el proceso sobre el segundo de los intervalos.
- Repita este proceso una cantidad infinita de veces.

Obsérvese como la gráfica es tan solo una representación parcial de la función en cuestión.
Los dos ejemplos anteriores son ejemplos de funciones de variable real con valor real que son mejor representadas mediante una descripción verbal. Es evidente que para funciones cuyas variables no sean números en general, la descripción verbal es la más adecuada. Por ejemplo,

- la función que asigna a cada persona la cantidad de hermanos que posee;
- la función que asigna a cada persona su lugar de nacimiento.

Diagramas: La representación mediante diagramas es muy rica visualmente, y guarda estrecha relación con los diagramas de Venn de la teoría de conjuntos. Es muy útil para trabajar con conjuntos finitos, y con fenómenos que no son necesariamente cuantificables.

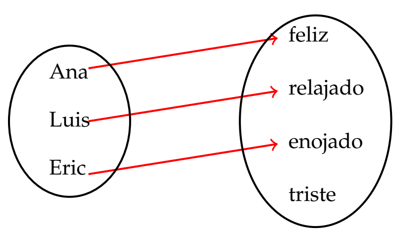

Figura 1.6: Diagramas para representar funciones

Tabla de valores: mediante el listado explícito de pares ordenados, establece en forma concreta que elemento del primer conjunto corresponde a que elemento del segundo. Describe mejor funciones entre conjuntos finitos. Para conjuntos de gran cardinalidad ofrece sólo una visión parcial de la relación funcional. Limita el concepto de sobreyectividad pues brinda la idea errónea que los pares ordenados presentes en la lista son todos los posibles.

De todas las representaciones, la tabla de valores es quizá la más utilizada en forma cotidiana. Se le ve todos los días en los diarios, en las noticias. Se usan para indicar precios, temperaturas, porcentajes.
Por su naturaleza (presenta pares ordenados), es más cercana a la noción de relación o correspondencia, de la cual función es sólo un caso particular. Por su naturaleza finita, es sencillo utilizar la información de la tabla de valores para crear una representación gráfica, sin embargo, se presentan algunos errores usuales.

Un error común a la hora de interpretar tablas de valores es la extrapolación a valores no admitidos. En la Sección 1.4.9 se verá una tabla de valores referente al precio de dólar en Costa Rica. Este precio se da en números discretos que representan el valor del dólar, en colones, en diferentes fechas. Como tal, no es una variable continua, y no tiene sentido el unir puntos de la gráfica con líneas continuas.

Otro error común es olvidar la naturaleza del fenómeno en estudio, y las características que lo definen. Unos cuantos datos por sí mismos pueden dar una versión errónea del concepto global.

Gráfica: las más de las veces una representación cartesiana (discreta o continua), en donde los elementos del primer conjunto se representan sobre un eje horizontal, y los del segundo sobre un eje vertical (claro está, se limitan al caso de dos variables). Permite "visualizar" características globales de la relación funcional. Es la más popular de las representaciones, y guarda una estrecha relación primero, con el desarrollo histórico del concepto de función, y segundo con el cálculo, terreno de juego por excelencia para el estudio y uso de las funciones.

Existen dos tipos, las discretas, y las continuas, dependiendo del fenómeno que se quiera estudiar. En la Sección 1.4 se explorará más este tema.

Relación algebraica: En este tipo de representación se busca, mediante una fórmula matemática o ecuación entre los elementos de los conjuntos en cuestión, expresar en forma explícita o implícita, la relación funcional. Las sucesiones (ver la Sección 1.4.5) son un excelente ejemplo de funciones para las cuales la tabla de valores y la gráfica no son tan buenas como la representación mediante una relación algebraica.

1.3.2 Tipos de definiciones

Diferentes autores intentan dar una clasificación de la definición de función en base al aspecto más relevante que desea destacar, o bien, a las situaciones en las que las funciones son de utilidad. Por ejemplo Azcárate y Deulofeu en [3] proponen la siguiente clasificación, que coincide por la dada por Hitt y Torres (citado en [19]):

- Correspondencia entre valores de variables: cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda.

- Dependencia entre dos variables. Se define primero que significa que una variable varíe en un conjunto, dicho conjunto será el dominio. La función es la relación que establece cómo la segunda variable varía en el segundo conjunto, en relación a la variación de la primer variable en el primer conjunto.

- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos: una función f de un conjunto A hacia un conjunto B es una regla de correspondencia que asignan a cada elemento x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B.

- Conjunto de pares ordenados: una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares ordenados tienen tiene el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función.

Más interesante que clasificar las funciones, es preguntarse, ¿por qué para todo x en A? ¿Por qué un único y en B?

Spivak en [22] define: *"Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento."*

Es interesante observar primero que, dice "números" reduciendo una función a una relación entre subconjuntos de $\mathbb{R}$ y segundo, la idea de dominio está incluida en la idea de que sólo los pares considerados son tomados en cuenta, lo cual invita a reflexionar sobre la primera de las preguntas anteriores.

Bartle en [7] escribe una definición básica para el concepto de función: *"Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada x en algún subconjunto D de A, un único y determinado elemento $f(x)$ de B."*

De inmediato anota que en el caso particular en que D coincida con A, a la función se le llama "transformación" o "aplicación". Este convención coincide con la usada por Apostol en [1].

1.4 Actividades sugeridas y situaciones de interés

> *A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo.*
>
> F. Hitt (2000).
> "Funciones en contexto"

En [14] los autores acotan:

> En la historia se ha observado la enorme dificultad de los grandes estudiosos para llegar a dilucidar con claridad la correcta interpretación de las funciones. No se puede por lo tanto, pretender que los estudiantes interpreten el concepto de una manera inmediata, sin antes haber pasado por un proceso correcto y respetuoso de la naturaleza del concepto, el cual se compara y condensa con el mismo concepto de número

Agregamos nosotros, de conjunto.

Se desea ahora sugerir una lista de actividades o situaciones de interés, que pueden ser utilizadas para estudiar el concepto de función, en diferentes etapas de la formación de los estudiantes (desde las más básidas hasta las más avanzadas); inspiradas algunas en diferentes momentos históricos del desarrollo de este concepto, otras en situaciones interesantes que se pueden presentar a la hora de explorar este concepto.

Muchos autores destinan libros completos (y hoy en día, estudiantes dedican tesis completas), a sugerencias de como enseñar temas específicos relacionados al concepto de función, en particular en lo referente a funciones lineales, parábolas, potencias, exponenciales, logarítmicas, y trigonométricas. La intención aquí es otra. Se desea llamar la atención a ciertas actividades que contienen algún interés particular, dejando a los docentes la tarea de diseñar las estrategias que lleven a los estudiantes a aprender el concepto de función. Por ningún motivo la lista pretende ser exhaustiva, muchas posibilidades se han dejado de lado, y explorar otras actividades es un proyecto interesante.

1.4.1 Primeros pasos

Para las actividades en los niveles más elementales, es preferible limitarse al uso de palabras como relación o correspondencia, y sólo insinuar como el elemento del segundo conjunto está en función del elemento del primer conjunto, en el más coloquial de los sentidos.

Con respecto a la definición general de función, y si es recomendable o no introducirla en niveles elementales de educación, Azcárate y Deulofeu observan en [3] que hacerlo es:

> ... desconocer el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a ellas, al mismo tiempo que se las despoja de su auténtico significado convirtiéndolas en instrumentos de escasa validez

De acuerdo, es posible no usar la definición, pero el concepto de función está latente en muchas situaciones, y eso no se puede evadir. El ejemplo representado en la Figura 1.7 es altamente adecuado para ciertos niveles elementales de educación.

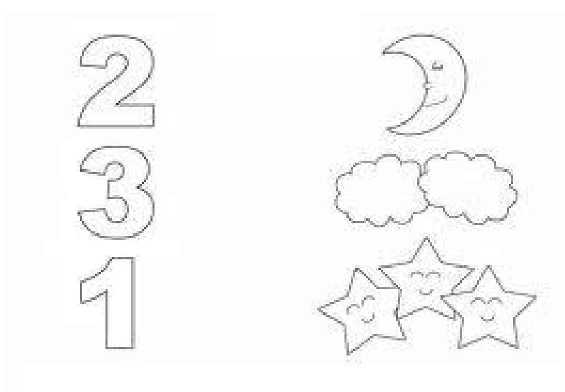

Figura 1.7: Correspondencias elementales

1.4.2 Algunos juegos con coordenadas

La importancia del sistema cartesiano es ineludible, y al respecto de su correcto aprendizaje existen muchas actividades, aptas para diferentes niveles. Estudiar el sistema de calles y avenidas (en ciertas) ciudades es una de ellas.

