Chapter 1

Matrices. Determinantes. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

1.1 Matrices.

Definición. Sean m y n números naturales. Llamaremos *matriz* de orden $m \times n$ a un arreglo rectangular de elementos de un cuerpo $\mathbf{K}$, dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En nuestro curso, $\mathbf{K}$ será el cuerpo de los números reales, es decir $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Observaciones.

1. Designaremos las matrices con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots$.
2. También denotaremos las matrices de la siguiente manera: $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o simplemente, $A = (a_{ij})$.
3. El elemento a_{ij} de la matriz $A = (a_{ij})$ es el elemento ubicado en la fila i, columna j de A, llamado *entrada i,j* o también *componente i,j* de la matriz A.
4. $\mathrm{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ denotará el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$.
5. Generalmente a una matriz con una sola fila se le llama *matriz fila* (o vector fila) y a una matriz con una sola columna se le llama *matriz columna* (o vector columna).

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -20 \end{pmatrix}$$

son matrices con entradas reales.

Igualdad de Matrices Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$.

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij},\ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Nota. Una matriz de orden $m \times n$ cuyos elementos son todos *cero* se llama *matriz nula* o *matriz cero* y se denotará $0_{m\times n}$ o con el símbolo 0.

1.1.1 Operaciones entre matrices

I. *Adición de matrices.*
Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$. La suma entre A y B, denotada $A + B$ es la matriz de orden $m \times n$, definida por:

$$A + B = (c_{ij}),\ \text{donde}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

II. *Multiplicación de un escalar por una matriz.*
Sea λ un escalar (un elemento de $\mathbf{K}$) y sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$. El producto del escalar λ por A, denotado λA es la matriz de orden $m \times n$, definida por:

$$\lambda\, A = (d_{ij}),\ \text{donde}\ d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

III. *Multiplicación de matrices.*
Sean $A = (a_{ij})$ matriz de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$, $B = (b_{ij})$ matriz de orden $n \times s$ sobre $\mathbf{K}$. El *producto* de las matrices A y B, es la matriz de orden $m \times s$, denotado $A \cdot B$ o también AB, definido por:

$$A \cdot B = (m_{ij}),\ \text{donde}\ m_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots, s\}$

Propiedades.

1. Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$.
   (a) $A + (B + C) = (A + B) + C$.
   (b) $A + B = B + A$.
   (c) $A + 0 = A = 0 + A$, donde 0 es la *matriz nula* de orden $m \times n$.
   (d) $-A = (-a_{ij})$ de orden $m \times n$, es la matriz *inversa aditiva* de A, tal que: $A + (-A) = 0 = (-A) + A$.
2. Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
   (a) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
   (b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
   (c) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
   (d) $1\ A = A$, donde 1 es el elemento unidad de $\mathbf{K}$.
   (e) $\alpha 0_{m\times n} = 0_{m\times n}; \quad 0\ A = 0_{m\times n}$
3. Sean A, B y C matrices.
   (a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, para toda matriz A de orden $m \times n$, B de orden $n \times s$, C de orden $s \times r$.
   (b) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$, para todo $\lambda \in \mathbf{K}$.
   (c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, para toda matriz A de orden $m \times n$, B y C de orden $n \times s$.
   (d) $A \cdot 0_{n\times s} = 0_{m\times s}$, para toda matriz A de orden $m \times n$.

   Nota. La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Transpuesta de una matriz. Sea $A = (a_{ij})$ matriz de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$. La *matriz transpuesta de* A, denotada A^t es la matriz de orden $n \times m$, definida por:

$$A^t = (b_{ij}), \text{ donde } b_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i,\ j.$$

Nota. Las filas de A^t son las columnas de A.

Propiedades

(a) $(A^t)^t = A$, para toda matriz A de orden $m \times n$.

(b) $(A + B)^t = A^t + B^t$, para toda matriz A y B de orden $m \times n$.

(c) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, para todo escalar λ y A de orden $m \times n$.

(d) $(A \cdot B)^t = B^t A^t$, para toda matriz A de orden $m \times n$ y B de orden $n \times s$.

1.1.2 Matrices Cuadradas.

Definición. A es una *matriz cuadrada* de orden n, si y solo si, A es de orden $n \times n$, es decir, A tiene n filas y n columnas.

