1. Resolver la ecuación: $(2x-3)(x+4) = 21(x-2)$

Solución:

$$(2x-3)(x+4) = 21(x-2) \iff 2x^2+5x-12 = 21x-42$$

$$\iff x^2-8x+15 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{coeficientes de la ec. cuadrática:} \\ a=1, \quad b=-8, \quad c=15 \\ \\ \textit{Discriminante} \\ = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 15 = 4 > 0 \end{array}\right.$$

$$\iff x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}$$

$$\iff x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8\pm 2}{2}$$

$$\iff x = 5 \ \vee \ x = 3$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x=5, \quad x=3.$

Conjunto solución: $S = \{5,\ 3\}.$

2. Resolver la ecuación: $8(2x+1)(x-5) = -121$

Solución:

$$8(2x+1)(x-5) = -121 \iff 16x^2-72x-40 = -121$$

$$\iff 16x^2-72x+81 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{coeficientes de la ec. cuadrática:}\\ a=16, \quad b=-72, \quad c=81\\ \\ \textit{Discriminante}\\ =(-72)^2-4\cdot 16\cdot 81=0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \qquad x=\frac{72\pm\sqrt{0}}{32}=\frac{9}{4}$$

Respuesta:

La ecuación tiene soluciones reales e iguales: $x_1=x_2=\dfrac{9}{4}$.

Conjunto solución: $S=\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$.

3. Resolver cada ecuación:

(a) $3-x^2=2x^2-24$ (b) $4x(x+5)=5(4x-5)$

Solución:

(a) $3-x^2=2x^2-24 \iff 3x^2-27=0 \iff x^2=9 \iff x=\pm 3.$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x=\pm 3$.

(b) $4x(x+5)=5(4x-5) \iff 4x^2+25=0$. No tiene soluciones reales.

Respuesta:

El conjunto solución de la ecuación es: $S=\emptyset$.

4. Resolver cada ecuación:

   (a) $12x^2 = 27x$

   (b) $\dfrac{4x^2 + 25x}{81} = 0$

   (c) $3x(x-5) = 7(x+5)(x+2) - 70$

Solución:

(a) $12x^2 = 27x \iff x(12x-27) = 0 \iff x = 0 \vee x = 9/4$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x = 0, \quad x = 9/4.$

(b) $\dfrac{4x^2 + 25x}{81} = 0 \iff 4x^2 + 25x = 0 \iff x(4x+25) = 0$
$\iff x = 0 \vee x = -25/4$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x = 0, \quad x = -25/4.$

(c) $3x(x-5) = 7(x+5)(x+2) - 70 \iff 3x^2 - 15x = 7x^2 + 49x$
$\iff 4x^2 + 64x = 0$
$\iff x = 0 \vee x = -16$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x = 0 \vee x = -16$

5. Resolver cada ecuación:

   (a) $(2x - 31)(x + 67) = 0$

   (b) $x(x-2) = x + 28$

   (c) $7x - 9 = 1 + 3x^2$

Solución:

(a) $(2x-31)(x+67)=0 \iff 2x-31=0 \vee x+67=0$

$\iff x=31/2 \vee x=-67$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x=31/2 \vee x=-67$

(b) $x(x-2)=x+28 \iff x^2-3x-28=0$

Por Factorización:

$$x^2-3x-28=0 \iff (x-7)(x+4)=0 \iff x=7 \vee x=-4$$

Aplicando la fórmula:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-28)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{3\pm 11}{2}.$$

Luego, $x=7$ o $x=-4$.

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x=7,\ x=-4.$

(c) $7x-9=1+3x^2 \iff 3x^2-7x+10=0.$

$Discriminante = 49-120<0$

la ecuación no tiene soluciones reales

Respuesta:

El conjunto solución de la ecuación es: $S=\emptyset$

6. Sin resolver cada ecuación, determinar la naturaleza de sus raíces.

   (a) $x^2 = 8x + 12\sqrt{3}$

   (b) $4x(3 - x) = 9$

   (c) $3x^2 = \sqrt{2}(x - \sqrt{3})$

Solución:

Ecuación	Discriminante D	Respuesta
(a)	$D = 64 + 48\sqrt{3} > 0$	tiene sus dos raices reales y distintas
(b)	$D = 144 - 144 = 0$	tiene sus dos raices reales e iguales
(c)	$D = 2 - 12\sqrt{6} < 0$	no tiene raices reales

7. Deducir la fórmula cuadrática que resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, mediante la **completación del cuadrado** de un binomio.