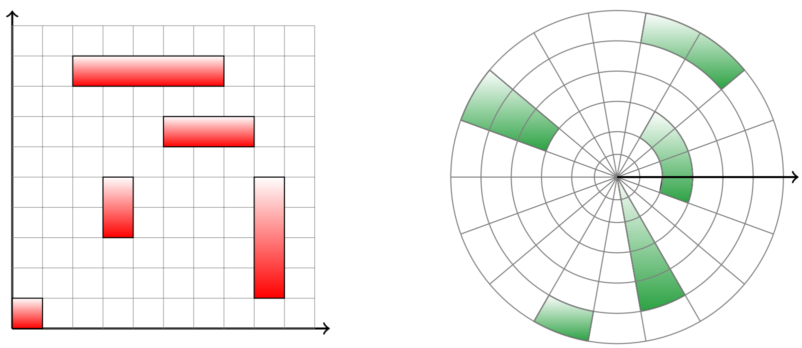

Figura 1.8: Juegos con sistema de coordenadas

El juego "Batalla Naval" es otra buena oportunidad. En cuadrículas que representan el primer cuadrante, los jugadores seleccionan una cantidad finita de posiciones, y el contrincante debe tratar de adivinar cuales fueron las coordenadas seleccionadas, enunciando por turnos sus adivinanzas: (1,1), (7,3), etc. Incluso se puede recordar a los estudiantes la anécdota que Descartes, cuando presentó su sistema de coordenadas, no utilizaba números negativos.

Una interesante variación permite estudiar las coordenadas polares. Círculos concéntricos divididos en sectores circulares, donde ahora la primer referencia indica el ángulo con respecto al eje horizontal, y la segunda referencia la distancia respecto al origen.

1.4.3 Medición y los planos inclinados de Galileo

En el salón de clase se pueden realizar actividades como medir los catetos, y la hipotenusa de triángulos que comparten un ángulo, con la idea de introducir las razones trigonométricas.

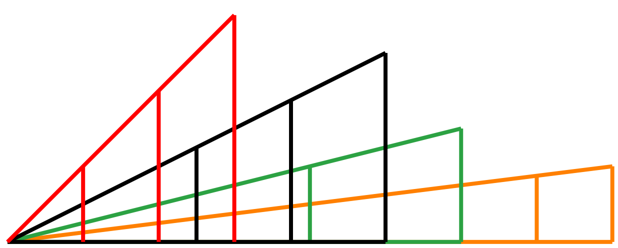

Figura 1.9: Medición y razones trigonométricas

La medición y la observación han sido a través de la historia, las herramientas usadas por excelencia para estudiar la naturaleza. Azcárate y Deulofeu observan en [3] que no es lo mismo preguntarse ¿por qué cae una piedra?, que ¿cómo cae una piedra?

Si bien ambas preguntas son interesantes, es la segunda la que se relaciona con nuestro tema de discusión. Las actividades que se pueden realizar son múltiples y variadas, y sólo están limitadas por la imaginación de los docentes y estudiantes. En [6] se presentan experiencias de actividades relacionadas con el ambiente y la biodiversidad. En [24] se introduce el concepto de función mediante actividades relacionadas con el agro.

Un experimento relacionado con la pregunta de la caída de la piedra, que además brinda una excelente oportunidad para practicar el método sugerido por Galileo para abordar problemas científicos, es el de los planos inclinados de Galileo.[1]

Galileo diseñó ingeniosos métodos para cuantificar la caída de objetos semejantes de distinto peso, con el fin de establecer que el peso de un objeto no influye en su aceleración (siempre que se desprecien los efectos de la resistencia del aire). Galileo desarrolló el concepto de aceleración a partir de estudiar esferas rodando por planos inclinados. Verificó que las velocidades de las esferas, al descender por planos inclinados, se incrementaban uniformemente con el tiempo y concluyó que si la aceleración a lo largo del plano inclinado es constante, la aceleración debida a la gravedad debe ser constante.

El resto de la actividad, su diseño, el método a seguir; son aspectos que dejamos para el docente y sus alumnos.

1.4.4 El ejemplo de las llamadas telefónicas

En [3] Azcárate y Deulofeu sugieren el siguiente ejemplo. El costo de una llamada telefónica depende de su duración y de la distancia física entre los interlocutores. Sugieren una gráfica como la de la Figura 1.10 en la que se representan los datos correspondiente a cinco llamadas.

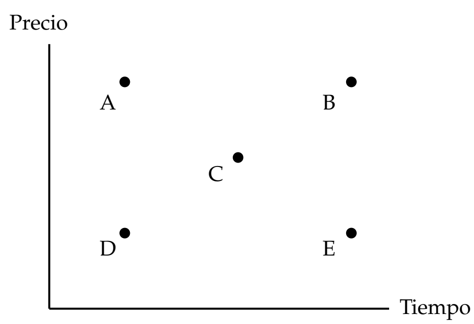

Figura 1.10: Una gráfica que no representa una relación funcional

Como bien anotan los autores, no se trata de una representación de una dependencia de dos variables y no tiene sentido entonces tratar de unir los puntos. Sin embargo, en la prensa y la vida diaria, es posible que los estudiantes se vean expuestos a situaciones como estás y es importante brindarles herramientas para afrontarlas.

Los autores sugieren las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Y más cerca?

b) ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia?

c) ¿Tiene sentido unir de alguna manera los cinco puntos representados?

[1] Véase `http://g2naturalesvaldelagranafqgb.blogspot.es/i2009-12/` (descargado el 1 de abril de 2012).

d) ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar que la llamada de A pero de duración el doble de esta?

Este ejemplo es interesante por varias razones. Primero, porque invita a realizar un tipo interesante de análisis de la gráfica. Segundo, por la tercera de las preguntas, que invita a reflexionar sobre la conveniencia de unir o no los puntos –tema que se repasará adelante–. Tercero, porque nos parece que el ejemplo representa la situación que se menciona al final de la primera sección, a saber, la posibilidad de tener funciones que dependen de varias variables.

Es evidente que la gráfica no representa una función. Los puntos A y D, por ejemplo, muestran pares ordenados en el plano "Tiempo–Precio" que comparten la primera entrada pero no así la segunda entrada. La razón es sencilla, en esta representación se omite la variable "Distancia", presente en el enunciado del problema. Una representación de la relación funcional latente se puede dar en un sistema tridimensional "Tiempo–Distancia–Precio" como el de la Figura 1.11.

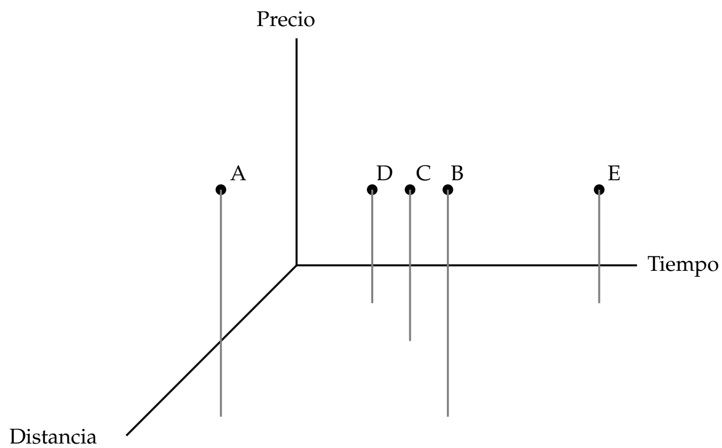

Figura 1.11: Una relación funcional de tres variables

Responder a las preguntas de los autores de [3], pero con respecto a la gráfica de la Figura 1.11 tiene ahora más sentido.

1.4.5 Sucesiones

La sucesiones representan uno de los tipos de función más útiles en el análisis matemático. Están en el corazón de la construcción de los números reales, en la topología, y en el cálculo infinitesimal. Las sucesiones son funciones con dominio los números naturales ($\mathbb{N}$), y en general pueden tener como codominio cualquier conjunto. Las sucesiones establecen con claridad cual es el primer elemento seleccionado, el segundo, etc.; y su principal utilidad radica en el concepto de convergencia. Es decir, cuando la variable independiente se "aleja al infinito", o crece indefinidamente, y la variable dependiente se "aproxima" a un valor determinado. Son particularmente interesantes al combinarlas, mediante composición, con otras funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Como se discutió en la sección anterior, para este tipo particular de funciones (las sucesiones), la representación por medio de tablas de valores o gráficas son por mucho insuficientes, y el criterio o relación algebraica que la determina es fundamental.