Observaciones.

- $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ denotará al conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbf{K}$, por ejemplo:
$$\mathrm{M}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

- La adición y la multipicación de matrices cuadradas del mismo orden, están bien definidas.

- $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ con las operaciones *adición* y *multiplicación* es un *Anillo*. Este anillo tiene *divisores de cero*, es decir, existen matrices $A \neq 0$, $B \neq 0$ tal que $A \cdot B = 0$.

- Sea $A = (a_{ij})$ matriz cuadrada de orden n. Los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son los elementos de la llamada *diagonal* de la matriz A (o diagonal principal de A).

- $A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A, \quad$ etc.

Traza de una Matriz Cuadrada.

Definición. Sea $A = (a_{ij})$ matriz cuadrada de orden n. La *traza* de la matriz A, denotada $\mathrm{tr}(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A. Es decir:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Propiedades. Sea A y B matrices de orden n.

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(b) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$, para cualquier λ escalar.

(c) $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$.

(d) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$.

(e) $\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$, para toda matriz B invertible.

Matrices Diagonales. Sea $D = (d_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. D es una *matriz diagonal*, si y solo si, todos los elementos d_{ij} con $i \neq j$ son cero. (Es decir, todos los elementos ubicados fuera de la diagonal son cero).

Matriz Identidad. La matriz *identidad* de orden n, o matriz unidad de orden n, denotada I_n, es la matriz diagonal tal que cada elemento de la diagonal principal es 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

(a) $I_m \cdot A = A$, para toda matriz A de orden $m \times n$.

(b) $A \cdot I_n = A$, para toda matriz A de orden $m \times n$.

(c) $A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$, para toda matriz cuadrada A de orden n.

(d) $\mathrm{tr}(I_n) = n$.

Observaciones. Sea A una matriz cuadrada de orden n.

(a) $A^0 = I_n$.

(b) Sea $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Se define la matriz $f(A)$ por:

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

Matrices Invertibles. Sea A una matriz cuadrada de orden n. La matriz A es *invertible*, o A es *no singular*, si y solo si, existe una matriz B de orden n tal que $A \cdot B = I_n = B \cdot A$.

Ejemplo.

La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible ya que existe una matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2 = B \cdot A$.

Definición. Sea A una matriz cuadrada invertible. La matriz B de orden n tal que $A \cdot B = I_n = B \cdot A$ es *la matriz inversa* de la matriz A y se denotará A^{-1}.

Propiedades
Sean A y B matrices cuadradas de orden n, A y B invertibles.

(a) Si $A \cdot B = I_n$, entonces $B = A^{-1}$.

(b) $(A^{-1})^{-1} = A$

(c) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(d) A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Observaciones. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n.

- A es *triangular superior*, si y solo si, para todo $i > j$ se tiene que $a_{ij} = 0$.
- A es *triangular inferior*, si y solo si, para todo $i < j$ se tiene que $a_{ij} = 0$.
- A es *simétrica*, si y solo si, $A^t = A$.
- A es *antisimétrica*, si y solo si, $A^t = -A$.
- A es *ortogonal*, si y solo si, $A^t \cdot A = I_n = A \cdot A^t$.

1.1.3 Equivalencia de matrices (por filas).

Matrices Escalonadas.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ sobre $\mathbf{K}$.
A es *matriz escalonada*, si y solo si, siendo $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ las primeras componentes no-nulas de las filas no-nulas $1^{era}, 2^{da}, \ldots, r^{esima}$, se tiene que: $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

Las filas $r+1, r+2, \ldots, m$ (si es que existen) son nulas, es decir, todas las componentes de estas filas son cero.

Nota. Los elementos a_{1j_1}, a_{2j_2}, $\ldots$, a_{rj_r} de la matriz escalonada A definida anteriormente se llamarán *elementos distinguidos* de la matriz A.

Observación. Sea A una matriz de orden $m \times n$. A es una matriz *reducida por filas*, si y solo si, A es escalonada, cada elemento distinguido de la matriz A es 1, y en cada columna donde se encuentre un elemento distinguido los elementos restantes de esa columna son 0.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices escalonadas, donde la matriz C es además reducida por filas.

