1)

Teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E div\left(\vec{F}(x,y,z)\right)dV = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{dx} + \frac{\partial Q}{dy} + \frac{\partial R}{dz}\right)dV$$

Entonces:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \left(x^2 + y^2 + y^2 - x^2 + x - 2y^2\right)dV = \iiint_E x dV$$

En coordenadas cilíndricas (*):

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 r\cos\theta \left|r\right| \, dz\, d\theta\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 r^2 \cos\theta \, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} z r^2 \cos\theta \Big|_{z=r^2}^{4} d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right)\left(r^2 \cos\theta\right) d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \left(4 - r^2\right)\left(r^2\right) \sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr$$

$$\int_0^2 0\, dr = 0$$

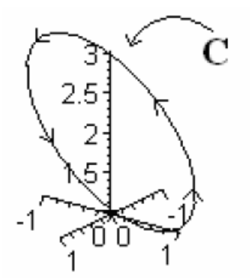
Por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$$

* Gentileza de Sergio González Reyes

2)

Obtenemos la elipse:



$Ec.\ Paramétricas\ de\ C.$

$x = \cos t$

$y = \sin t$

$z = 2 - \sin t$

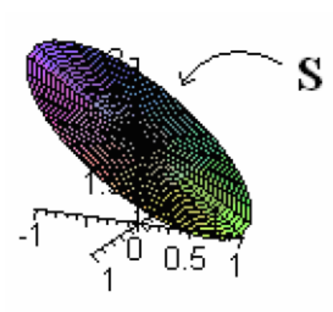
$\vec{r}(t) = (\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 2 - \sin t)$

$0 \le t \le 2\pi$

Al aplicar el teorema de Stokes.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

Como necesitamos una superficie S con frontera C, lo más práctico de utilizar es la superficie de la elipse encerrada por esta.



$Ec.\ Paramétricas\ de\ S$

$x = v\cos(u)$

$y = v\sin(u)$

$z = 2 - v\sin(u)$

$\vec{r}(t) = (v\cos(u)\ ,\ v\sin(u)\ ,\ 2 - v\sin(u))$

$0 \le u \le 2\pi$

$0 \le v \le 1$

Calculando el rotor...

$$rot(\vec{F}) = \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{bmatrix} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1 + 2y)$$

$$rot(\vec{F}(u,v)) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1 + 2v\sin(u))$$

Entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\ dA$$

* Gentileza de Sergio González Reyes

Al calcular el vector normal a la superficie $\left(\vec{n}\right)$:

$\vec{r}(t) = \left(v\cos(u)\,,\, v\sin(u)\,,\, 2 - v\sin(u)\right)$

$\vec{r}_u(t) = \left(-v\sin(u)\,,\, v\cos(u)\,,\, -v\cos(u)\right)$

$\vec{r}_v(t) = \left(\cos(u)\,,\, \sin(u)\,,\, -\sin(u)\right)$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -v\sin(u) & v\cos(u) & -v\cos(u) \\ \cos(u) & \sin(u) & -\sin(u) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \left(-v\sin(u)\cos(u) + v\sin(u)\cos(u)\,,\, -v\cos^2(u) - v\sin^2(u)\,,\, -v\sin^2(u) - v\cos^2(u)\right) \\ &= \left(0\,,\, -v\,,\, -v\right) \end{aligned}$$

Como queremos la orientación positiva, el vector que satisface esto serían los que apuntan hacia arriba, ósea:

$$\vec{r}_v \times \vec{r}_u = \left(0\,,\, v\,,\, v\right)$$

Por lo tanto:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \left(\vec{r}_v \times \vec{r}_u\right) dA$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \left(0\,,\, 0\,,\, 1 + 2v\sin(u)\right) \cdot \left(0\,,\, v\,,\, v\right) dA \\ &= \iint_S \left(v + 2v^2\sin(u)\right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v + 2v^2\sin(u)\right) du\, dv \\ &= \int_0^1 \left(vu - 2v^2\cos(u)\right)\Big|_{u=0}^{u=2\pi}\ dv \\ &= \int_0^1 \left(2\pi v\right) dv = \left(\pi v^2\right)\Big|_0^1 = \pi \end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \pi$$

* Gentileza de Sergio González Reyes