La sucesión numérica $(-1,1,-1,\dots)$ corresponde a la definición $f(n) := (-1)^n$ para todo n en $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$. Usualmente se representan las sucesiones mediante $(x_n)_n$, donde $x_n = f(n)$.

Unas de las más interesante sucesiones son las de tipo **recurrente**. El ejemplo clásico es la función factorial dada por $x_0 = 0! = 1$, $x_1 = 1! = 1$ y

$$x_n = n! = nx_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

para $n \geq 2$. En este caso se obtiene,

$$\big(1,1,2,3,6,24,120,\dots,n!,\dots\big).$$

Otros ejemplos de sucesiones (las series numéricas) tienen que ver con la expansión decimal de un número real:

$$\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots,$$

o bien

$$\begin{aligned}\pi &\sim 3,1415926535\cdots \\ &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \frac{3}{10^9} + \frac{5}{10^{10}} \cdots.\end{aligned}$$

1.4.6 Monotonía

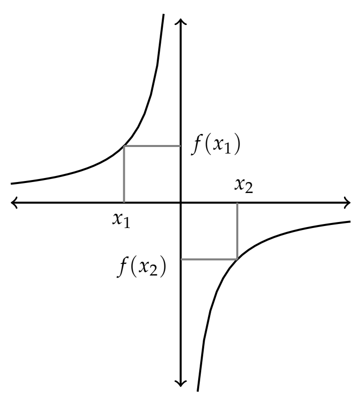

Figura 1.12: Monotonía

El ejemplo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1/x$ pone de manifiesto que una idea tan sencilla como la de función creciente, tiene una estrecha relación con características (topológicas) propias del dominio. Evidentemente la proposición

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

no se satisface para esta función. Sin embargo, esta función es creciente. Es interesante plantear a los estudiantes el problema de concretar el concepto de función creciente.

Otra faceta de esta situación se presenta al estudiar tablas de valores, las cuales sólo brindan información parcial. Los puntos negros en la siguiente gráfica representan esta situación con mayor facilidad. La gráfica corresponde a una función oscilante, pero si se consideran sólo los puntos negros, se percibiría una función constante.

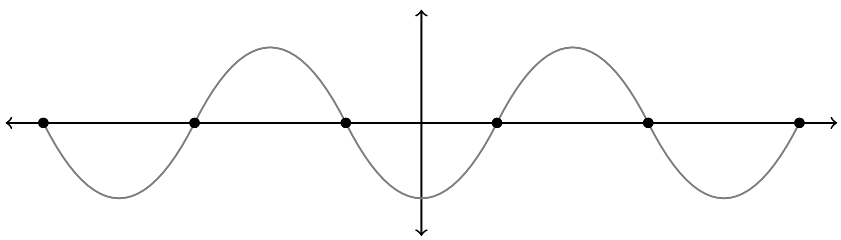

Figura 1.13: Oscilación

1.4.6.1 Tendencia monótona

En muchas aplicaciones, en particular de tipo financiero, es usual encontrar representaciones gráficas como la de la Figura 1.14. Evidentemente, la gráfica no representa una función que sea creciente o decreciente, pero muestra una "tendencia al crecimiento". Este ejemplo brinda otro reto interesante para plantear a los estudiantes.

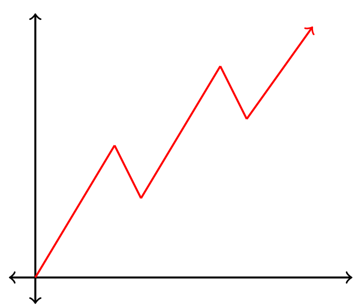

Figura 1.14: Tendencía monótona

Para apoyar la teoría de enseñar basados en contextos reales, se presenta una gráfica con datos reales del precio del dólar en Costa Rica al primero de enero de cada año, según el Banco Central de Costa Rica.

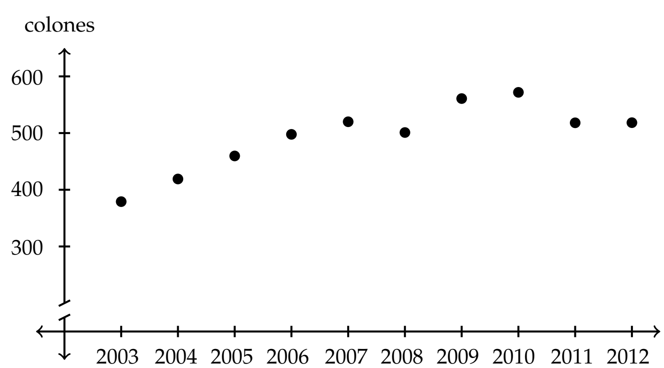

Figura 1.15: Precio del dolar en Costa Rica

1.4.7 Fenómenos periódicos

Las mareas, las fases de la luna, la traslación de la tierra alrededor del sol, las estaciones del año, los días en el calendario, las épocas para siembra, los horarios del autobús, los diferentes tipos de vibraciones; son todos situaciones que presentan comportamientos de tipo periódico, o muy próximos a serlo.

Una excelente oportunidad de aprendizaje es combinar actividades de medición, y estudio de estos fenómenos, con el estudio de las funciones trigonométricas.

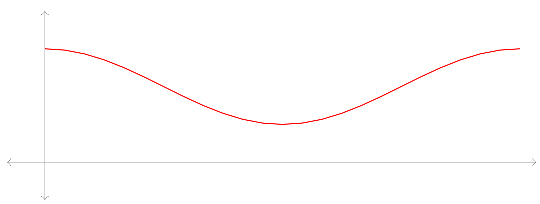

Figura 1.16: $f(t) = t_0 + A\,\text{sen}\big(\omega t + \phi\big)$, $p\omega = 2\pi$

1.4.8 Continuidad

El estudio de la continuidad de una función de variable y valor real es quizá el aspecto del estudio de las funciones que más de la mano va con el desarrollo histórico del análisis matemático. Se relaciona con la construcción de los números reales y con el cálculo infinitesimal (límites, convergencia de sucesiones, derivadas, valores extremos, integrabilidad, etc.). No es este el momento de ahondar en este concepto, pues no es este un curso de análisis, sin embargo, se quiere presentar una par de ejemplos de modelación interesantes. El ejemplo del elevador y el ejemplo de la bombilla.

El elevador de nuestro ejemplo tarda 10 segundos en desplazarse de un piso a otro. Si no se le ha llamado de ningún otro piso, entonces espera en el último piso en que se detuvo hasta que sea llamado. Si al llegar a un piso, tiene una llamada en espera, entonces sólo espera en ese piso por 5 segundos. El analizar las gráficas de la Figura 1.17 es un ejercicio rico en posibilidades para ser desarrollado en diferentes niveles.

¿Qué tipo de circunstancias expresan las gráficas de la Figura 1.17 para el ejemplo del elevador?

¿Son todas las gráficas de la Figura 1.17 válidas y posibles para el ejemplo del elevador?

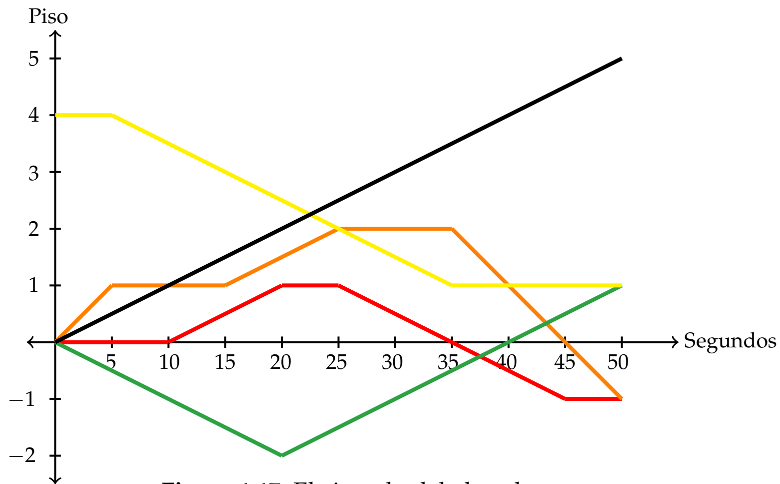

Figura 1.17: El ejemplo del elevador

Otro aspecto interesante respecto a este ejercicio es la razón de cambio. Observe cómo las líneas negra y naranja no tienen la misma inclinación en el intervalo $[0,5]$. ¿Qué significa esta diferencia?

