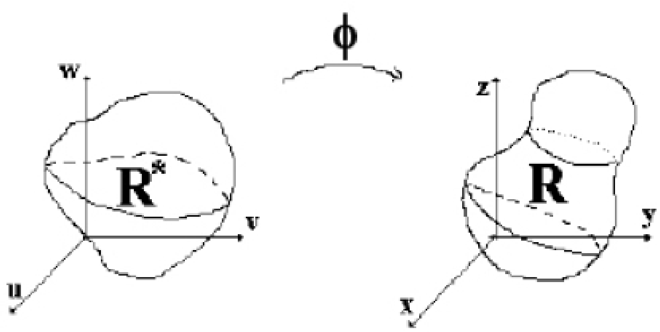
Índice

1. Cambio de variable para integrales triples



Sean R^* y R dos regiones en los espacios uvw y xyz, respectivamente y sea

$$\Phi = \Phi(u,v,w) = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

una transformación inyectiva de R^* en R, entonces para toda función integrable se tiene:

$$\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int\int_{R^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(x,y,w))|J|dudvdw$$

2. Ejemplo 1

Calcular

$$\int\int\int_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}\,dxdydz$$

donde

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$$

efectuando el cambio de variables:

$$u = x+y+z, \quad v = y+z, \quad w = z.$$

3. Ejercicios: Actividades sobre cambio general de variables en integrales triples

1. Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con a, b y c números positivos.

   Sugerencia: Hacer el cambio de variable: $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

   Respuesta: $V = \frac{4}{3}\pi abc$ u. de long.^{3}.

2. Encontrar, usando integrales triples, el volumen del sólido limitado por los planos

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y+z & = & 4 \\ x-2y-z & = & 2 \\ x-2y-z & = & 6 \\ 2x-y+z & = & 0 \\ 2x-y+z & = & 4 \end{array}\right.$$

   Respuesta: $V = 16$ u. de long.^{3}.

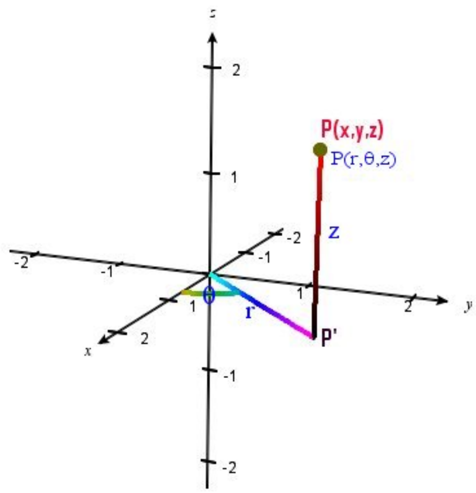
3. Calcular el volumen de la región W en el primer octante limitada por los paraboloides $z = x^2+y^2$, $z = 2x^2+2y^2$, por los cilindros $xy = 1$, $xy = 4$, y por los planos $y = x$ e $y = 5x$, considerando el siguiente cambio de variables:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & xy \\ v & = & \dfrac{y}{x} \\ w & = & \dfrac{z}{x^2+y^2} \end{array}\right.$$

   Respuesta: $V = 18$ u. de long.^{3}.

4. Transformaciones que más se utilizan

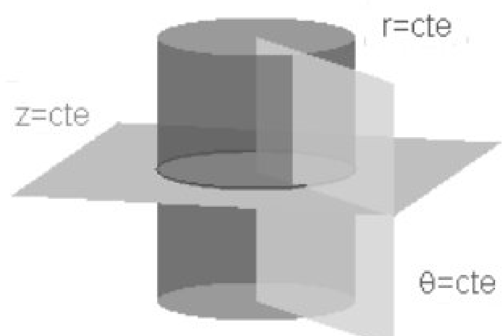
4.1. Coordenadas cilíndricas



Ya hemos visto que en el sistema de coordenadas cilíndricas la posición de un punto P en el espacio se determina por los tres valores (r, θ, z), donde r y θ, son las coordenadas polares de la proyección P' de P, sobre el plano xy.

Las superficies de ecuación más sencilla en coordenadas cilíndricas son:

- $r = a$: es el cilindro de eje OZ y radio a,
- $\theta = b$ es el semiplano que contiene al eje OZ y forma ángulo b con el plano XZ, $(x > 0)$,
- $z = c$: es un plano perpendicular al eje $0Z$.



El cambio de coordenadas cilíndricas viene dado por la siguiente función:

$$\Phi = \Phi(r, \theta, z) = \begin{cases} x = x(r, \theta, z) = r\cos\theta \\ y = y(r, \theta, z) = r\sin\theta \\ z = z(r, \theta, z) = z \end{cases}$$

y

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Por lo tanto, si f es continua en R se tiene:

$$\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\underbrace{r}_{|J|}drd\theta dz$$

La expresión $dV = rdrd\theta dz$ es el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas. Estas coordenadas son especialmente útiles para trabajar con regiones limitadas por superficies cilíndricas de revolución en torno al eje z, planos que contienen a dicho eje y planos perpendiculares al mismo.