Solución:

Ecuación cuadrática:	$ax^2 + bx + c = 0$
Multiplicar por $1/a$:	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Sumar $-\frac{c}{a}$ a ambos lados:	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Sumar a ambos lados $\frac{b^2}{4a^2}$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Factorizar primer miembro: $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

Extraer raiz cuadrada: $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Despejar x: $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Luego: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nota. Las soluciones son reales $\iff$ $b^2-4ac\geq 0$.

8. Resolver la ecuación: $(3x-2)^2=(2x+5)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}(3x-2)^2=(2x+5)^2 &\iff 9x^2-12x+4=4x^2+20x+25\\ &\iff 5x^2-32x-21=0\\ &\iff x=7,\ o\ x=-3/5\end{aligned}$$

Respuesta:

La ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

El conjunto solución de la ecuación es: $S=\{7,\ -3/5\}$.

9. Resolver la ecuación: $4x(x+1) = 5x^3$

Solución:

$$\begin{aligned} 4x(x+1) = 5x^3 &\iff x(4x+4-5x^2) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \vee \quad 4x+4-5x^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \vee \quad 5x^2-4x-4 = 0 \\ &\iff x = 0, \ \vee \ x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x = 0, \ x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{5}, \ x = \dfrac{2-\sqrt{6}}{5}.$

10. Resolver la ecuación: $(2x)^2 + (2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 390.$

Solución:

$$\begin{aligned} (2x)^2 + \ (2x+1)^2 + (2x+3)^2 &= 390 \\ \iff 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 &= 390 \\ \iff 12x^2 + 16x - 380 &= 0 \\ \iff x = -19/3 \ \vee \ x &= 5 \end{aligned}$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x = -19/3, \ x = 5.$

11. Resolver cada ecuación:

(a) $\dfrac{3+5x}{1-x} = \dfrac{x+1}{1-2x} + 3$

(b) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{7}{x-2} - \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

Solución:

(a) $\dfrac{3+5x}{1-x} = \dfrac{x+1}{1-2x} + 3$

$$\Longrightarrow \quad (3+5x)(1-2x) = (x+1)(1-x) + 3(1-x)(1-2x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 15x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 1/5 \ \vee \ x = 1/3$$

Respuesta:

Luego de comprobar estas soluciones en la ecuación original, se obtiene que: las soluciones de la ecuación son: $x = 1/5, \quad x = 1/3.$

(b) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{7}{x-2} - \dfrac{x}{x^2-3x+2} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{7}{x-2} - \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$

$$\Longrightarrow \quad x(x-2) = 7(x-1) - x$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 7 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Comprobación.

Para $x = 7$: $\begin{cases} \dfrac{7}{7-1} = \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{7}{7-2} - \dfrac{7}{(7-2)(7-1)} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{30} = \dfrac{7}{6} \end{cases} \Longrightarrow$ x=7 es solución

Para $x = 1$: $\left\{ \dfrac{7}{1-1} \right.$ no está definida $\Longrightarrow$ x=1 no es solución

Respuesta:

El conjunto solución de la ecuación es: $S = \{7\}$.

12. Determinar todos los x que satisfacen la ecuación:

$$\frac{3+6p-2p^2+xp}{3} = \frac{4p^2+x}{x}, \text{ siendo } p \text{ constante } \neq 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{3+6p-2p^2+xp}{3} = \frac{4p^2+x}{x} & \\
\Longrightarrow \quad x(3+6p-2p^2+xp) &= 3(4p^2+x) \\
\Longleftrightarrow \quad px^2+(6p-2p^2)x-12p^2 &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad x^2+(6-2p)x-12p &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-6+2p \pm 2|p+3|}{2} & \\
\Longleftrightarrow \quad x = 2p \quad \text{o} \quad x &= -6
\end{aligned}$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x = 2p$, $x = -6$.

13. Hallar el o los valores de $p \in \mathbb{R}$, una solución de la ecuación $(p^2+2)x^2-7x-2p=1$ sea $x=-1/2$.

Solución:

$$\begin{aligned} x=-1/2 \quad &\text{es solución de } (p^2+2)x^2-7x-2p=1 \\ &\iff (p^2+2)(-1/2)^2-7(-1/2)-2p=1 \\ &\iff p^2+2+14-8p=4 \\ &\iff p^2-8p+12=0 \\ &\iff p=2 \quad \text{o} \quad p=6 \end{aligned}$$

Respuesta:

Existen dos valores de p, tal que $x=-1/2$ es una solución de la ecuación: $p=2$ o $p=6$.