1.4.8.1 Funciones no continuas

Existe una distinción importante entre funciones de variable discreta, y funciones no continuas, cuyos conjunto de llegada es discreto. El ejemplo por excelencia es el ejemplo de la bombilla, el cual es un interesante ejemplo de modelación. La bombilla pasa de encendida a apagada en un instante de tiempo. Si se asigna el valor 1 cuando la bombilla está encendida, y el valor 0 cuando está apagada, se puede representar con una función, el funcionamiento de la bombilla. Imaginando su uso diario, es posible construir la función $f : [0,24] \to \{0,1\}$ dada por el criterio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,6], \\ 0, & \text{si } x \in]6,18[, \\ 1, & \text{si } x \in [18,24], \end{cases}$$

donde se deja el intervalo abierto $]6,18[$ para evitar problemas de definición. Su gráfica se puede ver en la Figura 1.18, donde debe advertirse que $f(6) = 0 = f(18)$.

Figura 1.18: Una función con codominio discreto

1.4.9 La escala y la unión de puntos

En este pequeño apartado, se quiere recordar dos ideas que aunque claras para todos, es importante enfatizarlas. Primero, el uso apropiado de escalas y como su mal uso puede conducir a ideas, conclusiones e interpretaciones erróneas. Segundo, que no siempre el unir puntos refleja la realidad de un evento. Algunas veces no es posible unir los puntos de la gráfica pues las variables no son de valor continuo, como es el caso del precio de la moneda. Otras veces, al unir los puntos puede llevar a conclusiones erróneas pues produce relaciones que quizá no se apegan a la realidad del modelo. Usando de nuevo datos del Banco Central de Costa Rica con respecto al precio del dólar en Costa Rica. Basados en la siguiente tabla, se preparó la gráfica en la Figura 1.19. El formato utilizado en la tabla es precisamente el proporcionado por el Banco Central de Costa Rica.

Día	2008	2009	2010
1 de enero	500,97	560,85	571,81
1 de octubre	559,26	591,56	515,73

Tabla 1.2

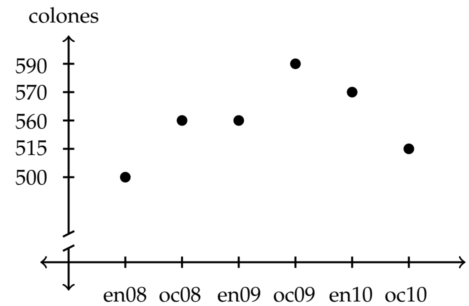

Figura 1.19: Mal uso de la escala

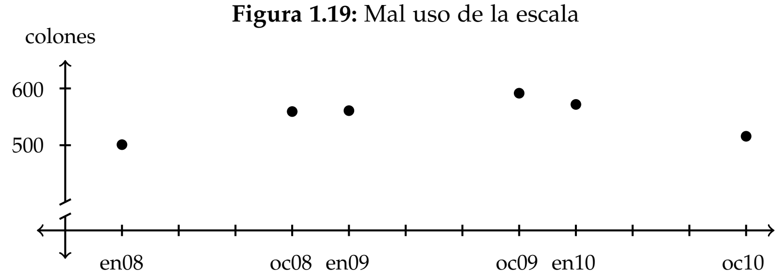

Figura 1.20: Buen uso de la escala

Lo primero que se observa es el orden de la variable independiente tiempo, hay que ser cuidadosos al tomar los datos de la tabla. Intencionalmente, se obvió el hecho que el tiempo entre el 1 de enero y el 1 de octubre, es el doble del tiempo entre el 1 de octubre y el 1 de enero; y en el eje vertical, se ignoró por completo el correcto uso de la escala, y sólo se listaron las cantidades en el orden en que aparecen en la tabla. En el eje horizontal "en08" representa 1 de enero del 2008, "oc08" representa 1 de octubre del 2008, etc.

Qué gráfica se produce al usar apropiadamente la escala en los ejes? La gráfica de la Figura 1.20 indica una variación menos marcada en el tiempo, que la variación que indica la gráfica de la Figura 1.19.

Ahora se usa una tabla con más datos para preparar la gráfica en la Figura 1.21. En el eje horizontal "en08" representa 1 de enero del 2008, "ab08" representa 1 de abril del 2008, "ju08" representa 1 de julio del 2008, "oc08" representa 1 de octubre del 2008, etc.

Día	2008	2009	2010
1 de enero	500,97	560,85	571,81
1 de abril	497,62	570,51	528,09
1 de julio	522.76	579.91	540.24
1 de octubre	559,26	591,56	515,73

Tabla 1.3

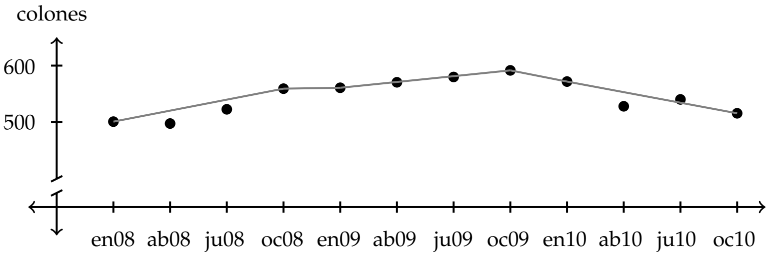

Figura 1.21: Unir los puntos no siempre es una buena idea

Las líneas en gris se obtuvieron al unir los puntos de la gráfica en la Figura 1.20. Se observa como algunas fluctuaciones escapan del comportamiento que estas líneas indican. Otros valores sin embargo se predicen con bastante exactitud. En este ejemplo concreto, una separación muy amplia entre la variable "tiempo", puede esconder comportamientos importantes en la variable "precio". Además, al no ser el precio una variable de valor continuo, las líneas grises pueden llevar a conclusiones erróneas, como que en algún momento determinado, el dólar tuvo algún precio específico.

En [12] Duarte sugiere un ejercicio muy interesante. Apoyado en un serie de datos reales sobre ciertos egresos de la Caja Costarricense del Seguro Social entre los años 1970 y 1979, plantea primero la elaboración de tablas. Segundo, la graficación de las mismas. Tercero un análisis modesto de las gráficas, no sólo basado en el interés propiamente matemático, si no tomando en cuenta implicaciones o conclusiones de la realidad que representan. El ejemplo permite además explorar operaciones que se pueden realizar con las funciones.

1.4.10 Proyecciones cartográficas

Las proyecciones cartográficas buscan representar en un mapa (porción de un plano), diferentes puntos del globo terráqueo (una esfera). Este tipo de proyecciones representan funciones del tipo $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^2$, esto es, de una esfera en un plano. Las más usuales son la proyecciones cilíndricas, esféricas y las polares o azimutales.

Este tipo de proyecciones brindan excelentes oportunidades para estudiar transformaciones geométricas. Por ejemplo, en la esfera todos los meridianos se intersecan en los polos, sin embargo, en el plano los meridianos son todos paralelos.

¿Qué consecuencias tiene esta transformación para puntos que están cercanos entre sí, en la región alrededor de los polos?

Si se unen dos puntos A y B sobre la esfera con un segmento circular s, y si se tiende un segmento l de línea recta entre los puntos $f(A)$ y $f(B)$ del plano, ¿se tiene $f(s) = l$?

Consultar un globo terráqueo y un mapa mundial son una excelente idea.

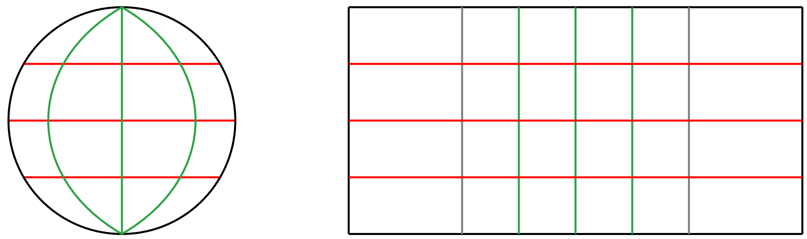

Figura 1.22: Imagen de segmentos circulares bajo una proyección cilíndrica

1.4.11 La derivada

En el proceso histórico, el cambio en los fenómenos observados fue el camino tomado para entender esos fenómenos. En la naturaleza, es el cambio la herramienta para entender lo que acontece. En la teoría de fluxiones de Newton, las magnitudes cambian continuamente. En economía es central el estudio de los marginales o cambios instantáneos. El cálculo se fundamenta en el estudio de los cambios infinitesimales.

En el estudio de una función, la derivada viene a condensar todos esos cambios instantáneos, determina donde la función crece o decrece, donde alcanza sus extremos locales o inflexiones. Por tal razón, no es del todo descabellada la idea de estudiar primero la noción de derivada, antes de ahondar en el estudio de las funciones, y por esto se le dedica esta apartado.