Operaciones Elementales Filas. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Las siguientes operaciones son *operaciones elementales filas* sobre A.

1. *Intercambiar dos filas de* A.
   E_{ij} denotará la operación elemental fila *intercambiar las filas* i, j *de* A. Realizando una operación elemental fila de este tipo sobre A, se obtiene una nueva matriz que anotaremos A_1 de orden $m \times n$.
   $$A \xrightarrow{E_{ij}} A_1$$
2. *Multiplicar una fila de* A *por un escalar distinto de cero.*
   $E_i(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$ denotará la operación elemental fila *multiplicar la fila* i *por el escalar* λ. Realizando una operación elemental fila de este tipo sobre A, se obtiene una nueva matriz que anotaremos A_2 de orden $m \times n$.
   $$A \xrightarrow{E_i(\lambda)} A_2$$
3. *Sumar a una fila de* A *un múltiplo escalar de otra fila de* A.
   $E_{ij}(\alpha)$ denotará la operación elemental fila *sumar a la fila* j, α *veces la fila* i. Realizando una operación elemental fila de este tipo sobre A, se obtiene una nueva matriz que anotaremos A_3 de orden $m \times n$.
   $$A \xrightarrow{E_{ij}(\alpha)} A_3$$

Definición. Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$. Se dice que A y B son *equivalentes por filas*, si y solo si, realizando un número finito de operaciones elementales filas sucesivas sobre A se obtiene la matriz B.

Notación. Se denotará $A \overset{\text{f}}{\equiv} B$.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = B$$

Luego, A es equivalente por filas con la matriz B, por ejemplo.

Observaciones.

- Realizando operaciones elementales filas sobre una matriz A, se puede obtener una matriz escalonada U tal que $A \overset{\text{f}}{\equiv} U$.

- Si U_1 y U_2 son dos matrices escalonadas tales que $A \overset{f}{\equiv} U_1$ y $A \overset{f}{\equiv} U_2$, entonces el número de filas no-nulas de U_1 es igual al número de filas no-nulas de U_2.

Rango de una matriz.

Sea A una matriz de orden $m \times n$, y sea U una matriz escalonada tal que $A \overset{f}{\equiv} U$. El *rango* de la matriz A, denotado $\rho(A)$, es el número de filas no-nulas de la matriz escalonada U.

Ejemplo.

Como $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\equiv} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Comprobarlo.* Luego $\rho(A) = 2$.

Observaciones.

1. Sean A y B matrices de orden $m \times n$. Si A y B son equivalentes por filas, entonces $\rho(A) = \rho(B)$. El recíproco no vale.

2. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se tiene que:

   (a) A es invertible, si y solo si, A es equivalente por filas con la matriz identidad I_n.

   (b) A es invertible, si y solo si, el rango de A es n.

3. Sea A una matriz invertible de orden n, es decir, $\rho(A) = n$. Una manera de calcular la inversa de A usando operaciones elementales filas es la siguiente:

   - Formar la matriz aumentada $(A \; ; \; I_n)$, de orden $n \times 2n$.
   - Realizar operaciones elementales filas sobre esta matriz hasta obtener la matriz reducida por filas, equivalente por filas a la matriz $(A \; ; \; I_n)$, que es única.
     Tal matriz reducida por filas es $(I_n \; ; \; B)$, donde $B = A^{-1}$.

Matrices Elementales filas.

Definición. Una matriz elemental fila de orden n es una matriz cuadrada de orden n que resulta de realizar *una sola* operación elemental fila sobre la matriz identidad I_n.

Notación. Denotaremos a las matrices elementales filas, independiente del orden, con la misma notación de la operación elemental que se realiza sobre la matriz identidad correspondiente.

- E_{ij} denotará la matriz elemental fila que resulta de I_n realizando la operación elemental fila E_{ij}.

- $E_i(\lambda)$ denotará la matriz elemental fila que resulta de I_n realizando la operación elemental fila $E_i(\lambda)$, con $\lambda \neq 0$.
- $E_{ij}(\alpha)$ denotará la matriz elemental fila que resulta de I_n realizando la operación elemental fila $E_{ij}(\alpha)$.