14. Considerar la ecuación: $(3x-2m)^2+(6x-4m)(x+m)+(x+m)^2=0$, siendo m una constante real.

(a) Resolver la ecuación.

(b) Determinar el o los valores de $m \in \mathbb{R}$ tales que, $x=-2$ sea solución de la ecuación.

Solución:

(a) $(3x-2m)^2+(6x-4m)(x+m)+(x+m)^2=0$

$$\iff 16x^2-8\,m\,x+m^2=0$$

$$\iff x=\frac{8m\pm\sqrt{64m^2-64m^2}}{32}$$

$$\iff x=\frac{m}{4}$$

Respuesta:

Para cada $m \in \mathbb{R}$, la ecuación tiene las dos raíces reales e iguales: $x=\dfrac{m}{4}$.

(b) Nota: Se resolverá este problema, independiente de la parte (a) de este ejercicio.

$x = -2$ es solución de la ecuación dada $\Longleftrightarrow$ al sustituir $x = -2$ en la ecuación original, se cumple la igualdad.

Así se obtiene la ecuación en m: $(-6-2m)^2+(-12-4m)(x+m)+(-2+m)^2 = 0$ equivalente a la ecuación: $m^2 + 16m + 64 = 0$.

Resolviendo esta última ecuación se obtiene: $m = -8$.

Respuesta:

$x = -2$ es solución de la ecuación, para $m = -8$.

15. Hallar el valor de la constante p en cada ecuación, de manera que satisfaga la condición que se indica. Comprobar.

(a) $2x^2 - px + 4 = 0$, la suma de sus raíces es 5.

(b) $(p + 2)x^2 + 5x + 2p = 0$, el producto de sus raíces es $2/3$.

Solución:

(a) Suma de las raíces de la ecuación $2x^2 - px + 4 = 0$: $\dfrac{p}{2}$

Luego: $\dfrac{p}{2} = 5 \Longrightarrow p = 10$

Comprobación.

Soluciones de $2x^2 - 10x + 4 = 0$: $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Suma de sus raíces: $x_1 + x_2 = 5$

(b) Producto de las raíces de la ecuación $(p + 2)x^2 + 5x + 2p = 0$ es: $\dfrac{2p}{p+2}$

Luego: $\dfrac{2p}{p+2} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow p = 1$

Comprobación.

Soluciones de $3x^2+5x+2=0$: $x_1=-\dfrac{2}{3}$, $x_2=-1$.

Producto de sus raíces: $x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{3}$

16. Hallar el (o los) valor(es) de la constante p, en cada caso, de manera que:

(a) La ecuación $(p+2)x^2+5x+5p=0$, tenga sus raíces iguales.

(b) La ecuación $x(x-3)=2p$, tenga raíces reales.

Solución:

(a) Discriminante: $D=25-4(p+2)(5p)=-20p^2-40p+25$

Las raices de la ecuación son iguales $\iff -20p^2-40p+25=0$
$\iff p=1/2 \ \vee \ p=-5/2$

Comprobación.
Para $p=1/2$, las soluciones de $5x^2+10x+5=0$ son: $x_1=x_2=-1$.

Para $p=-5/2$, las soluciones de $x^2-10x+25=0$ son: $x_1=x_2=5$.

Respuesta:

La ecuación dada tiene sus raíces iguales, para $p=1/2$, o para $p=-5/2$.

(b) $x(x-3)=2p \iff x^2-3x-2p=0$
Discriminante: $D=9-4(-2p)=9+8p$

Respuesta:

Las raices de la ecuación son reales $\iff 9+8p\geq 0$
$\iff p\geq -9/8$

17. Demostrar que para todo $p, q \in \mathbb{R}$, las raíces de la ecuación $x^2+2(p+q)x+2pq = 0$ son números reales.

Demostración:

- Discriminante de la ecuación:

$$\begin{aligned} D &= (2(p+q))^2 - 8pq \\ &= 4(p^2+2pq+q^2) - 8pq \\ &= 4p^2+8pq+4q^2-8pq \\ &= 4p^2+4q^2 \end{aligned}$$

- Análisis y conclusión:
  $D = 4p^2+4q^2 \geq 0$, para todo $p, q \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ las raices de la ecuación $x^2+2(p+q)x+2pq = 0$ son números reales para todo $p, q \in \mathbb{R}$.