La simple idea de que una sucesión de rectas tangentes a través de un punto fijo a y otro punto que se le aproxima paulatinamente, $a+h$, envuelve una cantidad muy rica de situaciones geométricas, algebraicas y funcionales. Esta riqueza brinda una excelente oportunidad para estudiar el concepto de función.

1.4.11.1 La pendiente de la recta tangente

Dada una función con criterio $y = f(x)$, la recta secante a esta función en los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ tiene pendiente

$$m_{a,a+h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

y ecuación

$$y = m_{a,a+h}(x-a) + f(a).$$

La idea de encontrar el límite

$$m_a = f'(a) = \lim_{h \to 0} m_{a,a+h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a) + f(a+h)}{h},$$

y usarlo como la pendiente en la ecuación de la recta tangente a la función con criterio $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$y = m_a(x-a) + f(a),$$

no sólo está al alcance de los jóvenes estudiantes, si no que condensa años de historia, y brinda una herramienta muy útil para describir el cambio instantáneo de una función en un punto.

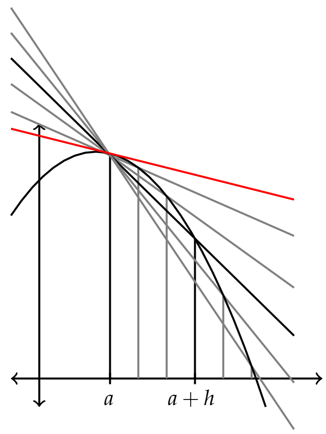

Figura 1.23: Recta tangente como límite de rectas secantes

Las funciones cuadráticas están al alcance. Para $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{A(a+h)^2 + B(a+h) + C - Aa^2 - Ba - C}{h}\\ &= \frac{2Aah + h^2 + Bh}{h}\\ &= 2Aa + h + B,\end{aligned}$$

que tiende a $m_a = 2Aa + B$ cuando h tiende a cero.

Claro está, se deja al educador el diseñar las estrategias adecuadas para que cada estudiante descubra este resultado.

Dado que la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ está dada por $m_a = 2Aa + B$, es fácil concluir que la función con criterio $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente siempre que $m_a = 2Aa + B \geq 0$ y decreciente si $m_a = 2Aa + B \leq 0$.

Un excelente recurso geométrico para estudiar la derivada, y en particular los diferenciales o razones de cambio se encuentra en el cuadrado. El perímetro es una función lineal de la longitud del lado, $p(l) = 4l$, y el área es una función cuadrática, $a(l) = l^2$. A las preguntas ¿cuánto cambia el perímetro si cambia la longitud del lado? y ¿cuánto cambia el área si cambia la longitud del lado?, se puede contestar:

$$\Delta p(l) = p(l + \Delta l) - p(l) = 4l + 4\Delta l - 4l = 4\Delta l,$$

y

$$\Delta a(l) = a(l + \Delta l) - a(l) = (l + \Delta l)^2 - l^2 = 2l\Delta l + (\Delta l)^2,$$

y tratar de observar estas relaciones en la Figura 1.24. Las respectivas razones de cambio son

$$\frac{\Delta p(l)}{\Delta l} = 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta a(l)}{\Delta l} = 2l + \Delta l.$$

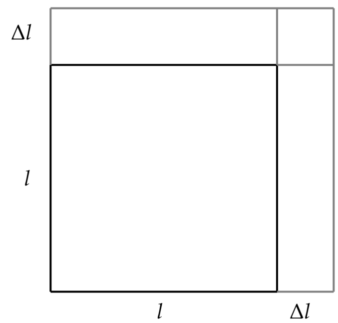

Figura 1.24: Cambio del perímero y del área de un cuadrado

Las propiedades lineales de este proceso al límite, a saber que la derivada de la suma es la suma de las derivadas y que el multiplicar la función original por una constante, resulta en multiplicar la derivada por esa constante:

$$\left(f+g\right)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad \text{y} \qquad (cf)'(a) = cf'(a),$$

brindan excelentes oportunidades para introducir a los jóvenes estudiantes al uso de la lógica, y al rigor del análisis que debe acompañar la intuición.

1.4.11.2 La antiderivada

Uno de los ejercicios más interesantes es tratar de descubrir la forma aproximada de la gráfica de una función, a partir de la gráfica que representa su derivada o cambios instantáneos.

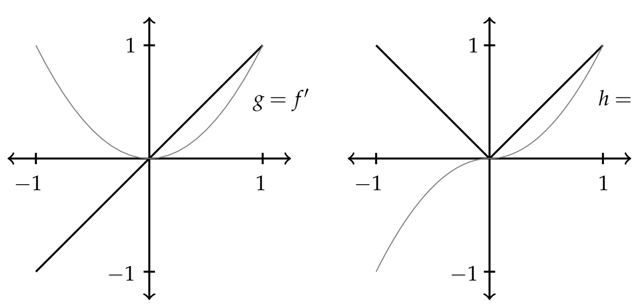

Figura 1.25: Representación de cambios instantáneos de una función

En la Figura 1.25, a la izquierda se representa la función $g : [-1,1] \to [-1,1]$ con criterio $g(x) = x$, y a la derecha se representa la función $h : [-1,1] \to [0,1]$ con criterio $h(x) = |x|$.

Se desea obtener información sobre las posibles funciones f y k de $[-1,1]$ en $[0,1]$ tales que la función dada g representa los cambios instantáneos de f, $g = f'$; y la función dada h representa los cambios instantáneos de k, $h = k'$.

De la gráfica de g se sabe que:

a) f es creciente a la derecha de $x = 0$, pues sus cambios instantáneos son todos positivos;

b) f es decreciente a la izquierda de $x = 0$, pues sus cambios instantáneos son todos negativos;

c) y que f posee una recta constante horizontal en el punto $(0, f(0))$, que por ende indica la localización de un punto máximo para f.

De la gráfica de h se sabe que

a) k es creciente en todo el intervalo $[-1,1]$, pues sus cambios instantáneos son todos positivos;

b) y que k posee una recta constante horizontal en el punto $(0, f(0))$, sin embargo, esta vez no puede indicar la localización de un punto extremo para k, pues no se registra cambio de monotonía.

Surgen preguntas interesantes. Por ejemplo:

1. ¿Existen funciones f y k con estas características?

2. ¿Qué significa que la pendiente de g sea siempre igual a 1?

3. ¿Qué significa que la pendiente de h sea primero igual a -1 en todo un intervalo y luego igual a 1?

4. ¿Si existen, son las funciones f y k únicas?

No es este el lugar para desarrollar estos aspectos, se desea por ahora sólo motivarlas. Respuestas como las dadas en la Figura 1.26, son suficientes para los propósitos de este artículo.

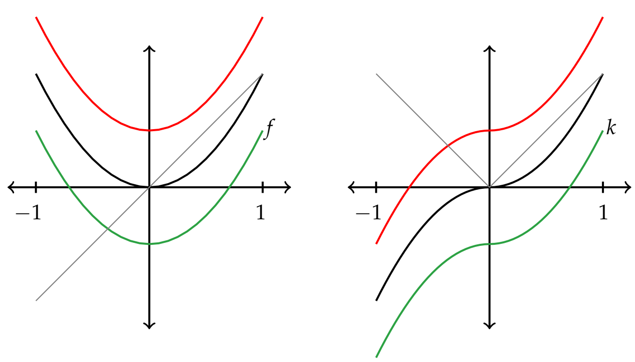

Figura 1.26: Posibles funciones con cambios instantáneos dados

1.4.11.3 Un ejemplo numérico

Se desea llamar la atención al uso de recursos tecnológicos como las calculadoras y las computadoras. Si se plantea la pregunta, ¿cuál es la derivada para la función con criterio $f(x) = x^{10}$ en el punto $a = 1$? Una posible respuesta, fácil de desarrollar en clase utilizando los mencionados recursos, es la siguiente tabla que indica que el valor que se desea es $f'(1) = 10$.

h	$1+h$	$(1+h)^{10}$	$m_{1,1+h}$
0,1	1,1	2,59374246	15,9374246
0,01	1,01	1,10462212	10,4622125
0,001	1,001	1,01004512	10,0451202
0,0001	1,0001	1,00100045	10,0045012
0,00001	1,00001	1,00010000	10,0004500
0,000001	1,000001	1,0000100	10,0000450

Figura 1.27

1.4.11.4 El área bajo la curva

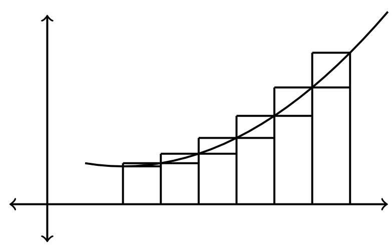

Figura 1.28: Sumas de Riemann para aproximar áreas

El otro gran protagonista del cálculo es la integral. Entre otras cosas, con la integral se busca medir el área bajo una curva. Evidentemente son muchas las actividades que se pueden realizar en el salón para medir áreas, utliizando aproximaciones con cuadrados y triángulos de diferentes tamaños. Con las fórmulas básicas para el área de un cuadrado, un trapecio y un triángulo rectángulo, se pueden introducir los elementos de la integral de Riemann, con la ayuda de calculadoras y hojas electrónicas. También es interesante preguntarse ¿qué representa el área bajo la curva? Si el área se calcula a partir de cuadrados y otras figuras geométricas, la unidad para medir el área bajo la curva es entonces el producto de las unidades usadas en los ejes cartesianos.