Nota. Sea A una matriz de orden $m \times n$ y sea E una matriz elemental fila cualquiera de orden m. Realizando la operación elemental fila correspondiente denotada E, se obtiene la matriz EA. Es decir:

$$A \xrightarrow{E} EA$$

Observaciones.

1. Las matrices elementales filas son invertibles.

$$(E_{ij})^{-1} = E_{ij} \qquad (E_i(\lambda))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \;\; \lambda \neq 0 \qquad (E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

2. Sean A y B matrices de orden $m \times n$. A y B son equivalentes por filas, si y solo si, existen matrices elementales filas $F_1, F_2, \ldots, F_s$ tal que: $F_s \cdots F_2\, F_1, A = B$.

3. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se tiene que:

   A es *invertible*, si y solo si, existen matrices elementales filas $F_1, F_2, \ldots, F_s$ tal que: $F_s \cdots F_2\, F_1\, A = I_n$.

   Notar que:

   - $A^{-1} = F_s \cdots F_2\, F_1$.
   - $A = (F_1)^{-1}(F_2)^{-1} \cdots (F_s)^{-1}$

1.2 Determinantes

Sea A una matriz cuadrada de orden n. El *determinante* de A es un número que se denotará $\det(A)$ o también $|A|$. Definiremos primeramente el determinante de una matriz de orden 1, de orden 2, y de orden 3.

Definición.

- Sea $A = (a)$ de orden 1. Se define: $\det(A) = a$.
- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se define: $\det(A) = ad - bc$.

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Se define:

  $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Definición. Sea $A = (a_{ij})$ matriz de orden n, $n > 1$.

1. El *menor* del elemento a_{ij}, denotado M_{ij} es el determinante de la matriz A_{ij} de orden $n-1$, donde A_{ij} es la matriz que resulta de A eliminando la fila i y la columna j de A.
2. El *cofactor* del elemento a_{ij}, denotado $\mathrm{Cof}(a_{ij})$ es el número: $\mathrm{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Definición. Sea $A = (a_{ij})$ matriz de orden n, $n > 1$. El *determinante* de A es el número:

$\det(A) = a_{i1}\mathrm{Cof}(a_{i1}) + a_{i2}\mathrm{Cof}(a_{i2}) + \cdots + a_{in}\mathrm{Cof}(a_{in})$, donde i es una fila de A, o

$\det(A) = a_{1j}\mathrm{Cof}(a_{1j}) + a_{2j}\mathrm{Cof}(a_{2j}) + \cdots + a_{nj}\mathrm{Cof}(a_{nj})$, donde j es una columna de$A$.

Propiedades.

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\det(A) = \det(A^t)$, para toda matriz A de orden n.
3. Si $A = (a_{ij})$ es matriz triangular de orden n, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
4. $\det(A^t) = \det(A)$, para toda matriz A de orden n.
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, para A y B matrices cuadradas de orden n.

   Luego, $\det(A^m) = (\det A)^m$, para todo $m \in \mathbf{N}$.
6. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, para toda matriz A de orden n.
7. Considerar las matrices elementales filas $E_{ij},\ E_i(\lambda),\ E_{ij}(\alpha)$.
   - $\det(E_{ij}) = -1, \quad \det(E_i(\lambda)) = \lambda, \quad \det(E_{i,j}(\alpha)) = 1$
   - $\det(E_{ij}A) = -\det(A), \quad \det(E_i(\lambda)A) = \lambda\det(A), \quad \det(E_{ij}(\alpha)A) = \det(A)$ donde A es una matriz de orden n.

   Nota. El determinante de una matriz se puede calcular también usando matrices u operaciones elementales filas.
8. Si A es una matriz invertible, entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Matriz Adjunta. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n, $n > 1$. La matriz *adjunta* de A denotada $\text{adj}(A)$ es la matriz de orden n definida por:

$$\text{adj}(A) = (\text{Cof}(a_{ij}))^t$$

Observaciones. Sea A una matriz de orden n.

- Se tiene que $A\ \text{adj}(A) = \det(A)\ I_n$.
- A es *invertible*, si y solo si, $\det(A) \neq 0$ y $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$

Nota. Una de las aplicaciones de los determinantes en la Geometría plana es el cálculo de áreas de polígonos en el plano euclidiano.

