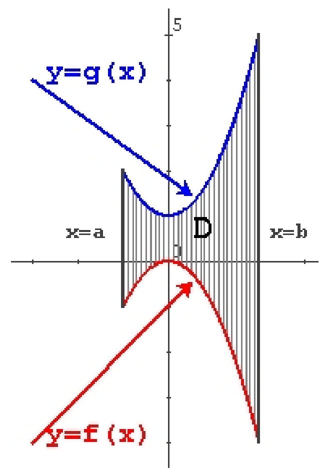
Prof. Claudio del Pino O.

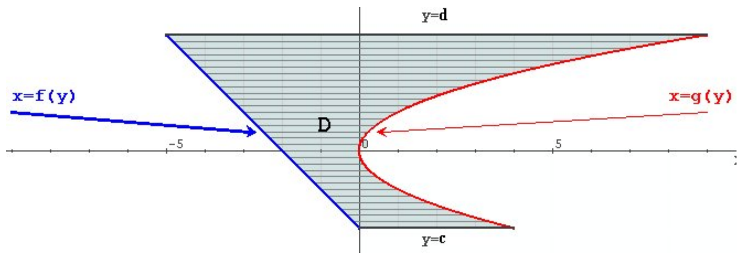
1. Dominios regulares del plano XY.

a) *Dominios tipo I*: Dominios regulares en la dirección del eje Y (verticalmente simples). Son dominios cuya frontera es intersectada en a los más dos puntos por toda *recta vertical* que pasa por un punto interior.



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} a & \leq x \leq & b \\ f(x) & \leq y \leq & g(x) \end{array} \right.$$

b) *Dominios tipo II*: Dominios regulares en la dirección del eje X (horizontalmente simples). Son dominios cuya frontera es intersectada en a los más dos puntos por toda recta *horizontal* que pasa por un punto interior.



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, c \leq y \leq d,\ f(y) \leq x \leq g(y)\} = \begin{cases} \quad c & \leq y \leq \quad d \\ f(y) & \leq x \leq \quad g(y) \end{cases}$$

2. Integrales iteradas.

Sea $z = f(x, y)$ una función continua definida sobre un dominio regular. La integral iterada de f sobre D, es un número real, que viene definido por:

$$II(f, D) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy \right) dx & \text{si} \quad D \text{ es tipo I} \\ \\ \displaystyle\int_c^d \left(\int_{f(y)}^{g(y)} f(x, y)\, dx \right) dy & \text{si} \quad D \text{ es tipo II} \end{cases}$$

Nota:

- Los paréntesis en la definición precedente se suelen omitir.
- Observar que la definición de integral iterada depende del tipo de dominio D.

3. Ejemplo claves

3.1. Ejemplo clave 1

Considerar

- la región D del plano limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$, y
- la función $f(x, y) = xy$

Se pide:

a) Realizar un gráfico, claro y preciso, del dominio D.

b) En caso que D sea *verticalmente* simple, presentar la integral iterada correspondiente.

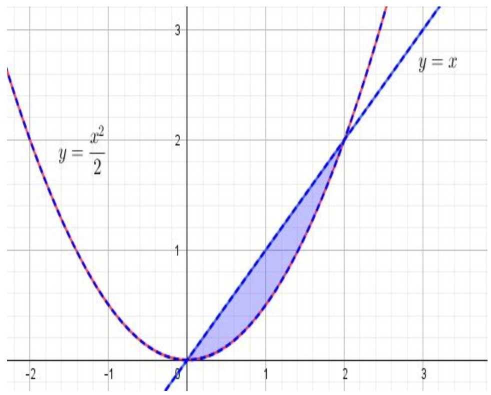
c) En caso que D sea *horizontalmente* simple, presentar la integral iterada correspondiente.

d) Calcular $II(f, D)$

* Graficar en **GeoGebra**
* Mostrar **cdfCap7-CSCDFEjemplo51.cdf**

Desarrollo:

a) Un gráfico de D es:



b) D es verticalmente simple. Luego,

$$I = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} xy\,dy\,dx \tag{1}$$

c) D es horizontalmente simple. Luego,

$$I = \int_0^2 \int_{y}^{\sqrt{2y}} xy\,dx\,dy \tag{2}$$

d) Para esta parte, se puede usar (1) o (2).