En un gráfico "tiempo" contra "velocidad" en el cual el tiempo se mide en segundos y la velocidad en metros por segundo, el área representa la distancia recorrida (el desplazamiento), cuya unidad de medida es el metro.

1.4.11.5 El teorema fundamental del cálculo

La derivada y el área bajo una curva se pueden estudiar juntos, al menos de manera intuitiva. Sea f una función positiva en el intervalo $[a,b]$, sea x un elemento arbitrario en $[a,b]$ y defíinase la función $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ la cual asigna a x el área bajo la curva de f en el intervalo $[a,x]$:

$$A(x) = \int_a^x f(u)\, du.$$

Se quiere calcular el límite de la pendiente de A entre los punto $(x, A(x))$ y $(x+h, A(x+h))$, a saber

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du\right).$$

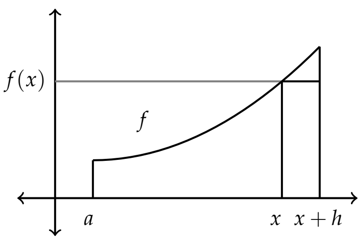

Figura 1.29: El teorema fundamental del cálculo

La diferencia a la derecha es simplemente el área bajo la curva de f en el intervalo $[x, x+h]$. Para h suficientemente pequeño, esta área se aproxima mediante el área del rectángulo de base h y altura $f(x)$. De este modo,

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(x)}{h} = f(x).$$

1.4.12 La función inversa

El problema de la función inversa es muy interesante, en particular en las aplicaciones y su relación con la solución de ecuaciones. Las funciones invertibles son las funciones que son biyectivas (inyectivas y sobreyectivas). Estas funciones identifican conjuntos finitos del mismo modo que identifican conjuntos discretos: dos conjuntos discretos son equipotentes si tienen la misma cardinalidad, y esto se logra mediante una función biyectiva entre los dos conjuntos.

Cuando los conjuntos poseen estructura, como espacio vectorial o topológico, a la biyección que los relaciona, y a su inversa, se les exige preservar las estructuras en cuestión, pero este asunto es materia para otro trabajo.

El primer paso es trabajar con diagramas.

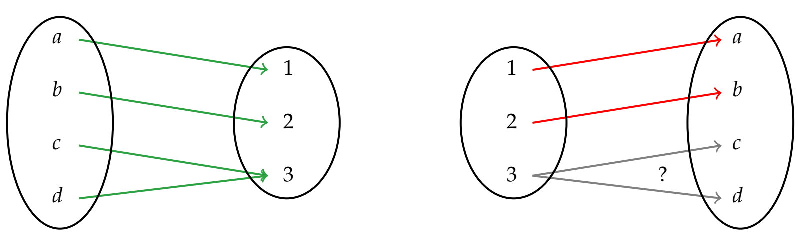

Figura 1.30: Diagrama para inyectividad

¿Qué características debe poseer un diagrama para que al invertirlo se siga teniendo una función? Contestar esta simple pregunta nos lleva a explorar el concepto de inyectividad.

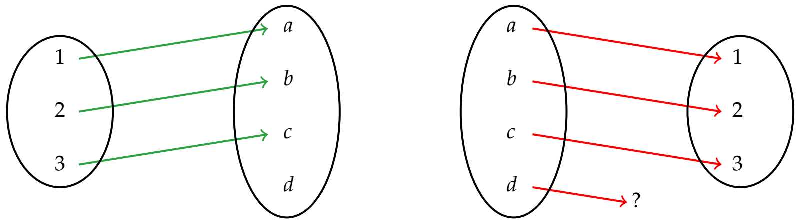

Figura 1.31: Diagrama para sobreyectividad

Si la función no es sobreyectiva entonces al invertir los diagramas hay elementos sin imagen.
Debe tenerse presente que en el caso de tablas de valores, la inyectividad equivale a la biyectividad.

x	1	2	3
y	a	b	a

$\leftrightarrow$

x	a	b
y	¿1 ó 3 ?	2

x	1	2	3
y	a	b	c

$\leftrightarrow$

x	a	b	c
y	1	2	3

Figura 1.32: Tablas e inyectividad.

Quizá el resultado más conocido sobre las graficas de una función y su inversa es la simetría que presentan respecto a la diagonal. Este hecho es una extensión de ejercicio de inversión de diagramas y tablas de valores. El reflejar gráficas respecto a la diagonal es otra forma de explorar las condiciones que una función debe satisfacer para que su inversa exista.

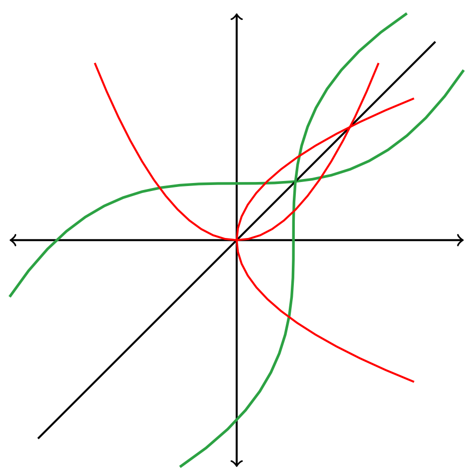

Figura 1.33: Simetría de la gráfica de una función y la de su inversa

1.4.12.1 Funciones localmente invertibles

La relación entre el problema de encontrar la función inversa, y la solución de ecuaciones (y unicidad de esta solución) es estrecha. En matemática, este problema tiene sus resultados cumbre en los teoremas de la función inversa y de la función implícita.

En el caso de una variable, para funciones $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se sabe que f posee una función inversa $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si y solo si f es inyectiva. Una posibilidad para determinar si f es inyectiva en el caso real es através de su monotonía. En el caso de funciones derivables, la monotonía en un intervalo abierto queda determinada a partir de la derivada de la función.

Teorema 1.1 (Teorema de la función inversa)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0 y $f'(x_0) \neq 0$ entonces, existe un vecindario abierto I alrededor de x_0 tal que f es (localmente) invertible de I a $f(I)$.

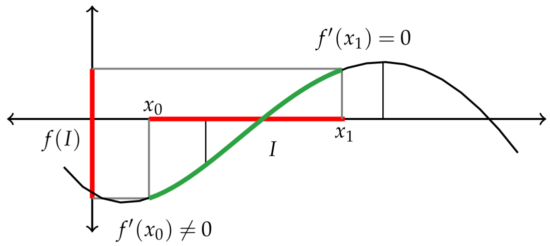

Figura 1.34: Funciones localmente invertibles

El corolario más popular de este resultado es el conocido hecho que, en la gráfica de una función que no es inyectiva, una recta horizontal corta dicha gráfica en más de una oportunidad.

1.4.12.2 La función implícita

Con respecto a la solución de ecuaciones, se considera el siguiente problema. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y considere la **curva de nivel**

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}.$$

¿Existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la cual la anterior curva de nivel coincida con la gráfica de f? Es decir,

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad y = f(x).$$

En caso de existir, se dice que F define a f en forma **implícita**.

Para la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, la curva de nivel cero es precisamente el círculo de radio 1, $x^2 + y^2 = 1$. Si se quiere resolver para y en términos de x se tiene

$$y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Para cualquier valor de x_0 con $0 \leq |x_0| < 1$, hay dos opciones a elegir, $\pm\sqrt{1 - x^2}$, para definir una función $y = f(x)$ alrededor de x_0.

Evidentemente alrededor de $x_0 = \pm 1$, lo anterior no define una función de la variable x. Por último, para $|x_0| > 1$ no tiene sentido tratar de definir y en términos de x alrededor de x_0, pues no se satisface la relación original.

Más aún, se puede considerar

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1], \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [-1,1], \end{cases}$$

lo cual define una función no continua f de la variable x, que satisface $F(x, f(x)) = 0$.