Dados los puntos $A(a, b)$, $B(c, d)$ y $C(e, f)$ en el plano, se tiene que el **área** del **triángulo** cuyos vértices son A, B y C es

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \textbf{abs} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

siendo **abs** el valor absoluto del determinante.

¡Probar la afirmación anterior, usando Geometría Analítica!

Notar que, A, B y C son colineales, si y solo si, $\Delta = 0$.

Ejemplo. El área del triángulo cuyos vértices son $A(-1, -5)$, $B(5, 8)$ y $C(4, -1)$ es

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \textbf{abs} \begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \textbf{abs}(-1) = 1$$

1.3 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición. Una *ecuación lineal* en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coeficientes reales es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ son números reales.

Nota. Si $c = 0$, la ecuación lineal se dice *homogénea*, y si $c \neq 0$, la ecuación lineal se dice *no-homogénea*.

Definición. Un *sistema de m ecuaciones lineales en n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con coeficientes reales, es un conjunto formado por m ecuaciones lineales en las n variables, expresado:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right| (*)$$

Nota. El sistema anterior se dice *homogéneo*, si y solo si, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Si $b_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ el sistema se dice *no-homogéneo*.

Observaciones.
Considerar un sistema $(*)$ formado por m ecuaciones lineales con coeficientes reales en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. *Resolver* el sistema anterior, significa, determinar todas las n-uplas ordenadas de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen cada una de la m ecuaciones lineales que lo forman.

2. El *conjunto solución* del sistema considerado, es el conjunto de todas las n-uplas ordenadas que satisfacen cada una de las m ecuaciones lineales que lo forman.

3. Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de variables (dispuestas en el mismo orden) son equivalentes, si y solo si, tienen el mismo conjunto solución.

4. Sea S el conjunto solución del sistema $(*)$. El sistema se dice *consistente*, si y solo si, $S \neq \emptyset$. El sistema se dice *inconsistente*, si y solo si, $S = \emptyset$.

Representación Matricial de un sistema.

Considerar el sistema $(*)$ formado por m ecuaciones lineales con coeficientes reales en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ se llama la *matriz de los coeficientes* del sistema.

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el vector de las variables.

- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ es el vector de las constantes.

Considerando las notaciones anteriores:

- $AX = b$ es la *representación matricial* del sistema $(*)$.
- La matriz $(A \ ; \ b)$ de orden $m \times (n+1)$ es la *matriz aumentada* del sistema.

Observaciones.

1. Considerar un sistema formado por m ecuaciones lineales en n variables, denotado matricialmente $AX = b$.

   (a) El sistema $AX = b$ es *consistente*, si y solo si, $\rho(A) = \rho(A \ ; \ b)$.
   - El sistema $AX = b$ tiene solución *única*, si y solo si, $\rho(A) = \rho(A \ ; \ b) = n =$ número de variables.
   - El sistema tiene *infinitas* soluciones, si y solo si, $\rho(A) = \rho(A \ ; \ b) < n$.

   (b) El sistema $AX = b$ es *inconsistente*, si y solo si, $\rho(A) < \rho(A \ ; \ b)$.

   Nota. El sistema $AX = b$ es equivalente al sistema $RAX = Rb$, para toda matriz invertible R de orden m.

2. Para resolver un sistema formado por m ecuaciones lineales y n variables $AX = b$, generalmente se usa el *método de eliminación de Gauss*.
   Este método consiste en:
   - Determinar una *matriz escalonada* $(\hat{A} \ ; \ \hat{b})$ equivalente por filas a la matriz aumentada del sistema: $(A \ ; \ b)$.
   - Luego, resolver el sistema $(\hat{A}X = \hat{b})$, sistema equivalente al sistema a resolver.

3. Considerar el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ con igual número de ecuaciones lineales que de variables, es decir, cuando A es una matriz cuadrada de orden n.

   Notar que si la matriz A es invertible, el sistema $AX = b$ tiene solución única, donde $X = A^{-1}b$. Esta solución se determina por ejemplo:

   (a) Usando el método de eliminación de Gauss, o

   (b) Calculando A^{-1}, para luego calcular $A^{-1}b$, o

   (c) Por medio de la *Regla de Cramer* que enunciaremos a continuación:
   - Calcular $\det(A)$.
   - Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea A_j la matriz de orden n que resulta de reemplazar solo la columna j de la matriz A por los elementos de b, en el mismo orden.
   - Luego, $\quad x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

1.4 Ejercicios Resueltos

1. Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinar $-3A$, A^tA, $\mathrm{tr}(B)$.