Observación: En las coordenadas cilíndricas recién comentadas, la proyección del punto P del espacio, se proyecta sobre el plano XY. Análogamente, se pueden otros 2 *tipos* de coordenadas cilíndricas proyectando P tanto en el plano ZX como YZ:

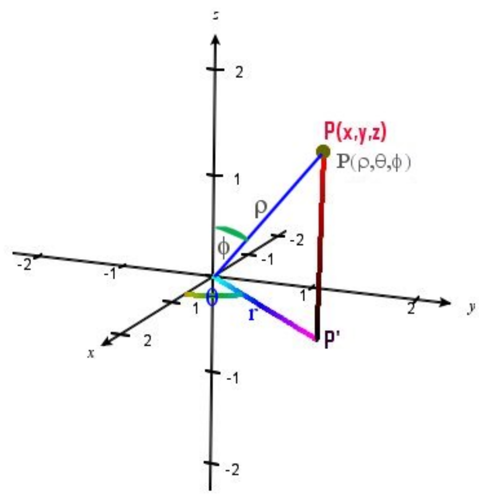
4.1.1. Coordenadas cilíndricas con proyección en el plano ZX

$$\Phi = \Phi(r,\theta,y) = \begin{cases} z = z(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ x = x(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ y = y(r,\theta,z) = y \end{cases}$$

4.1.2. Coordenadas cilíndricas con proyección en el plano YZ

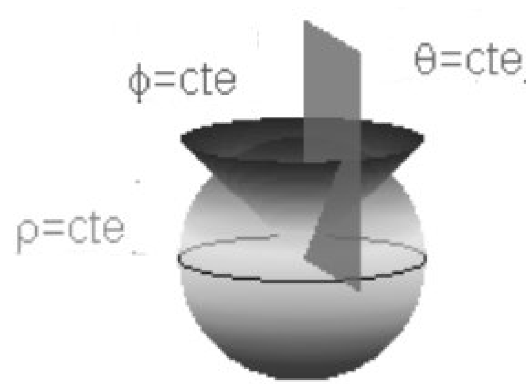
$$\Phi = \Phi(r,\theta,x) = \begin{cases} y = y(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ z = z(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ x = x(r,\theta,z) = x \end{cases}$$

4.2. Coordenadas esféricas



En las coordenadas esféricas, la posición de un punto $P = (x, y, z)$ el espacio se determina por los tres valores (ρ, θ, ϕ), donde $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.
Las variables del sistema representan las siguientes magnitudes geométricas son:

- ρ: distancia del punto al origen de coordenadas,
- θ: ángulo de variación respecto del eje OX positivo, se toma entre 0 y 2π,
- ϕ: ángulo de variación respecto del eje $0Z$ positivo, se toma entre 0 y π.



Las superficies de ecuación más sencilla en coordenadas esféricas son:

- $\rho = a$: es la esfera de centro el origen y radio a;
- $\theta = b$: es el semiplano que contiene al eje $0Z$ y forma ángulo b con el plano XZ, $(x > 0)$;
- $\phi = c$: es un semicono de eje $0Z$.

El cambio de coordenadas esféricas viene dado por la siguiente función:

$$\Phi = \Phi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} x = x(r, \theta, \phi) = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = y(r, \theta, \phi) = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = z(r, \theta, \phi) = \rho \cos\phi \end{cases}$$

y

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin\phi$$

Por lo tanto, si f es continua en R se tiene:

$$\int\int\int_R f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_{R^*} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\underbrace{\rho^2\sin\phi}_{|J|} d\rho d\theta d\phi.$$

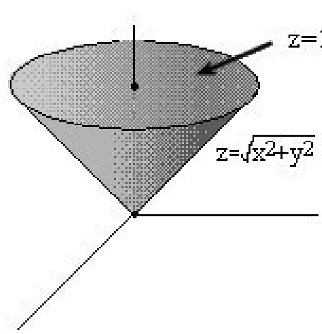
El elemento de volumen en coordenadas esféricas es: $dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$. Estas coordenadas son especialmente útiles para trabajar con regiones limitadas por superficies esféricas o cónicas, es decir para regiones limitadas por superficies coordenadas.

5. Ejemplo 2

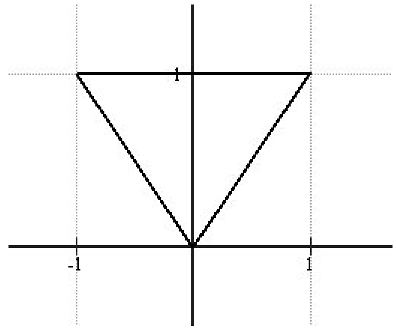
Sea S el sólido acotado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por el plano $z = 1$.

1. Usando una integral iterada triple, expresar su volumen en coordenadas rectangulares, en el orden de integración **dy dx dz**.

   Desarrollo: Es claro que el gráfico del sólido S es

   y su proyección en el plano XZ es



luego,

$$vol(S) = \iiint_S dV = \int_0^1 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} \mathbf{dy\,dx\,dz}$$

2. Calcular el volumen de S, expresando la integral precedente en coordenadas esféricas.

   Desarrollo: Las ecuaciones en coordenadas esféricas del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y del plano $z = 1$ son $\phi = \pi/4$ y $\rho = \sec\phi$, respectivamente. Luego,

$$vol(S) = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

6. Ejercicios

1. Transformar a coordenadas cilíndricas y evaluar

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 z \, dzdydx$$

2. Transformar a coordenadas esféricas y evaluar

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dzdydx$$

3. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7. Tarea

Al calcular <u>en coordenadas esféricas</u> un determinada integral triple se ha llegado a

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$$

se pide:

1. Hacer un esbozo claro y preciso del sólido S de integración.
2. Expresar I en coordenadas rectangulares (<u>no calcular</u>).
3. Calcular el valor de I.