Por lo anterior cabe preguntarse ¿bajo qué condiciones, existe la función f, y qué propiedades de la función F se reflejan en la función f?

La respuesta a esta pregunta la brinda el teorema de la función implícita. La siguiente es su versión más sencilla.

Teorema 1.2 (Teorema de la función implícita)

Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de primer orden continuas. Sea $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0,y_0)=0$ y la curva de nivel no posee una recta tangente vertical en el punto (x_0,y_0). Entonces, existe un intervalo abierto $I\subset\mathbb{R}$ con $x_0\in I$ y una única función $f:I\to\mathbb{R}$, con derivada continua en I, tal que $y_0=f(x_0)$ y $F(x,f(x))=0$ para todo x en I.

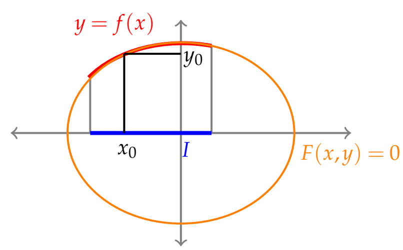

Figura 1.35: Teorema de la función implícita

1.4.12.3 Inversas y áreas

En relación al cálculo de áreas, existe una fórmula muy interesante que relaciona el área bajo la curva de una función creciente y positiva, con el área de su función inversa. Para $0\le a\le b$ y f positiva y creciente en $[a,b]$ se tiene la relación:

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy+af(a)=bf(b),$$

o bien

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.1}$$

El área entre la gráfica de f y el eje horizontal, más el área entre la gráfica de f y el eje vertical, más el área del rectángulo de base a y altura $f(a)$, es igual al área del rectángulo de base b y altura $f(b)$.

Geométricamente, esta relación se aprecia en la Figura 1.36. Esta relación es útil en cursos de cálculo para obtener áreas bajo curvas como las descritas por $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arctan x$, etc.

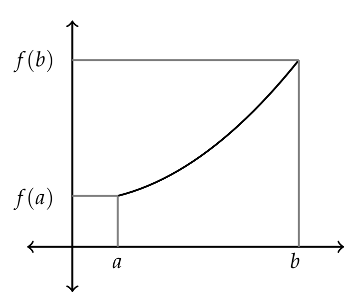

Figura 1.36: Funciones inveras y áreas

Un reto interesante para el estudiante, pues le obliga a intercambiar los papeles de $f(a)$ y de $f(b)$, es preguntarle ¿qué sucede si la función f es decreciente?

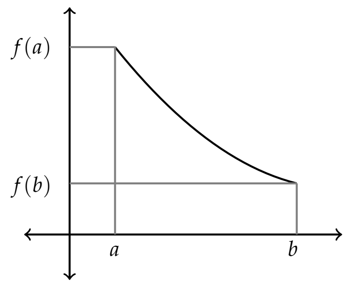

Figura 1.37: Área y función inversa para una función decreciente

La respuesta es:

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(b) = \int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy - a\big(f(a)-f(b)\big),$$

o bien

$$\int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx - bf(b) + af(a). \tag{1.2}$$

Al usar la convención

$$\int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = -\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy,$$

se concluye que las fórmulas (1.1) y (1.2) son la misma fórmula.

Una pregunta interesante de plantear es si la continuidad juega un papel en las relaciones anteriores.

1.4.13 Composición de funciones

Las funciones reciben cualquier álgebra (estructura) presente en el codominio, al definir las operaciones punto a punto. El ejemplo tradicional es para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dado que en los números reales se pueden sumar y multiplicar, estas mismas operaciones se traspasan al conjunto de funciones $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ al definirlas punto a punto. Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son dos funciones de valores reales entonces se definen las nuevas funciones $f+g, fg:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \qquad \text{y} \qquad (fg)(x) := f(x)g(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Estas son operaciones comunes que se realizan sobre las funciones.

Una operación más interesante es la composición de funciones. La cual toma valores que se obtienen de una primera función, para producir nuevos valores con una segunda función, etc.

Estudiar composición de funciones brinda una excelente oportunidad para repasar los conceptos de dominio y rango. El hecho que la segunda función debe tener por dominio el rango de la primera, permite relacionar el concepto con muchas actividades cotidianas como vuelos aéreos con escala, distribución de productos, servicio postal, etc.

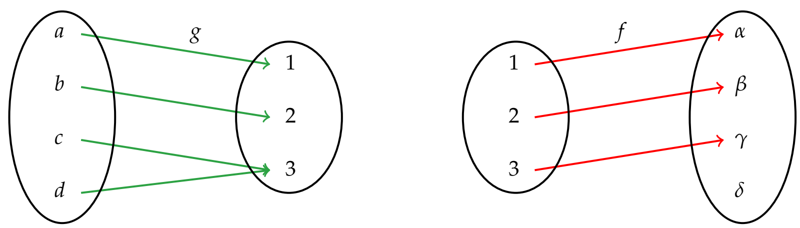

Figura 1.38: Composición de funciones

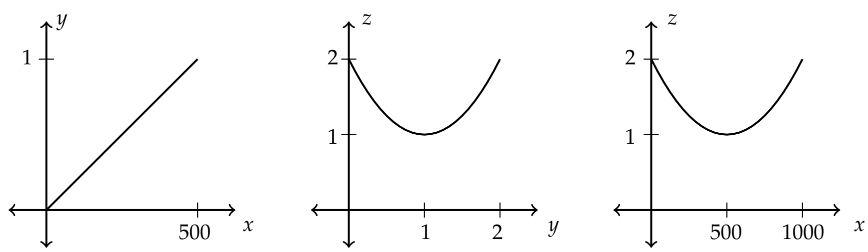

Figura 1.39: Componiendo funciones

Un ejercicio de tipo práctico es el siguiente: Un comerciante desea saber cuáles serán las utilidades que obtendría al invertir en una empresa de distribución de combustible. Se sabe que por x dinero invertido se puede comprar $y = f(x)$ litros de combustible. Además, el beneficio obtenido por la venta de cada litro está dado por $z = g(y)$. ¿Cuál será el beneficio final?

La respuesta es $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.

Por ejemplo, si $y = \dfrac{x}{500}$ y $z = y^2 - 2y + 2$ entonces $z = \dfrac{x^2 - 1000x + 500000}{250000}$, como se aprecia en la Figura 1.39.

Se puede preguntar a los estudiantes, ¿por qué no se multiplicó la cantidad de litros de combustible por el beneficio obtenido por cada litro?, para inducirlos a comparar las funciones

$$f \circ g \neq fg = gf \neq g \circ f.$$

1.4.13.1 Integración mediante cambio de variable y la regla de la cadena

A nivel de cálculo, el concepto de composición aparece en dos oportunidades: en integración mediante sustitución de variables y en la regla de la cadena. La regla de la cadena establece que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

siempre que la composición tenga sentido entre las funciones derivables f y g. Con la notación de Leibniz la regla de la cadena se escribe:

$$\frac{d}{dx}(f\circ g)(x) = \frac{d}{dy}f(y)\frac{d}{dx}g(x),$$

donde se escribe $y = g(x)$.

Esta última fórmula expresa la relación entre los cambios infinitesimales de la función composición, como el producto de los cambios infinitesimales de las funciones componentes.

Como un corolario al teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int (f\circ g)'(x)\,dx = (f\circ g)(x) + C.$$

1.4.13.2 Multiplicación de matrices En álgebra lineal, la composición de funciones, que en este caso se reduce a la composición de transformaciones lineales, queda representada en una forma muy concreta por la multiplicación de matrices. Este es quizá el único caso en que ambas, composición y multiplicación, coinciden, y es un corolario, primero de la regla de la cadena, y segundo del hecho que la diferencial de una transformación lineal coincide con la transformación lineal, como una generalización del hecho que la recta tangente a una recta tangente es la misma recta tangente (en el sentido de paralelismo).

Un ejemplo se encuentra en el siguiente modelo simplificado de una población con dos tipos de individuos, que se reproducen x y y, de modo tal que en cada unidad de tiempo la cantidad de individuos de x varía según la relación $0.6x + 0.4y$, y la cantidad de individuos de y varía según la relación $0.4x + 0.6y$. Esto es una función (lineal) de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = (0.6x + 0.4y, 0.4x + 0.6y).$$

A partir de la población inicial x_0 y y_0, esta población se modela mediante la relación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

La población a la n-ésima unidad de tiempo está determinada por

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= F\circ F\circ\cdots\circ F(x_0,y_0) = F^{\circ n}(x_0,y_0)\\ &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

la composición F consigo misma n veces, o bien, la n-ésima potencia de la matriz que la representa.

1.5 Conclusiones

Las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos y a mi me gustaría que las matemáticas más abstractas fueran enseñadas dentro de los contextos más concretos.