   (b) Sea $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. Determinar $f(B)$.

   (c) Calcular $\det(3B)$.

   Respuesta.

   (a) • $-3A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 0 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$.

   • $A^tA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 34 \end{pmatrix}$

   • $\mathrm{tr}(B) = 3 + 7 = 10$.

   (b) $f(B) = -B^2 + 2B - 3\,I_2$. Luego:

   $$f(B) \quad = \quad -\begin{pmatrix} 5 & 40 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -32 \\ 8 & -34 \end{pmatrix}$$

   Ejercicio. Calcular $f(B^t)$, y comparar con $f(B)^t$.

   (c) $\det(3B) = 3^2 \det(B) = 9 \cdot 25 = 225$

2. (a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, y sea $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Calcular el determinante de la matriz $f(A)$.

   (b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ x & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2×4. Calcular el o los valores de $x \in \mathbf{R}$, si fuere posible, tal que $BB^t = 10I_2$.

   Respuesta.

   (a) Como $f(A) = A(A - I_2)(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

   Luego $\det(f(A)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$

(b)

$$BB^t = 10I_2 \iff \begin{pmatrix} 10 & x+2 \\ x+2 & x^2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left.\begin{array}{ccccc} x & + & 2 & = & 0 \\ x^2 & + & 6 & = & 10 \end{array}\right|$$

Luego, $x = -2$.

3. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & t & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Probar que B es invertible y calcular B^{-1}.

Respuesta. Como $|B| = -2t + 2 + 2t = 2 \neq 0$, luego B es invertible.

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2t & 4 & -2-2t \\ 1 & 0 & 1 \\ t & -2 & t \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -t & \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1-t & \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 4.

Calcular $x \in \mathbf{R}$ tal que $|xA| + |-2A| = 64$.

Respuesta. $|A| = 1\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -(-20+10+8) = 2.$

Luego, $|xA| + |-2A| = 64 \iff x^4 2 + (-2)^4 2 = 64 \iff x = \pm 2$.

5. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de orden 4.

(a) Determinar el o los valores reales de k, tal que A sea invertible.

(b) Para k = 0 calcular el determinante de A.

(c) Para $k = 0$, calcular el determinante de A usando cofactores.

(d) Para $k = 0$, calcular A^{-1}.

Respuesta.

(a) A es invertible, si y solo si, $\rho(A) = 4$.

$$A \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{E}_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{E}_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{24}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4+k}{2} \end{pmatrix}$$

Luego, A es invertible, si y solo si, $k \neq -4$.

(b) Utilizando lo anterior, $E_{34}(\frac{1}{2})E_{24}(1)E_{23}E_{13}(1)E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Luego,

$$\det(E_{34}(\tfrac{1}{2}))\det(E_{24}(1))\det(E_{23})\det(E_{13}(1))\det(E_{12})\det(A) = -2 \cdot 2$$

$$1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \det(A) = -4$$

Por lo tanto, $\det(A) = -4$.

(c) Para calcular el determinante de A por cofactores se utilizará la segunda fila.

$$\det(A) = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

(d) Para $k = 0$, la matriz A es invertible ya que $\det(A) = -4$. Calcular A^{-1}.

Verificar que: $(A\ ;\ I_4) \overset{f}{\equiv} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$.

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. Resolver el sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 6 \\ x & - & y & & & + & 2t & = & -5 \\ & - & y & - & 2z & + & t & = & -1 \end{array}\right|$

Respuesta.

- Forma matricial del sistema $AX = b$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Matriz aumentada del sistema $(A\,;b)$: $\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

- $\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{f}{\equiv} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Como $\rho(A) = \rho(A\,;\,b) = 2$, el sistema es consistente, y tiene infinitas soluciones.

- El conjunto solución S del sistema pedido, es el conjunto solución del sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 6 \\ & & y & + & 2z & - & t & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} \text{Luego,} \quad S &= \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 / -x+2y+2z-3t=6 \ \wedge \ y+2z-t=1\} \\ &= \{(-4-2z-t, 1-2z+t, z, t) \ / \ z,t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$ matriz de orden 3.