- Usando, opción (1):

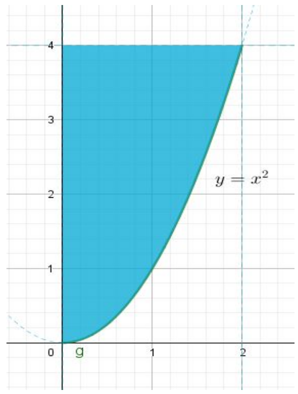
$$I = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} xy\,dy\,dx = \int_0^2 \left(x\frac{y^2}{2} \right)\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x} dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} \right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

- Usando la opción (2):

$$I = \int_0^2 \int_{y}^{\sqrt{2y}} xy\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} y \right)\Big|_{y}^{\sqrt{2y}} dy = \int_0^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

3.2. Ejemplo clave 2

Sea $f(x,y) = x^3 \sin(y^3)$ en el dominio D, el que viene dado por el siguiente gráfico:



a) En caso que D sea *verticalmente* simple, presentar la integral iterada correspondiente.

b) En caso que D sea *horizontalmente* simple, presentar la integral iterada correspondiente.

c) Calcular $II(f, D)$

Desarrollo:

a) D es verticalmente simple, y como tal viene definido por:

$$D = \begin{cases} 0 & \leq x \leq & 2 \\ x^2 & \leq y \leq & 4 \end{cases}$$

Luego,

$$II(f,D) = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 x^3 \sin(y^3)\, dy \right) dx \tag{3}$$

b) D es también horizontalmente simple, y como tal viene definido por:

$$D = \begin{cases} 0 & \leq y \leq & 4 \\ 0 & \leq 0 \leq & \sqrt{y} \end{cases}$$

Luego,

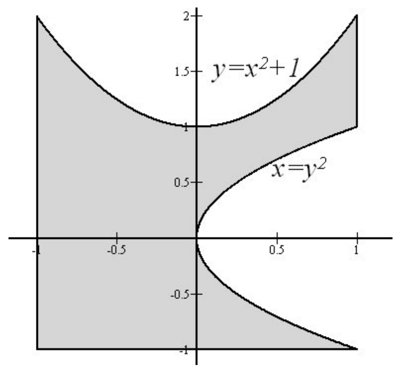
$$II(f,D) = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin(y^3)\, dx \right) dy \tag{4}$$

c) Para encontrar $II(f,D)$, podemos calcular (1) o (2). En este caso trabajaremos la opción (2). ¿Por qué?.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin(y^3)\, dx \right) dy &= \int_0^4 \left(\frac{1}{4} y^2 \sin(y^3) \right) dy \\ &= -\frac{1}{12} \cos(y^3) \Big|_0^4 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(4^3) + \frac{1}{12} \\ &\approx 0{,}05 \end{aligned}$$

4. ¿Qué hacer cuando el dominio no es vertical ni horizontalmente simple?

Evaluar la $II(f, D)$ si $f(x, y) = 1$ y D viene dado por



5. Ejercicios

1. Evaluar $II(f, D)$, para

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

   b) $f(x,y) = y - x$, D limitada por $x = y^2$, $x = 3 - 2y^2$.

   c) $h(x,y) = xe^y$, D región triangular con vértices en $(0,0)$, $(2,4)$ y $(6,0)$.

2. Trazar la región de integración y cambiar el orden de integración

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\, dx\, dy$$

6. Tarea

Evaluar la integral iterada: $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} e^{x^4}\, dx\, dy$