O. Planchart (2005)
"La modelación matemática"

Son muchas y variadas las conclusiones que se pueden extraer de este pequeño trabajo, y es la esperanza del autor que dichas conclusiones se hayan expuesto de manera clara en el texto para que el lector pueda extraerlas del material presentado. Sin embargo, al llegar a este punto cuatro conclusiones sobresalen del material anterior y se desea resaltarlas una vez más.

Primero, que el verdadero reto al enseñar el concepto de función radica en cómo diseñar actividades para que los estudiantes descubran el concepto de función por sí mismos, y no por una simple exposición por parte del docente.

Segundo, que la historia es el mejor referente de obstáculos y catalizadores del concepto de función, y que al enseñar, el proceso de enseñanza aprendizaje debe ser un reflejo de ese proceso histórico.

De [14] se rescata la siguiente recomendación:

> Los conceptos que se brindan en la educación formal necesariamente deben representar un instrumento que enriquezca el proceso de enseñanza-aprendizaje, su elección y su correcta manera de ser abordados, dependen en mucho del sentido histórico que los revista. Pues la historia nos muestra elementos claves relacionados con la manera en que la humanidad ha identificado y tratado dichos conceptos, además de brindar una ilustración relativa a la influencia de ellos en la actividad humana. La historia del concepto de función, como ya se ha visto, se caracteriza por poseer una enorme riqueza en muchos órdenes, de ahí, su relevancia como parte fundamental del currículo.

Tercero, que parte de ese proceso histórico fue el deseo de la humanidad de entender la naturaleza que nos rodea. Barahona en [4] escribe:

> Quizás uno de los peores efectos de la axiomatización del concepto de función en la enseñanza media es que dicho concepto fue despojado de lo que le es consustancial: los fenómenos de la Naturaleza.

Por tanto, al enseñar debe tratarse de poner ese aprendizaje en relación a la realidad que nos rodea.

Y cuarto, como lo observan en [3] los autores:

> A nivel curricular debe tratarse de no reducir el estudio de funciones al estudio de los modelos elementales olvidando otros aspectos como la adquisición del propio concepto de función y sus características generales

1.5.1 Inquietudes

Es mucho lo que se puede hacer con respecto al tema de funciones y su enseñanza, y lo bueno es que son muchos los interesados y muy deseosos de hacerlo. La siguiente es una lista de posibles ideas a considerar. Se espera con este apartado motivar a estudiantes y docentes a mejorar la forma en que se aborda el estudio de las funciones, y a motivar espacios de investigación relacionados con este tema.

1. ¿Qué ventajas representa el concepto de función?

2. ¿Qué ventajas representa el concepto de correspodencia entre conjuntos en general?

3. ¿Qué tan importante es el estudio de las correspondencias, previo al estudio de las funciones?

4. ¿Por qué para todo x en A?

5. ¿Por qué un único y en B?

6. ¿Qué tipo de funciones y cuáles existen en geometría y otros contextos diferentes a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? En general, ¿dónde se puede encontrar el concepto de función?

7. Hay dos tipos de estadísticas, una que busca describir un conjunto dado, otra que busca inferir a partir de un conjunto de datos. ¿Cómo replantear esta idea en términos de funciones?

8. Observo, registro, analizo, modelo, verifico la calidad del modelo. ¿Para qué? ¿Qué hay más allá de pronosticar?

9. Medir como función: se compara un objeto con otro dado, por ejemplo, la longitud con el metro.

10. ¿Qué tanto uso se debe hacer de recursos tecnológicos como calculadoras y hojas electrónicas?

11. ¿Cuál es el balance correcto entre la intuición y el rigor al estudiar funciones en los diferentes niveles de formación?

12. ¿Qué papel juegan las funciones al estudiar fenómenos que no se pueden cuantificar?

13. ¿Qué tanto se debe estudiar el concepto de función y en qué momento del currículo?

14. ¿Qué tanto lenguaje matemático y qué tanto lenguaje cotidiano debe utilizarse?

15. ¿Qué noción de función se busca inculcar en los programas de estudio del sistema público?

16. ¿Qué noción de función poseen los estudiantes que cursan el sistema público?

17. ¿Se deben estudiar los polinomios como una función o como un ente abstracto del álgebra?

18. ¿Qué sentido tiene manipular expresiones algebraicas sin relacionarlas con el concepto de función? ¿Qué son? ¿Para qué sirven?

19. ¿Qué tanto se debe estudiar de las funciones tradicionales: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, con estudiantes que no aspiran a estudiar carreras universitarias?

Agradecimientos. El autor agradece a las profesoras Floria Arias, Andrea Araya y Marielos Mora de la Universidad de Costa Rica por útiles e interesantes discusiones e ideas, y fuentes de información bibliográfica.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. "*Mathematica Analysis*". Addison Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1981.

[2] Artemiadis, N. K. "*History of mathematics from a mathematician's vantage point*". American Methematical Society, Rhode Island, 2004.

[3] Azcárate, C., y Deulofeu, J. "*Funciones y Gráficas*". Editorial SINTESIS, España, 1990.

[4] Barahona, M. "*Matemática Elemental*". (Serie de libros de sétimo a undécimo). Editorial Guayacán, San José, C.R., 1989.

[5] Barahona, M. "*Historia y evolución del concepto de función*". Ediciones Librería Francesa, San José, 1992.

[6] Barrantes, U. "Funciones matemáticas en la medición de variables ambientales y su relación con la riqueza biológica". En Memorias: III Festival Nacional y I Festival Internacional de Matemática, ITCR, Cartago, C. R. pp. 26–29, 2002.

[7] Bartle, R. G. "*The Elements of Real Analysis*". John Wiley and Sons, Estados Unidos de América, 1976.

[8] Bartle, R. y Sherbert, D. R. "*Introducción al Análisis Matemático de una Variable*". Editorial Limusa. México, 1996.

[9] Bell, E.T. "*Historia de las matemáticas*". Fondo de Cultura Económica, Estados Unidos de América, 1997

[10] Castro, M., Mena, D., Pineda, E., Rojas, L., Valverde, P., Vindas, A. "Unidad didáctica a través de situaciones del entorno para la enseñanza de los conceptos generales de funciones, la función lineal y la función cuadrática". Tesis para optar al Grado de Licenciados en Enseñanza de las Matemáticas. Sede Rodrigo Facio. UCR, 2011.

[11] Dieudonné, J. "*Foundatiosn of modern analysis*". Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York - London, 1969.

[12] Duarte, A. "Hacia la funcionalidad de las funciones". Ciencias matemáticas, serie técnica. Vol. II. Número 2. Diciembre. pp. 9–16, Ed. UCR, 1991.

[13] Eves, H. "*An introduction to the history of mathematics*". Holt, Rinehart and Winston. Nueva York, 1964.

[14] Gutierrez, D., Jimenez, M., Jimenez, F., Rodriguez, L., Salazar, M. "Evolución del Concepto de Función y sus implicaciones en la enseñanza media de Costa Rica". Tesis para optar al Grado de Licenciados en Enseñanza de las Matemáticas. Sede de Occidente. UCR. II semestre, 2003.

[15] Hitt, F. "*Funciones en contexto*". Pearson Educación. México, 2002.

[16] Katz, V. "*A History of Mathematics an introduction*". Tercera edición. Addison-Wesley. Boston, 2009.

[17] Klein, M. "*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*", Vol. 1. Oxford University Press, Nueva York Oxford, 1972.

[18] Kleiner, I. "Evolution of the function concept: a brief survey". The College Mathematics Journal, September 1989, Volume 20, Number 4, pp. 282–300.

[19] Planchart, O. "La modelización matemática: alternativa didáctica en la enseñanza del pre cálculo". Recuperado de: `http://www.matedu.cinvestav.mx/`

[20] Ross, K. A. "*Elementary Analysis: the theory of calculus*". Springer-Verlag. Nueva York, 1980.

[21] Ruiz Higueras, L. "*La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*". Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico, 1998.

[22] Spivak, M. "*Cálculo Infinitesimal*". Editorial Reverté, España, 2005.

[23] J. Tarrés F. "La matemática árabe durante la edad media". Seminario Orotava de la Historia de la Ciencia. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: http://gobcan.es/educacion/usrn/fundoro/web_fcochc/005_publicaciones/se-minario/infinito.htm

[24] Villalobos, L. "*Un enfoque humano de la Matemática*". Editorial: Escuela de Agricultura de la Región Húmeda (EARTH), 1995.

[25] Wade, W. R. "*An Introduction to Analysis*". Tercera edición. Prentice Hall. Nueva Jersey, 2004.