(a) Determinar todos los $x \in \mathbf{R}$ tales que el rango de A sea 3.

(b) Para $x = -1$, calcular la inversa de A, si fuere posible.

Respuesta.

(a) Se tiene que: $\rho(A) = 3$ si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Como, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$

Por lo tanto:

$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow x^2(x+3) \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -3 \Longleftrightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -3\}$

(b) Para $x = -1$, la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\det(A) = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1}.

Como $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1.5 Ejercicios

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular: $A - B$; AC; B^tA; C^tB; $AB - BA$.

   (b) Calcular $A + A^2 + A^3$.

   (c) Determinar si $(AB)^t$ y A^tB^t son iguales.

   (d) Calcular $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(A^2)$, $\operatorname{tr}(AB)$, $\operatorname{tr}(AB - BA)$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de orden 3×2. Determinar una matriz B de orden 2×3 tal que $B \cdot A = I_2$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Probar que $A^n = 3^{n-1}A$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de orden 2.

   (a) Si A verifica la ecuación $A^2 + cA + dI_2 = 0$, calcular c y d.

   (b) Sea $f(x) = 3x^4 - 2x + 2$. Calcular $f(A)$, $f(-A)$, $f\left(\frac{3}{2}A\right)$

5. Determinar la matriz inversa, si fuere posible, de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   y en los casos que lo fuere, descomponerla como producto de matrices elementales filas.

6. Probar que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ es invertible y calcular la inversa de A.

7. Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Calcular $B^t A$.

(b) Calcular la adjunta de A.

(c) Calcular $\rho(A)$, $\rho(B)$, $\rho(A^2)$.

8. Determinar, si es que existen, valores de $k \in \mathbf{R}$ tal que las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tengan el mismo rango.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3.

(a) Probar que A es invertible.

(b) Calcular $A + A^{-1}$.

(c) Calcular $\det(A)$, $\det(-5A)$, $\det(A^5)$.

(d) Calcular $\det(\mathrm{adj}(A))$.

Ejercicio adicional: En general, si B es invertible de orden n, calcular $\det(\mathrm{adj}(B))$.

10. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2x \\ 3 & 1 & x-2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar todos los $x \in \mathbf{R}$ tales que el rango de A sea 2.

(b) Determinar todos los $x \in \mathbf{R}$ tales que A sea invertible.

11. Determinar todos los $a \in \mathbf{R}$ tal que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

sea *no-singular*, o invertible.

12. Caracterizar el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 3 que son simétricas con traza nula. Nombrar 5 elementos de este conjunto.

13. Sea A una matriz de orden $5 \times n$, y B una matriz de orden $n \times s$. Si la primera fila de A es igual a la tercera fila de A. Probar que la primera y tercera fila de AB son iguales.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 12 \\ 2 & -4 & 2 & -10 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2×4. Sea R la matriz escalonada reducida por filas equivalente (por filas) con la matriz A. Determinar una matriz P invertible tal que $A = PR$.

15. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ matrices de orden 3. Determinar una matriz U tal que $A = L\cdot U$.

16. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    (a) Calcular el rango de A.

    (b) Calcular $E_{23}(-1)(E_2(3))^{-1}A$.

    (c) Hallar una matriz escalonada R que sea equivalente a A, y una matriz inversible P de orden 3, tal que $R = PA$.

    (d) Calcular $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}^t = 32$

17. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 4.

    Determinar una matriz B equivalente por filas con A tal que $\det(B) = 3\det(A)$.

18. Calcular $a \in \mathbf{R}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1+a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

19. Resolver el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & = & -2 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right| \quad \text{usando}$$

    (a) Método de Gauss.

    (b) $X = A^{-1}b$.

    (c) Regla de Cramer.

20. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 6 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\ 2x & & & + & z & - & 2u & = & 3 \\ x & + & y & - & 2z & - & 3u & = & 0 \end{array}\right|$$

21. Considerar el sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 6z & = & 6 \\ -x & + & 3y & + & (k-3)z & = & 0 \end{array}\right|$

    Determinar los valores reales de k, si es que existen, para que el sistema:

    (a) tenga solución única;

    (b) tenga infinitas soluciones;

    (c) no tenga solución.

22. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de orden 3, y sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

    (a) Resolver $AX = b$, donde $b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}^t$.

    (b) Resolver el sistema $AX = 0$.

    (c) Calcular $\det(A - I_3)$.

    (d) Resolver $AX = X$.

23. Resolver el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & z & - & t & = 0 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = 0 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = 0 \end{array}\right|$$

24. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de orden 5, y sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$.

    (a) Calcular el determinante de A.

    (b) Resolver el sistema homogéneo $AX = 0$.

    (c) Resolver $AX = b$, donde $b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^t$.

    (d) Determinar la o las relaciones que deben satisfacer a, b, c, d, e para que el sistema $AX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}^t$ sea consistente.

25. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de orden 2×3.

    (a) Determinar todas las matrices B de orden 3×2 tales que $AB = I_2$.

    (b) Determinar tres matrices particulares B tales que $AB = I_2$.

(c) Determinar todas las matrices C de orden 2×3 tal que $AC = 0$.

26. (a) Calcular el área del polígono $ABCDE$ cuyos vértices son: $A(-10, 0)$, $B(-2, 25)$, $C(1, 36)$, $D(10, -20)$, $E(3, -40)$.

    (b) Determinar, si fuere posible, un tercer vértice de un triángulo de área 30 tal que dos de sus vértices son $A(3, 11)$, $B(-1, 3)$ y el tercero está en el eje X.

    (c) Determinar la o las relaciones que debe satisfacer a y b para (a, b) pertenezca a la recta determinada por los puntos $(-1, 5)$ y $(4, 8)$.

27. Un biólogo, en un experimento sobre nutrición quiere preparar una dieta especial para sus animales de laboratorio. El requiere una comida formada por una mezcla que contenga entre otras cosas, 20 onzas de proteínas y 6 onzas de grasa. El encuentra la comida preparada pero en las siguientes composiciones:

	Proteínas(%)	**Grasa(%)**
Mezcla A	20	2
Mezcla B	10	6

    Determinar la cantidad de onzas de cada mezcla que deberá usar para preparar su mezcla.

28. Cinco señoras asisten a una sesión con su médico tratante por problemas de peso. Ellas no han seguido la dieta que les fue recetada, y al momento de dar su peso actual una de ellas dice al médico: "al pesarme con cada una de mis amigas por separado, he obtenido 177, 174, 168 y 182 kgs. respectivamente. Además, mis cuatro amigas juntas pesan 4 veces mi peso mas 21 kgs". Determinar el peso de cada una de las señoras.

29. Se construye un cuadrado con 9 números dispuestos en tres filas y tres columnas tal que los números de cada fila y de cada columna suman el mismo número **75**, de los cuales tres están dados. Ver figura.

X	29	**Y**
K	V	**47**
38	**7K**	**M**

    Determinar el o los valores de las variables que aparecen en la figura.

30. Considerar la función polinómica $y = p(x)$, donde $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con a, b, c, d reales, tales que $p(-1) = 2$, $p(2) = -1$, $p(1) = 3$.

    (a) Determinar todos los $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ que cumplen las condiciones dadas.

    (b) Determinar dos de tales polinomios.

31. Considerar los polinomios $p(x) = (a+b-2c)x^3 - (a+d)x^2 + (3a-c)x + (b-c+2d)$ y $q(x) = (b+1)x^2 - (a+2c-d)x + (a-b+1)$ con coeficientes reales.

    Determinar $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tales que $p(x) = q(x)$.

32. Considerar el sistema formado por la n ecuaciones lineales: L_1, L_2, $\ldots$, L_n, donde:

$$
\begin{array}{ll}
L_1 : & x_1 - 2(1+a^2)x_2 = 1 \\
\vdots & \\
L_j : & x_{j-1} - 2(1+a^2)x_j + x_{j+1} = 0, \text{ para cada } j \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \\
\vdots & \\
L_n : & x_{n-1} - 2(1+a^2)x_n = 1
\end{array}
$$

Se tiene que, este sistema tiene solución única, para cualquier valor real de a.

(a) Verificar lo anterior para $n = 4$.

(b) Para $n = 4$ y para $a = 0$, resolver el sistema.